Charakterisierung der Differentiale mit geradlinigen Isoklinen

Autor(en): **Herold, H.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **45 (1990)**

Heft 6

PDF erstellt am: **08.08.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-42420

ELEMENTE DER MATHEMATIK

Revue de mathématiques élémentaires – Rivista di matematica elementare

Zeitschrift zur Pflege der Mathematik
und zur Förderung des mathematisch-physikalischen Unterrichts

El. Math. | Vol. 45 | Nr. 6 | Seiten 145–172 | Basel, November 1990

Charakterisierung der Differentiale mit geradlinigen Isoklinen

Seien f und g in einem Gebiet $G \subset \mathbb{R}^2$ definierte reellwertige Funktionen. Das Differential und die Differentialgleichung

$$f(x,y)\,dy + g(x,y)\,dx\,, \quad f(x,y)\,dy + g(x,y)\,dx = 0$$

heissen in G *exaktes Differential* bzw. *exakte Dgl.*, falls eine Funktion $F \in C^1(G)$ existiert, so dass in G

$$F_x = g\,, \quad F_y = f\,.$$

Man nennt F eine *Stammfunktion* des Differentials bzw. der Dgl. Die Lösungen der Dgl. $f\,dy + g\,dx = 0$ sind die implizit durch die Gleichungen $F(x,y) = \text{const}$ gegebenen Niveaukurven von F (siehe [1]). Sind f, $g \in C^1(G)$, so gilt für ein exaktes Differential (aufgrund der Vertauschbarkeit der partiellen Differentiation) in G die *Integrabilitätsbedingung* $f_x = g_y$, und bei einfach zusammenhängendem G ist das Bestehen der Integrabilitätsbedingung in G auch hinreichend für die Existenz einer Stammfunktion F in G, gegeben durch das (von der Integrationskurve unabhängige) Kurvenintegral

$$F(x,y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} f\,dy + g\,dx\,, \quad (x_0,y_0), (x,y) \in G$$

(siehe [3]). Gelegentlich läßt sich ein Differential durch Multiplikation mit einer in einem Teilgebiet von G definierten Funktion $m = m(x,y)$ $(m \neq 0)$ zu einem dort exakten Differential machen. Man nennt m einen *Multiplikator (integrierenden Faktor)* des Differentials. Zahlreiche elementare Integrationsverfahren bei Dgln. 1. Ordnung beruhen auf der Konstruktion eines Multiplikators, da bei Kenntnis eines Multiplikators die Integration der Dgl. im wesentlichen erledigt ist. Jedoch gibt es keine allgemeine Methode zur expliziten Bestimmung eines Multiplikators für eine gegebene Dgl., weshalb man auf spezielle Ansätze angewiesen ist (siehe [2], [4]). Offenbar ist bei einfach zusammenhängendem G die Funktion $m \in C^1(G)$ genau dann ein Multiplikator für das Differential $f\,dy + g\,dx$, falls m in G die partielle Dgl.

$$f\,m_x - g\,m_y = m(g_y - f_x)$$

erfüllt. Hier soll nun für das (ohne Einschränkung) in der Gestalt

$$dy + q(x,y)\,dx \quad (q \neq \text{const})$$

vorliegende Differential die Existenz eines stetig differenzierbaren Multiplikators der Form $m = \varphi(q) = \varphi(q(x,y))$ erörtert werden. Es gelingt, mittels der implizit durch die Gleichungen $q(x,y) = \text{const}$ gegebenen *Isoklinen* der Dgl. bzw. des Differentials eine einfache geometrische Charakterisierung der einen Multiplikator der Form $\varphi(q)$ besitzenden Differentiale zu geben.
Zunächst die

Bemerkung: Die Isoklinen der Dgl. $y' = -q(x,y)$ mit $q \in C^1(G)$ und $q_y \neq 0$ sind Lösungen der Dgl. genau dann, wenn $q_x = q\,q_y$ ist.

Beweis: Für die Isoklinen $y = y(x)$, $q(x, y(x)) = \text{const}$ gilt

$$q_x(x, y(x)) + q_y(x, y(x))\,y'(x) = 0.$$

Ist dann $y'(x) = -q(x, y(x))$, so folgt $q_x(x, y(x)) = q_y(x, y(x))\,q(x, y(x))$.
Gilt andererseits die Beziehung $q_x = q\,q_y$, so folgt für die Isoklinen

$$q(x, y(x))\,q_y(x, y(x)) + q_y(x, y(x))\,y'(x) = 0,$$

also wegen $q_y \neq 0$: $y'(x) = -q(x, y(x))$.

Satz. *Gegeben sei das Differential*

$$dy + q(x,y)\,dx, \quad q \in C^2(G), \quad q_x \neq q\,q_y.$$

Falls das Differential einen Multiplikator der Form $\varphi(q)$ mit stetig differenzierbarem φ besitzt, sind die Isoklinen des Differentials geradlinig und es gilt in G

$$\varphi(q) = c \exp \int \frac{q_y}{q_x - q\,q_y}\,dq \quad (c \in \mathbb{R}, c \neq 0).$$

Sind umgekehrt die Isoklinen des Differentials geradlinig, besitzt es lokal den zweimal stetig partiell differenzierbaren Multiplikator

$$m := \varphi(q) = \exp \int \frac{q_y}{q_x - q\,q_y}\,dq;$$

für jedes einfach zusammenhängende Teilgebiet $G' \subset \{(x,y) \in G : (q_x - q\,q_y)(x,y) \neq 0\}$ ist

$$m(x,y) = \exp \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} \frac{q_y}{q_x - q\,q_y}(q_x\,dx + q_y\,dy), \quad (x_0,y_0),(x,y) \in G'$$

Zum Beweis wird herangezogen der

Hilfssatz. *Sei $q \in C^2(G)$. Genau dann sind die Niveaukurven von q geradlinig, wenn gilt*

$$q_{xx} q_y^2 + q_{yy} q_x^2 - 2 q_{xy} q_x q_y = 0 .$$

Für $q_y \neq 0$ erhält man nämlich für die Niveaukurven $y = y(x)$ von q aus der Identität

$$q_x(x, y(x)) + q_y(x, y(x))\, y'(x) = 0:$$

$$y'' = -q_y^{-3}(q_{xx} q_y^2 + q_{yy} q_x^2 - 2 q_{xy} q_x q_y) .$$

Beweis des Satzes: Falls das Differential $\varphi(q)\,dy + \varphi(q)\,q\,dx$ exakt ist, gilt

$$\frac{\partial}{\partial x}\varphi(q(x,y)) = \frac{\partial}{\partial y}(\varphi(q(x,y))\,q(x,y))$$

oder

$$\frac{1}{\varphi}\frac{d\varphi}{dq} = Q \quad \text{mit} \quad Q = Q(x,y) := \frac{q_y}{q_x - q\,q_y}(x,y) .$$

Daher gilt mit $\Phi = \Phi(x,y) := \log|\varphi(q(x,y))|$:

$$\Phi_x = Q\,q_x, \quad \Phi_y = Q\,q_y,$$

woraus dann wegen $\Phi_{xy} = \Phi_{yx}$ und $q_{xy} = q_{yx}$ die Beziehung

$$Q_y q_x = Q_x q_y \quad \text{oder} \quad q_{xx} q_y^2 + q_{yy} q_x^2 - 2 q_{xy} q_x q_y = 0$$

folgt, so daß aufgrund des Hilfssatzes die Niveaukurven von q geradlinig sind.
Sind umgekehrt die Niveaukurven von q geradlinig, gilt aufgrund des Hilfssatzes die Bedingung

$$q_{xx} q_y^2 + q_{yy} q_x^2 - 2 q_{xy} q_x q_y = 0 ,$$

äquivalent mit

$$\frac{\partial}{\partial y}(Q\,q_x) = \frac{\partial}{\partial x}(Q\,q_y),$$

der Integrabilitätsbedingung für das Differential $Q(q_x\,dx + q_y\,dy) = Q\,dq$.
Daher ist in jedem G' durch das Kurvenintegral

$$\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} Q(q_x\,dx + q_y\,dy) \quad ((x_0,y_0),(x,y) \in G')$$

eine zweimal stetig partiell differenzierbare Funktion erklärt, die offenbar auf den Niveaukurven von q konstant ist.
Abschliessend wird das Ergebnis an Hand dreier charakteristischer geradliniger Isoklinenscharen illustriert.

a) Isoklinen bilden Parallel-Geradenschar:

$$dy + \sin(x+y)\,dx.$$

Wegen $\dfrac{q_y}{q_x - q\,q_y} = \dfrac{1}{1-q}$ ist $\varphi(q) = \dfrac{1}{1-q}$.

Das exakte Differential

$$\frac{dy}{1-\sin(x+y)} + \frac{\sin(x+y)}{1-\sin(x+y)}\,dx$$

besitzt die Stammfunktion

$$-x + \frac{1+\sin(x+y)}{\cos(x+y)}.$$

b) Isoklinen bilden Geradenbündel:

$$dy - \frac{y}{x+y}\,dx.$$

Wegen $\dfrac{q_y}{q_x - q\,q_y} = -\dfrac{1+q}{q^2}$ ist $\varphi(q) = \dfrac{1}{q}e^{\frac{1}{q}}$.

Das exakte Differential

$$\frac{x+y}{y}e^{-\frac{x}{y}}\,dy - e^{-\frac{x}{y}}\,dx$$

besitzt die Stammfunktion $y e^{-\frac{x}{y}}$.

c) Isoklinen bilden Halbgeradenschar mit Einhüllender:

$$dy + (\sqrt{x^2 - y} - x)\,dx.$$

Die Isoklinen $\sqrt{x^2 - y} - x = \text{const}$ sind die Halbtangenten an die Parabel $y = x^2$.

Wegen $\dfrac{q_y}{q_x - q\,q_y} = \dfrac{1}{q}$ ist $\varphi(q) = q$.

Das exakte Differential

$$(\sqrt{x^2 - y} - x)\,dy + (\sqrt{x^2 - y} - x)^2\,dx$$

besitzt die Stammfunktion

$$\frac{2}{3}x^3 - \frac{2}{3}(x^2 - y)^{\frac{3}{2}} - x\,y\,.$$

H. Herold, Fachbereich Mathematik, Universität Marburg

LITERATUR

1 Kamke E.: Differentialgleichungen reeller Funktionen, Akademische Verlagsgesellschaft, 2. Auflage, Leipzig 1945.
2 Kamke E.: Differentialgleichungen: Lösungsmethoden und Lösungen, Bd. I., Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig 1961.
3 v. Mangoldt H., Knopp K.: Einführung in die höhere Mathematik, Bd. 3., Hirzel Verlag, Stuttgart 1967.
4 Stepanow W. W.: Lehrbuch der Differentialgleichungen, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1976.

 0013-6018/90/060145-05$1.50 + 0.20/0

A very elementary proof of a probabilistic limit relation

Let

$$a_n = e^{-n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n^k}{k!}\,. \tag{1}$$

It is well known that

$$\lim a_n = \tfrac{1}{2}\,. \tag{2}$$

This limit relation has a definite probabilistic flavor. In «wise» terms, a_n is the probability that the sum of n independent, equally distributed Poisson random variables with parameter $\lambda = 1$ is smaller than mean value. Relation (2) hence follows immediately as a very particular case of the Central Limit Theorem.
(I first met quantities (1) when dealing with certain problems concerning probability measures in $\mathbb{R}^n$: confronting Gaussian distribution versus discrete measures concentrated on vertices of the n-cube.)
One inevitably encounters (1) and (2) in quite simple probabilistic considerations concerning interrelation between Poisson, normal and binomial distributions. A glance at the first few chapters of W. Feller's book [1] (its examples and exercises) will suffice to ascertain this.