Kleine Mitteilung

Objekttyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **45 (1990)**

Heft 6

PDF erstellt am: **08.08.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Kleine Mitteilung

Ein einfacher geometrischer Beweis für die Determinantenungleichung von O. Szasz

Es sei $A = (a_{ii})$ eine symmetrische und positiv-definite $n \times n$-Matrix und P_k sei das Produkt aller ihrer $k \times k$-Hauptminoren ($1 \leqq k \leqq n$). Dann gilt die Szasz'sche Verfeinerung der Hadamard'schen Determinantenungleichung (siehe etwa [1], [2], [3], [4]):

$$\prod_{i=1}^{n} a_{ii} = P_1 \geq \ldots \geq P_k^{1/\binom{n-1}{k-1}} \geq \ldots \geq P_n = \det A\,.$$

Man kann im n-dimensionalen euklidischen Raum E^n eine Basis $e_1, \ldots, e_n$ so wählen, dass die Gram'sche Matrix

$$G = [(e_i, e_j)]_{1 \leq i, j \leq n}$$

mit A übereinstimmt. Die Zahl $(\det G)^{1/2}$ kann interpretiert werden als Volumen des Parallelotops $V = V(e_1, \ldots, e_n)$ [5]. Es sei weiter I eine beliebige Teilmenge von $\{1, 2, \ldots, n\}$ und V_I das von den Vektoren e_i, $i \in I$ aufgespannte Parallelotop. Wir bezeichnen mit v_k das Produkt der Volumina aller k-dimensionalen Parallelotope V_I. Dann nimmt die Szasz'sche Ungleichung die Form

$$\prod_{i=1}^{n} \|e_i\| = v_1 \geq \ldots \geq v_k^{1/\binom{n-1}{k-1}} \geq \ldots \geq v_n = \operatorname{vol} V$$

an.
Der angestrebte geometrische Beweis dieser Ungleichung beruht nun auf dem folgenden Hilfssatz.

Hilfssatz: *Das Volumen eines Parallelotops ist grösser oder gleich dem Produkt aller seiner Höhen. Gleichheit besteht genau dann, wenn das Parallelotop orthogonal ist.*

Den Beweis führen wir mit vollständiger Induktion nach der Dimension des Parallelotopes. Die Induktionsverankerung ist trivial ($n = 2$). Der Induktionsschritt von $n - 1$ auf n kann wie folgt vollzogen werden.
Es sei $V = V(e_1, \ldots, e_n)$ ein Parallelotop mit den Höhen h_i ($1 \leq i \leq n$). Dann gilt

$$h_i = \operatorname{vol} V / \operatorname{vol} V_i = \min\{\|e_i - f\| : f \in L(V_i)\}\,.$$

wobei

$$V_i = V_{\{1, \ldots, n\} \setminus \{i\}}$$

und $L(V_i)$ der von V_i aufgespannte Teilraum ist ($1 \leq i \leq n$).

Nach der Induktionsvoraussetzung hat man für $2 \leq i \leq n$

$$\operatorname{vol} V_1 \geq h_2' \dots h_n',$$

mit

$$h_i' = \min\{\|e_i - f\| : f \in L(V_i')\}, \quad V_i' = V_{\{2,\dots,n\}\setminus\{i\}}.$$

Wegen der Inklusion

$$V_i' \subset V_i \quad \text{für} \quad 2 \leq i \leq n$$

besteht die Ungleichung

$$h_i' \geq h_i \quad \text{für} \quad 2 \leq i \leq n.$$

Folglich ist

$$\operatorname{vol} V = h_1 \operatorname{vol} V_1 \geq h_1 h_2' \dots h_n' \geq h_1 h_2 \dots h_n.$$

Die Gleichung

$$\operatorname{vol} V = h_1 h_2 \dots h_n$$

besteht nur, wenn

$$\operatorname{vol} V_1 = h_2' \dots h_n' \quad \text{und} \quad h_i = h_i' \quad \text{für} \quad 2 \leq i \leq n$$

ist. Gemäss Induktionsvoraussetzung gilt aber

$$\operatorname{vol} V_1 = h_2' \dots h_n'$$

nur dann, wenn $(e_i, e_j) = 0$ für $2 \leqq i, j \leq n$. Dann folgen aus den Beziehungen

$$h_i = h_i' \quad \text{für} \quad 2 \leq i \leq n$$

die Gleichungen $h_i = h_i' = \|e_i\|$, $2 \leq i \leq n$ (weil e_i und $L(V')$ orthogonal sind), also $(e_1, e_i) = 0$, $2 \leq i \leq n$ (andernfalls sind e_i und $L(V_i)$ nicht-orthogonal und $h_i < \|e_i\|$). Damit ist aber der Hilfssatz bewiesen.
Gemäss Hilfssatz ist

$$\operatorname{vol} V \geq h_1 \dots h_n = \prod_{i=1}^{n} \operatorname{vol} V / \operatorname{vol} V_i,$$

also gelten auch die Ungleichungen

$$\prod_{i=1}^{n} \operatorname{vol} V_i \geq (\operatorname{vol} V)^{n-1}$$

und

$$v_n = \operatorname{vol} V \leq \prod_{i=1}^{n} (\operatorname{vol} V_i)^{1/(n-1)} = v_{n-1}^{1/(n-1)}.$$

Hieraus folgt für ein beliebiges k-dimensionales Parallelotop V_I die Ungleichung

$$\operatorname{vol} V_I \leq \left(\prod_{i \in I} \operatorname{vol} V_{I \setminus \{i\}}\right)^{1/(k-1)}.$$

Daraus schliesst man jetzt, dass

$$v_k = \prod_{\substack{I \subset \{1,\ldots,n\} \\ |I|=k}} \operatorname{vol} V_I \leq \prod_I \left(\prod_{i \in I} \operatorname{vol} V_{I \setminus \{i\}}\right)^{1/(k-1)} = \left(\prod_{\substack{J \subset \{1,\ldots,n\} \\ |J|=k-1}} \operatorname{vol} V_j\right)^{\frac{n-k+1}{k-1}}$$
$$= v_{k-1}^{\binom{n-1}{k-1}/\binom{n-1}{k-2}}, \quad 2 \leq k \leq n$$

und dies beweist die Ungleichung von Szasz.

S. B. Gaschkov,
Fakultät für Mechanik und Mathematik, Universität Moskau

Die vorliegende Arbeit wurde im Sommer-Semester 1988 während eines Gastaufenthaltes am Mathematischen Institut der Universität Zürich verfasst.

LITERATUR

1 Szasz O.: Über eine Verallgemeinerung des Hadamard'schen Determinantensatzes. Monatsschrift f. Math. und Phys. *28*, 253–257 (1917).
2 Beckenbach E., Bellmann E.: Inequalities. Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg 1961.
3 Mirsky L.: On a Generalization of Hadamard's Determinantal Inequality due to Szasz. Archiv der Math. *8*, 274–275 (1957).
4 Marcus M., H. Minc: A Survey of Matrix Theory and Matrix Inequalities. Ally and Bacon, Boston, 1964.
5 Hadwiger H.: Vorlesungen über Inhalt, Oberfläche und Isoperimetrie. Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg 1957.

© 1990 Birkhäuser Verlag, Basel 0013-6018/90/060153-03$1.50 + 0.20/0

Elementarmathematik

Ein Satz über Eckentfernungen beim Dreieck

Wir betrachten ein Dreieck ABC mit den Seitenlängen a, b, c. Es sei E irgend ein Punkt der Ebene, und k_1, k_2, k_3 seien drei aufeinander abgestimmte Zahlen, welche die Gleichung

$$\overline{EA}^2 + k_1 = \overline{EB}^2 + k_2 = \overline{EC}^2 + k_3 \tag{1}$$