# Kleine Mitteilungen

Objekttyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **46 (1991)**

Heft 3

PDF erstellt am: **12.07.2024**

The final conclusion

$$p_k = \frac{1}{e k!} \quad \text{for} \quad k = 0, 1, 2, \ldots.$$

is a direct consequence of the relations (8) and (9).

Marcin E. Kuczma, Institute of Mathematics, University of Warsaw

 0013-6018/91/030078-06$1.50 + 0.20/0

# Kleine Mitteilungen

## Eine Bemerkung über Iterationsverfahren

In dieser Note soll an Beispielen gezeigt werden, dass eine in der Literatur der numerischen Mathematik (etwa in [1], [2]) oft vorgebrachte Idee zur Konvergenzbeschleunigung für Iterationsverfahren sogar zu deren Divergenz führen kann.
Dort wird vorgeschlagen für das Iterationsverfahren

$$x_{i+1} = \Phi(x_i) \tag{1}$$

mit $x = (x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(n)}) \in \mathbb{R}^n, \quad \Phi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

die Konvergenz zu verbessern, indem dieses in

$$x_{i+1}^{(m)} = \Phi^{(m)}(x_{i+1}^{(1)}, \ldots, x_{i+1}^{(m-1)}, x_i^{(m)}, \ldots, x_i^{(n)}) \qquad m = 1, 2, \ldots, n \tag{2}$$

abgeändert wird. Die verbesserten Werte sollen also komponentenweise sofort zur weiteren Rechnung verwendet werden. Auch eine andere Komponentenreihenfolge im Sinne einer optimalen Auswahlstrategie mit Blick auf eine bessere Konvergenz sei denkbar.
*Die Variante* (2) *kann sogar im konvergenten Fall des gewöhnlichen Verfahrens* (1) *zur Divergenz führen.* Die vorgeschlagene Methode (2) erfordert nebst den üblichen Konvergenzbedingungen von (1) (Kontraktionseigenschaften im linearen Fall) [3] von Fall zu Fall gesonderte Untersuchungen. Dies demonstriert für $n = 2$ das lineare

**Beispiel 1.** Die Iterationsfolge

$$x_{i+1} = A\,x_i \quad \text{mit} \quad A = \begin{pmatrix} -0{,}8 & -0{,}4 \\ 0{,}5 & -0{,}5 \end{pmatrix}$$

ist für jeden Startwert $x_0 \in \mathbb{R}^2$ (linear) gegen den einzigen Fixpunkt (0, 0) konvergent, da für die Norm $\|A\| = \max\limits_{\|x\|=1} \|A\,x\| = \sqrt{0{,}9} < 1$ gilt.

Die Variante (2) führt auf die Folge

$$x_{i+1} = A_{12} x_i \quad \text{mit} \quad A_{12} = \begin{pmatrix} -0{,}8 & -0{,}4 \\ -0{,}4 & -0{,}7 \end{pmatrix},$$

die aber für jeden Startvektor $x_0 \neq \lambda(\sqrt{65}-1, -8)$ (Eigenvektor der Matrix $A_{12}$ zum Eigenwert $(\sqrt{65}-15)/20 < 1$) divergiert, da $\|A_{12}\| = (\sqrt{65}+15)/20 > 1$ gilt.
Auch für die Reihenfolge

$$x_{i+1}^{(2)} = \Phi^{(2)}(x_i^{(1)}, x_i^{(2)})$$
$$x_{i+1}^{(1)} = \Phi^{(1)}(x_i^{(1)}, x_{i+1}^{(2)})$$

der Variante (2) liegt für alle Startvektoren (ausser $x_0 = \lambda(15, 16+\sqrt{481})$ als Eigenvektor der Matrix $A_{21}^T A_{21}$ zum kleineren Eigenwert) Divergenz vor, da die zugehörige Matrix $A_{21} = \begin{pmatrix} -1 & 0{,}2 \\ 0{,}5 & -0{,}5 \end{pmatrix}$ die Norm $\|A_{21}\| = \sqrt{77+3\sqrt{481}}/10 > 1$ besitzt.
Gleiche Effekte zeigen nicht-lineare Systeme wie das

**Beispiel 2.**

$$\Phi^{(1)}(x^{(1)}, x^{(2)}) = x^{(1)^3} + x^{(2)^3}$$
$$\Phi^{(2)}(x^{(1)}, x^{(2)}) = \sin^3 x^{(1)} + \sin^3 x^{(2)}$$

für die speziellen Startwerte $x_0^{(1)} = -\,x_0^{(2)}$. Das gewöhnliche Verfahren (1) liefert schon nach dem ersten Rechenschritt den Fixpunkt $(0, 0)$, aber die Methode (2) konvergiert langsamer.
Auch für die Iterationsfunktion $\Phi(x) = x - (Df(x))^{-1} f(x)$, ($Df$ Jacobimatrix) bei der Lösung des Systems $f(x) = 0$ nach dem Newtonschen Verfahren tritt durch Anwenden der Variante (2) beim

**Beispiel 3.**

$$f^{(1)}(x^{(1)}, x^{(2)}) = x^{(1)^2} \cdot x^{(2)^3} - 1$$
$$f^{(2)}(x^{(1)}, x^{(2)}) = x^{(1)^3} - x^{(2)^4}$$

mit dem Fixpunkt $(\xi^{(1)}, \xi^{(2)}) = (1, 1)$ im allgemeinen keine Verbesserung der Konvergenz ein. Für die Abschätzung der Fehler bis zur zweiten Ordnung gilt für die spezielle Wahl der Startwerte

$$x_0^{(1)} - \xi^{(1)} = \sqrt{3}\,\delta$$
$$x_0^{(2)} - \xi^{(2)} = -\frac{2}{\sqrt{3}}\,\delta$$

für die Fehler nach einem Rechenschritt

$$x_1^{(1)} - \xi^{(1)} = -\delta^2$$
$$x_1^{(2)} - \xi^{(2)} = -\delta^2$$

beim üblichen Verfahren (1) und die grösseren Werte

$$\begin{aligned} x_1^{(1)} - \xi^{(1)} &= -\delta^2 \\ x_1^{(2)} - \xi^{(2)} &= \frac{28}{17}\delta^2 \end{aligned} \quad \text{und} \quad \begin{aligned} x_1^{(1)} - \xi^{(1)} &= \frac{39}{17}\delta^2 \\ x_1^{(2)} - \xi^{(2)} &= -\delta^2 \end{aligned}$$

für die beiden möglichen Reihenfolgen der Variante (2).

R. Wyss, Kantonsschule Solothurn

REFERENZEN

[1] Henrici P.: Elemente der numerischen Analysis I, p. 153. BI, Mannheim 1972[1].
[2] Rheinboldt W. C.: Methods for Solving Systems of Nonlinear Equations, SIAM (1984), Regional Conference Series in Applied Mathematics.
[3] Stoer J.: Einführung in die Numerische Mathematik I. Springer, Berlin 1983[4].

 0013-6018/91/030083-03$1.50 + 0.20/0

# An inequality on the greatest roots of a polynomial

**Abstract:** Let $\varrho$ be the greatest modulus of the roots of a monic polynomial $P$ with complex coefficients and height $H$. We prove $\varrho < 1 + H^{1/k}$ if $P$ has $k$ roots of modulus $\varrho$ (for $k = 1$, this is due to Cauchy). In particular, when $P$ is a polynomial with real coefficients which has a non real root $\alpha$ then $|\alpha| < 1 + \sqrt{H}$.

In this paper, $P$ is a monic polynomial of degree $d$, with complex coefficients

$$P(X) = X^d + a_{d-1}X^{d-1} + \ldots + a_0 = (X - \alpha_1)\ldots(X - \alpha_d)$$

with $\varrho := |\alpha_1| \geq |\alpha_2| \geq \ldots \geq |\alpha_d|$. The height of $P$ is $H = \max\{1, |a_{d-1}|, \ldots, |a_0|\}$.
In computer algebra and numerical analysis it is very useful to have bounds for the roots of a polynomial.
The following inequalities are known:

- $\varrho < H + 1$ (Cauchy, 1829, [1], p. 122),
- $|\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n| \leq (1 + |a_{d-1}|^2 + \ldots + |a_0|^2)^{1/2}$ (Landau, 1905, [2]),
- $|\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n| < nH + 1$ (Specht, 1938, [3]).

We prove:

**Theorem.** *If* $1 \leq n \leq d$ and $P(X) = (X - \alpha_1)\dots(X - \alpha_n) Q(X)$, then

$$||\alpha_1| - 1| \dots ||\alpha_n| - 1|\, H(Q) < H(P).$$

**Proof:** It is sufficient to prove this inequality for $n = 1$. Put $Q(X) = X^{d-1} + \dots + b_0$.
Suppose that $|\alpha_1| \geqq 1$ and let $i$ be minimal such that $H(Q) = |b_i|$.
The relation $a_i = b_{i-1} - \alpha_1 b_i$ (where $b_{-1} = b_d = 0$) implies

$$H(P) \geq |a_i| \geq |\alpha_1|\, H(Q) - |b_{i-1}| > (|\alpha_1| - 1)\, H(Q).$$

The proof is similar when $|\alpha_1| < 1$.

**Corollary 1.** *Suppose that* $|\alpha_1| = \dots = |\alpha_k| = \varrho$, then $\varrho < H^{1/k} + 1$.

**Corollary 2.** (*Cauchy*). *One has* $\varrho < H(P) + 1$.

**Corollary 3.** *Let $P$ be a monic polynomial with real coefficients, and let $\alpha$ be a non real root of $P$, then* $|\alpha| < (H(P))^{1/2} + 1$.

**Remarks.** 1) One can give many variants of the previous theorem. For example, if $P$ is equal to the product $P(X) = R(X) Q(X)$, a direct generalization of our argument leads to $H(P) \geq (2H(R) - L(R)).\, H(Q)$, where $L(R)$ is the sum of the moduli of the coefficients of $R$. In particular, if $\alpha$ is a non real root of a monic polynomial with real coefficients $P$, $\alpha = |\alpha| e^{i\theta}$, then $|\alpha| \leq |\cos\theta| + (H(P) + 1 + \cos^2\theta)^{1/2}$, which is better than corollary 3 if $\cos\theta$ is small enough.
2) With the notations of corollary 1, Specht's inequality implies $\varrho < (kH + 1)^{1/k}$. Our result, $\varrho < H^{1/k} + 1$, is weaker for small $H$, but better for large $H$.

M. Mignotte, Université Louis Pasteur, Strasbourg

**References**

[1] Cauchy A. L.: Exercices de Mathématiques, Quatrième Année, De Bure Frères, Paris, 1829. Oeuvres, Ser. II, Vol. IX, Gauthier-Villars, Paris, 1891.
[2] Landau E.: Sur quelques théorèmes de M. Petrovic relatifs aux zéros des fonctions analytiques; Bull. Soc. Math. France, t. 33, 1905, p. 251–261.
[3] Specht W.: Zur Theorie der algebraischen Gleichungen; Jahresber. Deutsch. Math. V., 1938, p. 142–145.

 0013-6018/91/030085-02$1.50 + 0.20/0