Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 47 (1992)

Artikel: Theorie der Gitterpunkte
Autor: Krätzel, Ekkehard
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-43907

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 02.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

El. Math., *47*, (1992)

0013-6018/92/010006-13$1.50 + 0.20/0
© 1992 Birkhäuser Verlag, Basel

Theorie der Gitterpunkte

Ekkehard Krätzel,
Friedrich-Schiller-Universität, Jena

Ekkehard Krätzel wurde 1935 geboren. Er studierte an der Friedrich-Schiller-Universität in Jena, wo er 1963 promovierte. Seit 1969 ist er Professor für Theoretische Mathematik an dieser Universität. Sein Hauptinteresse gilt dem Gebiete der analytischen Zahlentheorie, insbesondere der Theorie der Gitterpunkte und der grundlegenden zahlentheoretischen Funktionen.

Wieviele Punkte mit ganzzahligen Koordinaten liegen im Kreis $K(x) = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 | u^2 + v^2 \leq x\}$? Für einen konkret gegebenen Radius $\sqrt{x} > 0$ ist die Frage problemlos beantwortbar, genügend Zeit vorausgesetzt. Suchen wir aber eine genaue Formel, die für alle x gültig ist, so finden wir uns mitten in einem der klassischen ungelösten Probleme der Zahlentheorie wieder. Eine erste Approximation der genauen Anzahl ist der Flächeninhalt πx des Kreises $K(x)$. Das Kreisproblem (oder Kreisgitterpunktproblem) besteht in der Erforschung der Fehlerfunktion

$$\Delta(x) = \text{Anzahl}\left(\mathbb{Z}^2 \cap K(x)\right) - \pi x.$$

Auf eine genaue elementare Formel wird dabei der schieren Hoffnungslosigkeit wegen zum vornherein verzichtet. Man beschränkt sich auf die Bestimmung wichtiger Eigenschaften. Etwa: Hat $\Delta(x)$ viele Zeichenwechsel? Oder diese wichtigste Frage: Welches ist die Größenordnung von $\Delta(x)$ falls x gegen ∞ strebt?

In dieser Arbeit erläutert der Autor neueste Resultate zum Kreisproblem und zum verwandten Teilerproblem und geht auf verschiedene Verallgemeinerungen dieser klassischen Probleme ein, die man alle etwa so beschreiben kann: für eine Familie $B(x)$ von kompakten Bereichen in $\mathbb{R}^n$, mit $x > x_0$, sucht man eine einfache Funktion $f(x)$ derart, daß

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\text{Anzahl}(\mathbb{Z}^n \cap B(x))}{f(x)} = 1$$

und untersucht dann die Fehlerfunktion $\Delta(x) = \text{Anzahl}(B(x) \cap \mathbb{Z}^n) - f(x)$. Er beschränkt sich dabei im wesentlichen auf die Frage nach der Größenordnung: durch welche einfache Funktion $g(x) > 0$ lässt sich $|\Delta(x)|$ nach oben abschätzen. hj

Der Gegenstand, um den es sich handelt, ist schnell beschrieben. Wir betrachten einen p-dimensionalen Euklidischen Raum, der mit einem Cartesischen Koordinatensystem versehen ist. Unter einem Gitterpunkt verstehen wir einen Punkt mit ganzzahligen Koordinaten. Die zentrale Aufgabe in der Theorie der Gitterpunkte besteht in der Abschätzung der Anzahl der Gitterpunkte in großen kompakten Bereichen. So einfach das Problem beschrieben ist, so schwierig ist jedoch seine Bearbeitung. Diese von der geometrischen Seite her dargelegte Aufgabenstellung bietet natürlich selbständiges Interesse. Andererseits führen viele Fragestellungen der Zahlentheorie in letzter Konsequenz auf Gitterpunktprobleme. An einzelnen Stellen der folgenden Ausführungen wird darauf hingewiesen. Als ergänzende Literatur sei auf die Monographien von F. Fricker [1] und des Autors [3] mit zahlreichen weiterführenden Literaturangaben und auf die Übersichtsartikel von F. Fricker [2], W.G. Nowak [4] und W. Schwarz [5] hingewiesen.

1 Ebene Gitterpunktprobleme

1.1 Der Satz von Jarnik-Steinhaus. Die Theorie der Gitterpunkte nimmt ihren Ausgangspunkt im sogenannten Kreisproblem, welches bereits von C.F. Gauß aufgeworfen wurde. Wir fragen nach der Anzahl der Gitterpunkte in einem Kreis mit dem Mittelpunkt im Ursprung des Koordinatensystems und dem Radius $\sqrt{x}$, wobei $x > 1$ ein großer positiver Parameter ist. Uns interessiert also eine Abschätzung der Anzahlfunktion

$$R_2(x) = \#\{(m,n) : m^2 + n^2 \leq x;\ m,n \in \mathbb{Z}\}.$$

Dabei kann man folgendermaßen vorgehen: Man ordnet jedem Gitterpunkt des Kreises dasjenige achsenparallele Quadrat der Seitenlänge 1 zu, welches den Gitterpunkt zum Mittelpunkt hat. Die Vereinigung aller dieser Quadrate bildet ein Polygon, dessen Flächeninhalt gleich der Anzahl der Gitterpunkte $R_2(x)$ im Kreis ist. Dieser Flächeninhalt stimmt annähernd mit dem Flächeninhalt des Kreises überein. Fehler entstehen bei dieser Betrachtungsweise am Rande des Kreises. Genauer: Das Polygon liegt ganz im Kreis mit dem Radius $\sqrt{x} + 1/\sqrt{2}$ und enthält den Kreis mit dem Radius $\sqrt{x} - 1/\sqrt{2}$. Daher ist

$$\pi\left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \leq R_2(x) \leq \pi\left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$$

und folglich

$$|R_2(x) - \pi x| < 2\pi\sqrt{x}.$$

Die arithmetische Deutung dieses Ergebnisses liegt auf der Hand. Bezeichnet $r(n)$ die Anzahl der Darstellungen der natürlichen Zahl n als Summe von 2 Quadraten ganzer Zahlen, so ist

$$R_2(x) = 1 + \sum_{n \leq x} r(n) \sim \pi x \quad (x \to \infty).$$

Das bedeutet, $r(n)$ besitzt die durchschnittliche Größenordnung π.

Es ist interessant, daß die über den Kreis getroffene Aussage weitgehend verallgemeinert werden kann. Dies bemerkte zunächst M.V. Jarnik und teilte es H. Steinhaus mit, der

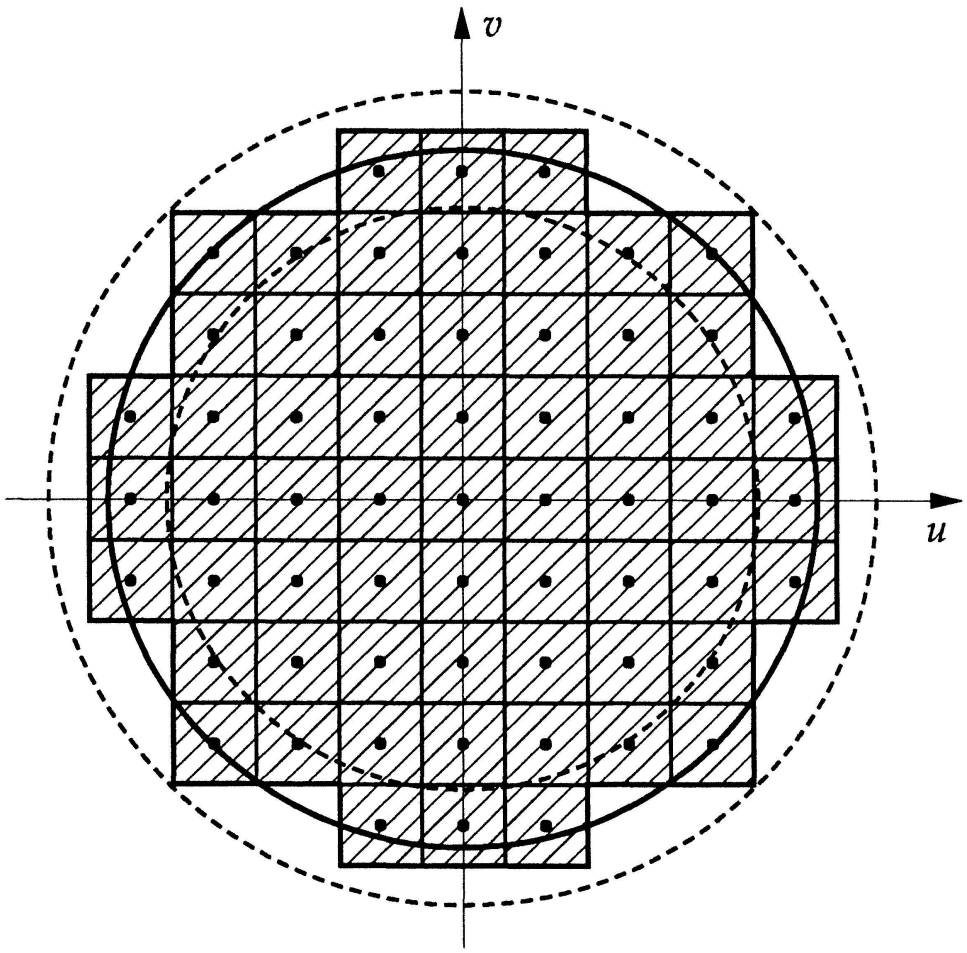

Fig. 1 Das Polygon ist schraffiert. Die Kreislinie mit Radius $\sqrt{x}$ ist ausgezogen, die Kreislinien mit den Radien $\sqrt{x} \pm \sqrt{2}$ sind gestrichelt.

1947 einen Beweis des folgenden Satzes mit genau den gleichen einfachen Hilfsmitteln publizierte:

Es sei J eine geschlossene rektifizierbare Jordankurve mit der Länge L. Das Innere von J enthalte G Gitterpunkte und habe den Flächeninhalt F. Ist $L \geq 1$, so gilt

$$|F - G| < L.$$

In der Folge interessiert uns nur noch qualitativ die Größenordnung des Fehlers, wenn die Anzahl der Gitterpunkte durch den Flächeninhalt ersetzt wird. Wir schreiben dann $f(x) = O(g(x))$ oder $f(x) \ll g(x)$, wenn g eine positive Funktion ist und wenn es eine Konstante $c > 0$ gibt, so daß $|f(x)| \leq cg(x)$ für $x \geq x_0 \geq 0$. In diesem Sinne schwächen wir den Satz von Jarnik-Steinhaus etwas ab. Wir betrachten einen Grundbereich D und "blasen" ihn mit einem grossen Parameter x auf. Dann gilt:

Es sei D ein kompakter Bereich, der durch eine rektifizierbare Jordankurve berandet ist. Es sei

$$R(x) = \#\left\{(m,n) : \left(\frac{m}{\sqrt{x}}, \frac{n}{\sqrt{x}}\right) \in D;\ m,n \in \mathbb{Z}\right\} \tag{1}$$

für $x > 1$. Bezeichnet $|D|$ den Flächeninhalt von D, so ist

$$R(x) = |D|x + O(\sqrt{x}). \tag{2}$$

Der Satz ist der beste seiner Art. Es gibt Bereiche, bei denen $O(\sqrt{x})$ nicht verbessert werden kann. Zum Beispiel können auf dem Rand von Rechtecken $O(\sqrt{x})$ Gitterpunkte liegen.

1.2 Gitterpunkte in kompakten Bereichen mit nicht-verschwindender Krümmung auf dem Rande. Für die Abschätzung des Restgliedes in (2) haben wir eine schöne geometrische Interpretation: Es ist von der Größenordnung der Länge der Randkurve. Nun stellt sich natürlich die Frage, ob die Abschätzung in (2) verbessert werden kann, sofern man hinreichende Glattheit des Randes voraussetzt. Wenden wir uns zunächst wieder dem Kreis zu. Es gilt (2) mit $|D| = \pi$. Schreiben wir

$$R_2(x) = \pi x + \Delta(x)$$

und definieren

$$\vartheta = \inf\{\alpha : \Delta(x) \ll x^{\alpha}\}. \tag{3}$$

Die Bestimmung der wahren Größe ϑ bezeichnet man als das Kreisproblem. Wir sind weit entfernt von einer Lösung. Es sollen wesentliche Etappen der historischen Entwicklung beschrieben werden.

Trivial ist $0 \le \vartheta \le 1/2$. Im Jahre 1906 schaffte W. Sierpinski mit einer komplizierten auf G. Voronoi zurückgehenden Methode $\vartheta \le 1/3$, was in den Folgejahren mehrfach durch Methoden der Geometrie, der reellen und komplexen Analysis bestätigt wurde. Von großer Tragweite erwies sich die Methode der Abschätzung von Exponentialsummen, die von J.G. van der Corput in den zwanziger Jahren entwickelt wurde. Man muß die Anzahl der Gitterpunkte unterhalb einer Kurve abschätzen können. Bezeichnet G die Anzahl der Gitterpunkte (m,n) mit $0 \le m \le f(n)$, $a < n \le b$, so ist — falls die Gitterpunkte der

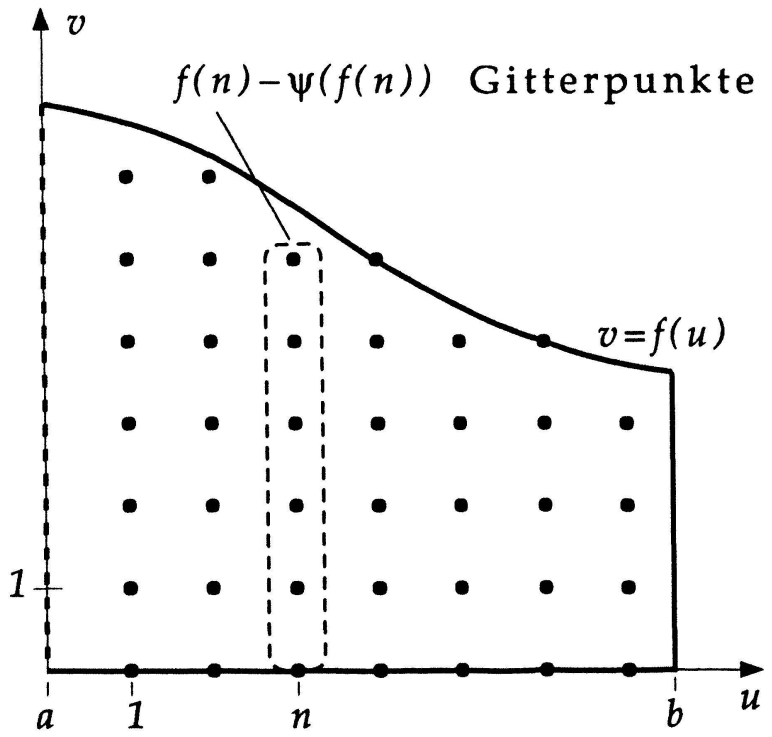

Fig. 2

Form $(0,n)$ mit dem Gewicht $1/2$ belastet werden —

$$G = \sum_{a<n\le b} f(n) - \sum_{a<n\le b} \psi(f(n))$$

mit $\psi(t) = t - [t] - 1/2$. Hinreichende Differenzierbarkeit von $f(t)$ vorausgesetzt, entstehen hinsichtlich der asymptotischen Entwicklung beziehungsweise der Abschätzung beider Summen zwei völlig unterschiedlich schwierige Probleme. Die erste Summe läßt sich im allgemeinen mit der Euler-Maclaurinschen Summenformel in einfacher Weise asymptotisch entwickeln. In der zweiten Summe schwankt die ψ-Funktion zwischen $-1/2$ und $+1/2$, und man möchte das Wegheben positiver und negativer Anteile in den Griff bekommen. Dazu nutzt man die Fourier-Entwicklung von $\psi(t)$,

$$\psi(t) = -\frac{1}{\pi}\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\sin(2\pi\nu t)}{\nu}$$

und wird auf die Notwendigkeit der Abschätzung der Exponentialsumme

$$\sum_{a<n\le b} e^{2\pi i f(n)\nu}$$

geführt. Dies erfolgt durch Überführung der Summen in Integrale und Anwendung der aus der Asymptotik her bekannten Methode der stationären Phase. Damit bewies J.G. van der Corput 1919 erneut $\vartheta \le 1/3$ und darüberhinaus den allgemeinen Satz:

Es sei D ein kompakter ebener Bereich. Der Rand sei eine stückweise stetig gekrümmte Jordankurve mit von 0 verschiedener Krümmung. Ist $R(x)$ durch (1) definiert, so ist

$$R(x) = |D|x + O\left(x^{1/3}\right).$$

G.H. Hardy und E. Landau bewiesen 1915 unabhängig voneinander $\vartheta \ge 1/4$ beim Kreis, so daß die wahre Konstante ϑ zwischen $1/4$ und $1/3$ zu suchen ist. Die untere Schranke konnte bisher nicht vergrößert werden, die obere dagegen verkleinert. Man glaubt allgemein, daß $1/4$ wohl die wahre Konstante sein wird.

J.G. van der Corput verschärfte seine Methode erheblich. Statt die Exponentialsummen wie oben direkt abzuschätzen, unterwarf er sie einer Transformation vermöge der Euler-Maclaurinschen Summenformel. Damit erhielt er: *Ist $f(t)$ dreimal stetig differenzierbar in $[a,b]$, $c \le |f''(t)| \le uc$, $\alpha = \min f'(t)$, $\beta = \max f'(t)$, $\varepsilon = e^{\pi i/4}$ für $f''(t) > 0$ und $\varepsilon = e^{-\pi i/4}$ für $f''(t) < 0$, ist weiterhin $\varphi(t)$ durch $f'(\varphi(t)) = t$ definiert, so gilt*

$$\sum_{a<n\le b} e^{2\pi i f(n)} = \varepsilon \sum_{\alpha<\nu\le\beta} \frac{1}{\sqrt{|f''(\varphi(\nu))|}} e^{2\pi i(f(\varphi(\nu))-\nu\varphi(\nu))} + \text{Restglied}. \tag{5}$$

Würde man die neu entstehende Exponentialsumme auf der rechten Seite trivial abschätzen, so würde das beim Kreis wieder auf $\vartheta \le 1/3$ hinauslaufen. Mit der Anwendung sogenannter Weylscher Schritte — so genannt, weil H. Weyl mit Hilfe der

Schwarzschen Ungleichung Exponentialsummen abschätzte — entwickelte J.G. van der Corput eine tiefliegende Methode zur Abschätzung von Exponentialsummen, die in einem Wechselspiel von Weylschen Schritten und van der Corputschen Transformationen besteht. So erzielte er im Falle des Kreises $\vartheta < 1/3$.

Einen entscheidenden Schritt weiter ging E.C. Titchmarsh 1934. Er führte zweifache Exponentialsummen

$$\sum_{(m,n)\in D} e^{2\pi i f(m,n)} \tag{6}$$

ein und schätzte diese dadurch ab, daß er sie auf zweifache Integrale zurückführte und eine Methode zu ihrer Behandlung analog zur Methode der stationären Phase entwickelte. Er erreichte $\vartheta \leq 15/46$ für den Kreis. Diese Methode wurde in der Folgezeit von verschiedenen Autoren erheblich verfeinert.

Eine grundsätzlich neue Methode zur Abschätzung von Exponentialsummen schufen 1986 E. Bombieri und H. Iwaniec, auf deren Grundlage H. Iwaniec und J. Mozzochi 1988 $\vartheta \leq 7/22$ beim Kreis erzielten. Die Anwendung der Hardy-Littlewoodschen Kreismethode auf den diskreten Fall und die Verwendung von Siebmethoden brachten im Verein mit den obigen Methoden den Erfolg. M.N. Huxley arbeitete die neue Methode zu dem Satz aus, in dem die zweimalige stetige Differenzierbarkeit des van der Corputschen Satzes lediglich durch die Forderung der dreimaligen stetigen Differenzierbarkeit ersetzt wird:

Es sei D ein kompakter ebener Bereich. Der Rand sei eine stückweise dreimal stetig differenzierbare Kurve, mit nirgends verschwindender Krümmung. Ist $R(x)$ durch (1) definiert, so ist

$$R(x) = |D|x + O\left(x^{7/22}(\log x)^{47/22}\right).$$

1.3 Teilerprobleme. Neben dem Kreisproblem hat das Dirichletsche Teilerproblem eine zentrale Bedeutung erlangt. Bezeichnet $d(n)$ die Anzahl der Teiler der natürlichen Zahl n, so hat P.G.L. Dirichlet 1849 die Frage nach dem asymptotischen Verhalten der summatorischen Funktion

$$D(x) = \sum_{n\leq x} d(n)$$

aufgeworfen. Dabei handelt es sich in Wirklichkeit um ein Gitterpunktsproblem, denn es müssen die Anzahl der Gitterpunkte unterhalb des Hyperbelasts $t_1 t_2 = x$, $t_1 > 0$, $t_2 > 0$ abgezählt werden.

Mit der Eulerschen Konstanten C ist

$$D(x) = x \log x + (2C - 1)x + \Delta(x).$$

Wir verwenden die Bezeichnung (3) auch in diesem Fall. Verwechslungen zwischen Kreis- und Teilerproblem können gar nicht erst aufkommen, denn beide Probleme haben sich parallel entwickelt. Elementar ist $0 \leq \vartheta \leq 1/2$. G. Voronoi erreichte 1903 $\vartheta \leq 1/3$. Auf diese Arbeit baute W. Sierpinski beim Kreis auf, wie im vorangehenden Abschnitt bereits erwähnt. $\vartheta \geq 1/4$ stammt wieder von G.H. Hardy und E. Landau. Daß $\vartheta \leq 15/46$

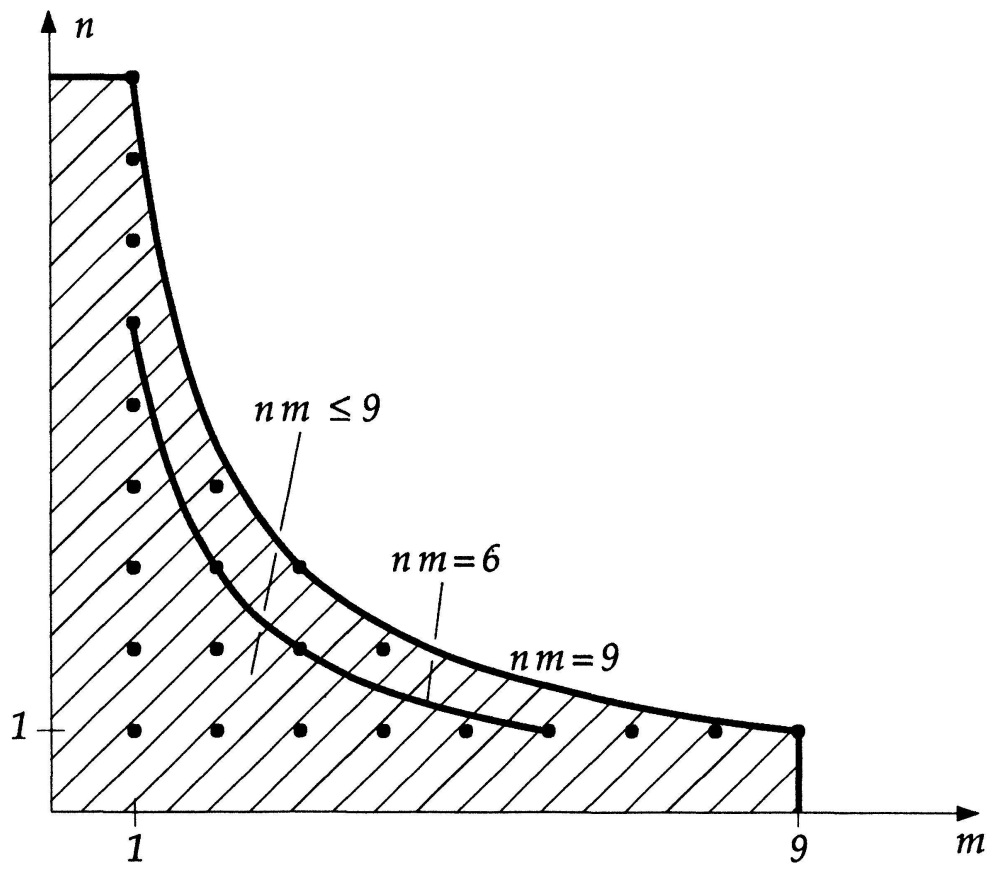

Fig. 3

bestätigten mit zweifachen Exponentialsummen unabhängig voneinander Chih Tsung-tao 1950 und H.-E. Richert 1953. Schließlich bekamen H. Iwaniec und J. Mozzochi mit ihrer Methode $\vartheta \leq 7/22$.

In neuerer Zeit spielt ein unsymmetrisches Teilerproblem eine wichtige Rolle in der Zahlentheorie. Sind a, b natürliche Zahlen mit $1 \leq a \leq b$, so werden die Teilerfunktion

$$d(a,b;n) = \#\left\{(n_1,n_2); n_1^a n_2^b = n;\ n_1,n_2 \in \mathbb{N}\right\}$$

und die summatorische Funktion

$$D(a,b;x) = \sum_{n \leq x} d(a,b;n)$$

betrachtet. Bei der Untersuchung der Verteilung der quadratfreien (p prim, $p/n \Rightarrow p^2 \nmid n$) und der quadratvollen Zahlen (p prim, $p/n \Rightarrow p^2/n$) treten beispielsweise Fragen des asymptotischen Verhaltens von $D(1,2;x)$ und $D(2,3;x)$ auf. Man erhält allgemein

$$D(a,b;x) = H(a,b;x) + \Delta(a,b;x),$$

wobei das Hauptglied für $a < b$ gegeben ist durch

$$H(a,b;x) = \zeta\left(\frac{b}{a}\right) x^{1/a} + \zeta\left(\frac{a}{b}\right) x^{1/b}.$$

$\zeta(s)$ bezeichnet die Riemannsche Zeta-Funktion. Obwohl das Restglied grundsätzlich mit denselben Methoden wie bisher angegangen werden kann, treten durch die Unsymmetrie des Problems eigentümliche Schwierigkeiten auf. Das zeigt schon das erste nicht-triviale Ergebnis, welches H.-E. Richert 1952 erhielt:

$$\Delta(a,b;x) \ll \begin{cases} x^{\frac{2}{3}\frac{1}{a+b}} \log x & \text{für } b \leq 2a \\ x^{\frac{2}{5a+2b}} \log x & \text{für } b > 2a. \end{cases}$$

In dem Ergebnis für $b > 2a$ gehen nämlich a und b nicht mehr gleichberechtigt ein. Das mag wohl an der Unvollkommenheit der Methoden liegen, denn man erwartet allgemein $\frac{1}{2}\frac{1}{a+b} + \varepsilon$ als Exponenten.

1.4 Gitterpunkte in kompakten Bereichen, die auf dem Rande Punkte mit Krümmung 0 enthalten. Bei den Betrachtungen über die Anzahl der Gitterpunkte in kompakten Bereichen des Abschnittes 1.2 war ganz wesentlich, daß auf der Randkurve keine Punkte mit Krümmung 0 liegen. Anderenfalls liegt eine gänzlich neue Situation vor. Dies bemerkte zunächst B. Randol 1966 beim Studium der durch Lamésche Kurven

$$|t_1|^k + |t_2|^k = x$$

berandeten Bereiche für gerade $k \geq 4$, was anschließend vom Autor für ungerade $k \geq 3$ bestätigt werden konnte: Man erhält scharfe nicht mehr zu verbessernde Abschätzungen. Eine allgemeine Aussage geht auf Y. Colin de Verdière im Jahre 1977 zurück, dessen Methode sich auf die Theorie der Singularitäten stützt. Aber die Methode der Exponentialsummen ist in gleicher Weise anwendbar.

Es sei D ein kompakter ebener Bereich. Der Rand sei eine stückweise k-mal stetig differenzierbare Kurve, wobei $k \geq 3$ sei. Die Krümmung verschwinde nur an endlich vielen Punkten, und dies von einer Ordnung kleiner oder gleich $k-2$. Ist $R(x)$ durch (1) definiert, so ist

$$R(x) = |D|x + O\left(x^{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{k})}\right).$$

Hier ist der Fall der Laméschen Kurven eingeschlossen, aber über eine untere Abschätzung ist zunächst nichts ausgesagt.

Nimmt man zusätzlich an, daß in allen Punkten P_i der Randkurve mit Krümmung 0 die Kurve rationalen Anstieg besitzt, so zeigte W.G. Nowak 1984 in Verallgemeinerung der Ergebnisse des Autors zu den Laméschen Kurven, daß sich der Beitrag dieser Punkte zum Gitternetz explizit angeben läßt. Hat die Nullstelle der Krümmung im Punkt P_i die Ordnung $k_i - 2$ ($k_i \geq 3$), so gilt

$$R(x) = |D|x + \sum_{P_i} \psi_i(x) + O(x^{\vartheta+\varepsilon}),$$

wobei die angebbaren Funktionen $\psi_i(x)$ von der genauen Größenordnung $O(x^{(1-1/k_i)/2})$ sind. Eine Ausnahme kann es bei Vorliegen eines Wendepunktes geben, bei dem die genaue Größenordnung auch $O(x^{(1-2/k_i)/2})$ sein kann. Über das Fehlerglied $O(x^{\vartheta+\varepsilon})$ kann

man nun Aussagen von der Art des Abschnittes 1.2 machen: $\vartheta = 1/3$ beziehungsweise $\vartheta = 7/22$.

Es zeigt sich, daß die Rationalitätsbedingung wesentlich ist. B. Randol stellte nämlich fest, daß bei Drehung des Bereiches D um einen Winkel α um den Ursprung die entstehenden Restanteile für fast alle α von der Größenordnung $O(x^{1/3})$ unabhängig von der Ordnung der Krümmungsnullstelle werden. M. Tarnopolska-Weiss zeigte dies 1978 sogar für algebraisch-irrationales $\tan\alpha$, sofern die Ausgangskurve die Rationalitätsbedingung erfüllt.

2 Dreidimensionale Gitterpunktprobleme

2.1 Gitterpunkte in der Kugel. Es bezeichne $R_3(x)$ die Anzahl der Gitterpunkte im Inneren und auf der Kugel $t_1^2 + t_2^2 + t_3^2 = x$. Ganz analog wie im Abschnitt 1.1 kann man feststellen, daß diese Anzahl in erster Näherung durch das Volumen der Kugel gegeben ist, wobei sich ein Fehlerglied von der Größenordnung der Oberfläche einstellt. Schreiben wir

$$R_3(x) = \frac{4\pi}{3}x^{3/2} + \Delta_3(x),$$

$$\vartheta_3 = \inf\{\alpha_3 : \Delta_3(x) \ll x^{\alpha_3}\},$$

so ist also $\vartheta_3 \leq 1$. Genauso elementar ist $\vartheta \geq \frac{1}{2}$, eine Abschätzung, die bis heute nicht verbessert werden konnte. Ja, man nimmt allgemein $\vartheta_3 = 1/2$ an. E. Landau zeigte 1912 mit seinen tiefliegenden analytischen Methoden $\vartheta_3 \leq 3/4$.

Natürlich kann man allgemein bei dreidimensionalen Gitterpunktproblemen und insbesonderer bei den Kugeln vorteilhaft die zweifachen Exponentialsummen (6) verwenden. Auf der Grundlage der von E.C. Titchmarsh entwickelten Methode kann man das Landausche Ergebnis heute mühelos beweisen. Die weitere Entwicklung des Kugelproblems wurde von I.M. Vinogradov geprägt. Sein bestes Ergebnis $\vartheta_3 \leq 2/3$ wurde 1963 bewiesen. Seine Vorgehensweise ist bemerkenswert. Er bediente sich ebenfalls der zweifachen Exponentialsummen. Im Gegensatz zu E.C. Titchmarsh, der den Weg über zweifache Integrale ging, wendete er nacheinander die van der Corputsche Transformation (5) der einfachen Exponentialsumme zunächst auf die eine, dann auf die andere Variable an. Das hat zwei ganz entscheidende Vorteile:

1. Man erhält wieder eine Exponentialsumme, und man kann ein Wechselspiel Weylscher Schritte und van der Corputscher Transformationen analog den einfachen Exponentialsummen einleiten. Dies führte letztendlich — wenn auch nicht ausschließlich — auf das gute Vinogradovsche Ergebnis bei der Kugel.

2. Während das Vorgehen von E.C. Titchmarsh kaum eine Chance hat, auf mehrfache Exponentialsummen ausgedehnt zu werden, besitzt das Vinogradovsche Verfahren die Möglichkeit, auch höherdimensionale Probleme in Angriff zu nehmen. In diese Richtung gehen erste Versuche einer Theorie der Abschätzung mehrfacher Exponentialsummen durch G. Kolesnik und den Autor.

Ein Problem ganz anderer Art steht in engem Zusammenhang mit dem Kugelproblem. Es bezeichne $H(d)$ die Anzahl der Klassen ganzzahliger, positiv-definiter, binärer, quadra-

tischer Formen der Determinante d. Die asymptotische Entwicklung der summatorischen Funktion

$$\sum_{d \le x} H(d)$$

führt auf ein dreidimensionales Gitterpunktproblem, nämlich auf die Bestimmung der Anzahl der ganzzahligen Lösungen der Ungleichungen $n_1 n_2 - m^2 \le x$, $0 < n_1 \le n_2$, $0 \le 2m \le n_1$. Dieses Problem steht in gleichem Verhältnis zum Kugelproblem wie im ebenen Fall das Teilerproblem zum Kreisproblem. Das bedeutet, daß sich beide Probleme in gleicher Weise mit gleichen Ergebnissen entwickelt haben und dies wohl auch weiterhin so sein wird.

2.2 Teilerprobleme. Es bezeichne a, b, c natürliche Zahlen mit $1 \le a \le b \le c$. Die Teilerfunktion $d(a,b,c;n)$ gibt die Anzahl der Darstellungen der natürlichen Zahl n in der Form $n = n_1^a n_2^b n_3^c$ an. Das Problem der Beurteilung des asymptotischen Verhaltens der summatorischen Funktion

$$D(a,b,c;x) = \sum_{n \le x} d(a,b,c;n)$$

stellt ein dreidimensionales Gitterpunktproblem dar. Insbesondere in den letzten Jahren führten viele zahlentheoretische Probleme auf die Notwendigkeit der Untersuchung dieser Funktion. Während das Tripel $(a,b,c) = (1,1,1)$ das Piltzsche Teilerproblem beschreibt — benannt nach A. Piltz, der 1881 eine erste Abschätzung gab —, ist das Tripel $(1,2,3)$ von größter Bedeutung in der Frage der Verteilung der Anzahl der nichtisomorphen Abelschen Gruppen gegebener Ordnung. Solche Tripel wie $(2,3,6)$, $(3,4,5)$ sind bedeutsam in der Frage der Verteilung der quadratvollen und kubikvollen Zahlen. Ähnlich wie in Abschnitt 1.3 erhält man

$$D(a,b,c;x) = c_1 x^{1/a} + c_2 x^{1/b} + c_3 x^{1/c} + \Delta(a,b,c;x)$$

mit angebbaren Koeffizienten c_1, c_2, c_3, vorausgesetzt daß $a < b < c$ gilt. Im Falle von Gleichheiten $a = b$ oder $b = c$ treten noch logarithmische Faktoren in der 1. oder 2. Potenz auf. Für das Restglied gaben M. Vogts und A. Ivic 1981 auf der Grundlage einer Idee von P.G. Schmidt die Darstellung

$$\Delta(a,b,c;x) = -\sum_{(u,v,w)} S(u,v,w;x) + O\left(x^{\frac{1}{a+b+c}}\right)$$

an, bei der (u,v,w) über alle 6 Permutationen von (a,b,c) läuft. Die S-Funktion sieht folgendermaßen aus:

$$S(u,v,w;x) = \sum_{\substack{n^u m^{v+w} \le x \\ n \le m}} \psi\left(\left(\frac{x}{n^u m^v}\right)^{1/w}\right).$$

Der Beweis dieser Darstellung ist sehr kompliziert, aber sie verspricht die Möglichkeit des wirkungsvollen Einsatzes zweifacher Exponentialsummen. Dennoch läßt sich denken,

daß die Verhältnisse hier noch wesentlich komplizierter als bei der Abschätzung von $D(a,b;x)$ sind.

Trivial ist die Abschätzung

$$\Delta(a,b,c;x) \ll x^{\frac{2}{a+b+c}}.$$

Übrigens weiß man, daß

$$\Delta(a,b,c;x) = o\left(x^{\frac{1}{a+b+c}}\right)$$

falsch ist, das heißt, daß der Quotient von Δ und der x-Potenz rechter Hand nicht gegen 0 strebt.

Setzen wir für das Piltzsche Teilerproblem

$$\vartheta_3 = \inf\{\alpha_3 : \Delta(1,1,1;x) \ll x^{\alpha_3}\},$$

so zeigte E. Landau 1912 $\vartheta_3 \leq \frac{1}{2}$ mit seinen analytischen Methoden. Heute können wir mit Exponentialsummen

$$\Delta(a,b,c;x) \ll x^{\frac{3}{2}\frac{1}{a+b+c}} \log^3 x$$

beweisen, worin das Landausche Ergebnis enthalten ist. Aber im unsymmetrischen Fall gilt dies nur unter der Einschränkung $11a \geq 4(b+c)$. Um den entgegengesetzten Fall zu behandeln, sind ziemliche Aufwendungen erforderlich. Überhaupt ist das Umgehen mit den zweifachen Exponentialsummen noch sehr mühevoll.

Die Entwicklung des Piltzschen Teilerproblems hat eine umfangreiche Geschichte, auf die wir nicht eingehen können. Das beste Resultat erzielte G. Kolesnik 1981 mit $\vartheta_3 \leq \frac{43}{96} = 0,4479\ldots$ Dieses Ergebnis, welches unter großen Mühen mit zweifachen Exponentialsummen erreicht wurde, zeigt jedoch, daß wir noch nicht weit von $\frac{1}{2}$ aber noch sehr weit von $\frac{1}{3}$ entfernt sind.

3 Mehrdimensionale Gitterpunktprobleme

3.1 Gitterpunkte in konvexen Körpern. Für die Abschätzung der Anzahl der Gitterpunkte in p-dimensionalen Körpern ($p \geq 3$) wird man sich wünschen, die Konzeption der ebenen Bereiche — dargelegt in den Abschnitten 1.2. und 1.3 — auch hier zu verwirklichen. Das stößt auf zum Teil fast unüberwindliche Schwierigkeiten. Man wird ausgehen wollen von einem kompakten Bereich, dessen Rand ein eineindeutiges und sogar analytisches Bild der Einheitskugel ist. Wie im ebenen Fall die Krümmung der Randkurve, so spielt jetzt die Gaußsche Krümmung eine entscheidende Rolle. Im wesentlichen wurde bisher nur der Fall positiver Gaußscher Krümmung behandelt. Hier erreichte E. Hlawka 1950 das folgende allgemeine Resultat:

Es sei D ein konvexer Körper, der die oben genannten Bedingungen erfüllt. Es sei

$$R_p(x) = \#\left\{(n_1,n_2,\ldots,n_p) : \left(\frac{n_1}{\sqrt{x}}, \frac{n_2}{\sqrt{x}}, \ldots, \frac{n_p}{\sqrt{x}}\right) \in D;\ n_1,n_2,\ldots,n_p \in \mathbb{Z}\right\}$$

für $x > 1$. Bezeichnet $|D|$ das Volumen von D, so ist

$$R_p(x) = |D|x^{p/2} + O\left(x^{p(p-1)/2(p+1)}\right). \tag{7}$$

Darüberhinaus ist

$$R_p(x) = |D|x^{p/2} + o\left(x^{(p-1)/4}\right)$$

falsch.

E. Hlawka bewies sein Resultat mit einer auf E. Landau zurückgehenden Methode, mit der dieser (7) 1915 für den Fall der Ellipsoide nachwies. Die Theorie der Abschätzung der mehrfachen Exponentialsummen ist inzwischen wenigstens soweit entwickelt, daß das Landausche Ergebnis für das Ellipsoid nachvollzogen werden kann, vielleicht auch das Hlawkasche allgemeine Ergebnis.

Es ist übrigens bemerkenswert, daß Landaus Abschätzung für das Ellipsoid im allgemeinen Fall bis heute nicht verbessert wurde. Lediglich in einigen speziellen Fällen, so für rationale Ellipsoide — die Koeffizienten der quadratischen Form sind rational — wurden bessere Abschätzungen gefunden. Aber hier liegt eine besondere Situation vor. Dieser Fall wurde in dem Übersichtsartikel von F. Fricker [2] ausführlich behandelt, so daß wir ihn hier übergehen können.

Für p-dimensionale Körper, deren Oberfläche Punkte mit verschwindender Gaußscher Krümmung aufweisen, liegen überhaupt keine Resultate in allgemeiner Form vor. Lediglich B. Randol und der Autor fanden Aussagen, die sich auf Bereiche beziehen, die von der Hyperfläche

$$|t_1|^k + |t_2|^k + \ldots + |t_p|^k = x, \quad k = 3, 4, \ldots,$$

begrenzt werden. Die Ergebnisse entsprechen denen des Abschnitts 1.4.

3.2 Teilerprobleme. In natürlicher Verallgemeinerung der in den Abschnitten 1.3, und 2.2 betrachteten Teilerfunktionen werden die zahlentheoretischen Funktionen

$$d(a_1, a_2, \ldots, a_p; n) = \#\left\{(n_1, n_2, \ldots, n_p) : n_1^{a_1} n_2^{a_2} \ldots n_p^{a_p} = n\right\}$$

mit natürlichen Zahlen $1 \le a_1 \le a_2 \le \ldots \le a_p$ $(p \ge 2)$ und ihre summatorischen Funktionen

$$D(a_1, a_2, \ldots, a_p x) = \sum_{n \le x} d(a_1, a_2, \ldots, a_p; n)$$

untersucht. Das Problem der Abschätzung von $D(1, 1, \ldots, 1; x)$ geht auf A. Piltz zurück und wird für $p \ge 3$ als Piltzsches Teilerproblem angesprochen. Die Notwendigkeit der Untersuchung des allgemeinen Problems wurde durch die in jüngster Zeit aufgetretene Frage nach der Verteilung der potenzvollen Zahlen hervorgerufen.

Mit Hilfe der Riemannschen Zeta-Funktion $\zeta(s)$ erhält man für die erzeugende Funktion

$$\sum_{n=1}^{\infty} d(a_1, a_2, \ldots, a_p; n) n^{-s} = \prod_{\nu=1}^{p} \zeta(a_\nu s),$$

wobei die Reihe für $\mathrm{Re}(s) > 1/a_1$ absolut konvergiert. Also ist für nicht-ganzzahliges x und $c > 1/a_1$

$$D(a_1, a_2, \ldots, a_p; x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \prod_{\nu=1}^{p} \zeta(a_\nu s) \frac{x^s}{s} ds, \tag{8}$$

woraus man auf eine Darstellung

$$D(a_1, a_2, \ldots, a_p; x) = \sum_{\nu=1}^{p} c_\nu x^{1/a_\nu} + \Delta(a_1, a_2, \ldots, a_p; x)$$

schließen kann, sofern $a_1 < a_2 < \ldots < a_p$ ist. Im Fall von einigen Gleichheiten unter den a_i sind noch logarithmische Faktoren im Hauptglied einzufügen.

Zur Abschätzung des Restgliedes bietet die Integraldarstellung (8) an, das Integral nach links über die Polstellen zu führen und es dann abzuschätzen. Dazu muß man das Verhalten von $\zeta(\sigma+i\tau)$ für reelle σ, τ mit $\tau \to \infty$ beurteilen können. Das ist ein noch völlig offenes Problem. Auf diese Weise wurden bisher alle Abschätzungen beim Piltzschen Teilerproblem für $p \geq 4$ gewonnen. Exponentialsummen scheinen wenig zu greifen. Bezeichnet

$$\vartheta_p = \inf\left\{\alpha_p : \Delta(1, 1, \ldots, 1; x) \ll x^{\alpha_p}\right\},$$

so ist nach A. Piltz (1881) $\vartheta_p \leq 1 - 1/p$ und nach E. Landau (1912) $\vartheta_p \leq (p-1)/(p+1)$. Die vielen Verbesserungen, die es inzwischen gegeben hat, sind für große p sehr schwach. Man ist weit von der unteren Abschätzung $\vartheta_p \geq (p-1)/2p$ nach G.H. Hardy (1916) entfernt. Nach H.-E. Richert (1960) gibt es ein $c > 0$, so daß gleichmäßig in p die Abschätzung $\vartheta_p \leq 1 - cp^{-2/3}$ gilt.

Wendet man auf das allgemeine Problem die gleiche Methode an, so erhält man wegen der Unsymmetrie des Problems nur schwache Abschätzungen oder Abschätzungen, die nur unter sehr einschneidenden Bedingungen Gültigkeit haben. Hier scheint die Anwendung mehrfacher Exponentialsummen wieder nützlich zu sein. Die einzige bekannte Abschätzung, die keinerlei Bedingungen erfordert und mit mehrfachen Exponentialsummen gewonnen wurde, ist

$$\Delta(a_1, a_2, \ldots, a_p; x) \ll x^{\frac{p-1}{a_1+A_p}} \log^p x.$$

Dabei ist $A_p = a_1 + a_2 + \ldots + a_p$. Diese Abschätzung liefert immerhin im Piltzschen Teilerproblem das Landausche Ergebnis.

Literatur

[1] F. Fricker, Einführung in die Gitterpunktlehre, Basel – Boston – Stuttgart 1982.

[2] F. Fricker, Gelöste und ungelöste Gitterpunktprobleme, Jahrbuch Überblicke Mathematik (1983), 117–135.

[3] E. Krätzel, Lattice Points, Berlin 1988 und Dordrecht – Boston – London 1988.

[4] W.G. Nowak, Einige Beiträge zur Theorie der Gitterpunkte, Springer Berlin – Heidelberg – New York – Tokyo, Lecture Notes in Math., Zahlentheoretische Analysis, 1114 (1985), 98–117.

[5] W. Schwarz, Geschichte der analytischen Zahlentheorie seit 1890. Dokumente zur Geschichte der Mathematik 6 (1990), 741–780.

Ekkehard Krätzel,
Friedrich-Schiller Universität,
Mathematische Fakultät
Universitätshochhaus, 17. OG
D–O–6900 Jena