Zeitschrift: Elemente der Mathematik

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 47 (1992)

Artikel: Dreiecks-Proportionalschnittkreise, ihre Mittenhyperbel und ein Pendant zum Satz von Morley

Autor: Stammler, Ludwig

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-43921

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 13.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

El. Math., *47*, (1992)

0013-6018/92/040158-11$1.50 + 0.20/0
© 1992 Birkhäuser Verlag, Basel

Dreiecks-Proportionalschnittkreise, ihre Mittenhyperbel und ein Pendant zum Satz von Morley

Ludwig Stammler, Universität Halle

Ludwig Stammler wurde 1933 geboren. Nach seinem Mathematikstudium und nach einigen Jahren Lehrtätigkeit promovierte er 1965 bei O.-H. Keller an der Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg. An dieser Universität ist er seit 1970 als Dozent tätig. Zur Förderung begabter Schüler übernimmt er regelmässig Arbeiten im Zusammenhang mit der Mathematik-Olympiade. Stammler ist Verfasser von mehreren Arbeiten zur algebraischen und vor allem zur konstruktiven Geometrie.

1 Definitionen und Ergebnisse

I. Als *Proportionalschnittkreis* eines Dreiecks ABC der euklidischen Ebene (mit nichtkollinearen A, B, C) sei jeder Kreis bezeichnet, der von den Trägergeraden g_{BC}, g_{CA}, g_{AB} der Dreiecksseiten BC, CA, AB Sehnen $B'C'$, $C'A'$, $A'B'$ abschneidet, für deren Längen

$$|B'C'| : |C'A'| : |A'B'| = |BC| : |CA| : |AB|$$

gilt. Ist dabei der Proportionalitätsfaktor $|B'C'| : |BC| = |C'A'| : |CA| = |A'B'| : |AB| = \mu$, so werde der Kreis auch *μ-Schnittkreis* genannt. (In dieser Fassung der Definition sei als Grenzfall auch $\mu = 0$ zugelassen.) In den folgenden Abschnitten **2**, **3** wird bewiesen:

Die In-, An- und Umkreise eines Dreiecks bilden ein reizvolles Kapitel der ebenen Geometrie, das auf recht elementarer Stufe zugänglich ist. Diese einfachen Konzepte etwas verallgemeinernd betrachtet Ludwig Stammler in seinem Beitrag sogenannte μ-Kreise. Ein *μ-Kreis* eines Dreiecks ist dadurch definiert, dass er aus den Trägergeraden der Dreiecksseiten Strecken herausschneidet, deren Längen das μ-fache der Längen der entsprechenden Dreiecksseiten betragen. Für $\mu = 0$ ergeben sich so der Inkreis und die Ankreise des Dreiecks. Für $\mu = 1$ erhält man offenbar den Umkreis des Dreiecks, daneben aber noch drei weitere Kreise, die natürlich besonderes Interesse verdienen. Stammler beweist das überraschende Resultat, dass die Mittelpunkte dieser drei Kreise immer ein gleichschenkliges Dreieck bilden und — ebenso überraschend — dass dieses Dreieck nicht mit Zirkel und Lineal konstruierbar ist. *ust*

Satz 1: *Für jedes Dreieck ABC und jedes reelle $\mu \geq 0$ existieren μ-Schnittkreise. Ihre Anzahl ist (mit einer von ABC abhängigen reellen Zahl $m > 1$) in den Fällen $\mu < m$, $\mu = m$, $\mu > m$ gleich* 4 *bzw.* 3 *bzw.* 2.

Eine Motivation, solche Kreise zu betrachten, ergab sich z.B. in [3]–[6] aus der *Extremalaufgabe*, die Flächendifferenz zwischen Dreieck und Kreis (selbst oder im Mittel) zu minimieren. Ferner kann überhaupt zu einer ersten Einordnung des Sachverhalts bemerkt werden:

Seit geschichtlich langer Zeit bekannt sind die vier 0-Schnittkreise (der Inkreis und die Ankreise) sowie ein 1-Schnittkreis (der Umkreis). Außer diesem gibt es nach Satz 1 also — analog wie es außer dem Inkreis die drei Ankreise gibt — *drei weitere Kreise, die von den Trägergeraden der Dreiecksseiten zu diesen Seiten jeweils gleichlange Sehnen abschneiden* (Fig. 1). Allerdings gilt, wie in **5** gezeigt wird:

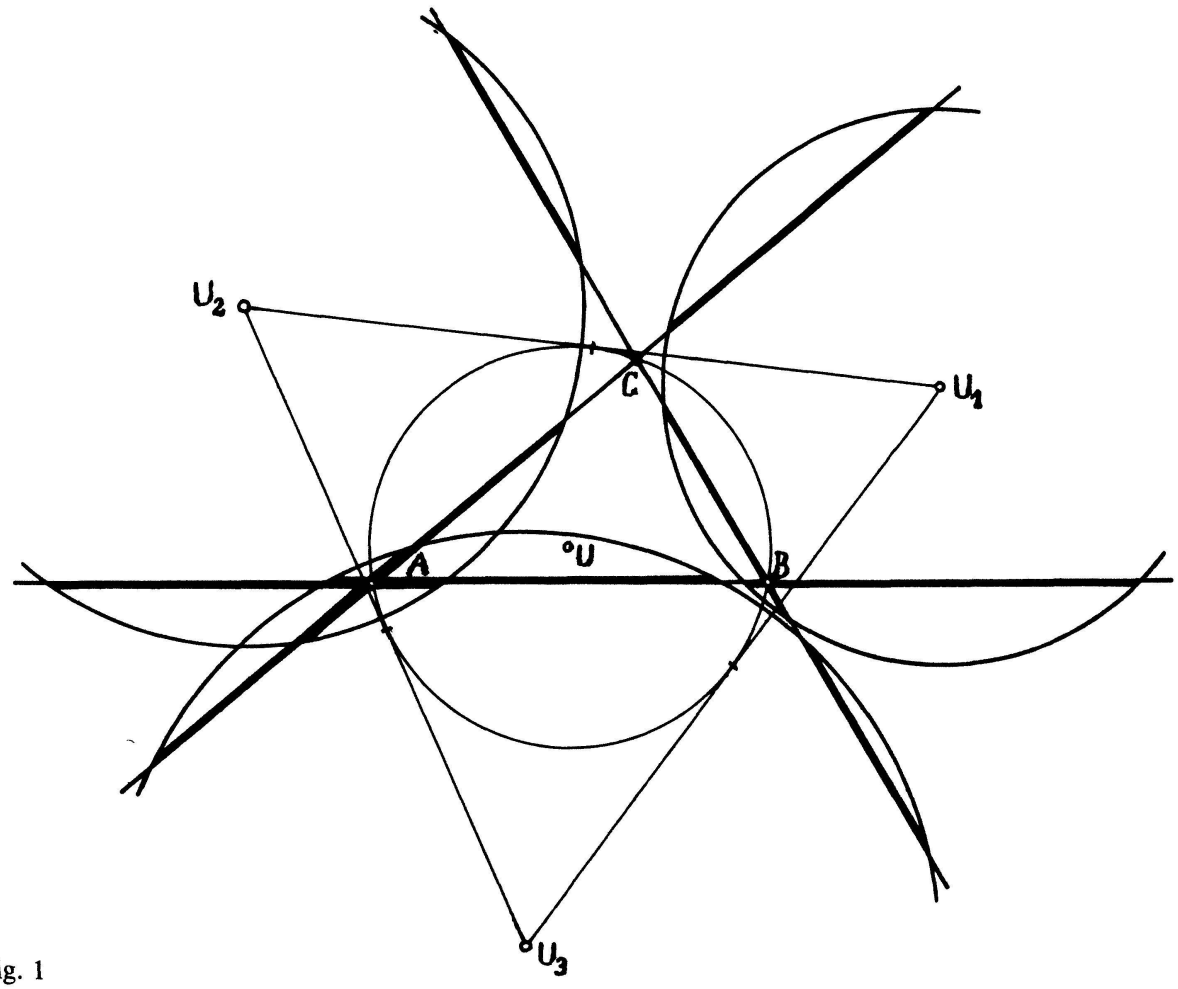

Fig. 1

Korollar 1: *Die μ-Schnittkreise sind (aus gegebenem Dreieck ABC und gegebenem Längenverhältnis μ) im allgemeinen nicht mit Lineal und Zirkel konstruierbar. Das gilt auch, wenn μ mit Lineal und Zirkel konstruierbar ist; insbesondere gilt für $\mu = 1$: Die drei vom Umkreis verschiedenen* 1*-Schnittkreise sind im allgemeinen nicht mit Lineal und Zirkel konstruierbar.*

Daran mag es liegen, ähnlich wie seinerzeit bei dem bekannten merkwürdigen Satz von Morley (s. etwa die Darstellung in [2] und dort genannte Literatur), daß diese drei Kreise bisher kaum oder noch gar nicht — dies dürfte schwer mit Sicherheit nachweisbar sein — beachtet wurden. Dabei weist ihre Konfiguration die folgende Eigenschaft auf (Beweis in **6**), die schon deshalb als recht bemerkenswert bezeichnet werden darf, weil sie ebenso wie der Satz von Morley (oder auch wie der "Satz von Napoleon" — dort allerdings mit Zirkel und Lineal konstruierbar —) zu jedem Dreieck ein gleichseitiges Dreieck aufdeckt:

Satz 2: *Für jedes Dreieck ABC bilden stets die Mittelpunkte U_1, U_2, U_3 der drei vom Umkreis verschiedenen* 1*-Schnittkreise ein gleichseitiges Dreieck, dessen Inkreis identisch ist mit dem Umkreis von ABC.*

II. Über die Mittelpunkte der μ-Schnittkreise beim Durchlaufen aller $\mu \geq 0$ gilt der in Abschnitt **4** bewiesene

Satz 3: *Für jedes nicht gleichschenklige Dreieck ABC ist die Menge $\mathfrak{M}$ aller Mittelpunkte von Proportionalschnittkreisen enthalten in derjenigen Hyperbel $\mathfrak{H}$, die durch den Inkreismittelpunkt W, die Ankreismittelpunkte W_a, W_b, W_c und den Umkreismittelpunkt U geht.*

Diese "Mittenhyperbel" $\mathfrak{H}$ hat folglich ein (aus gegebenem Dreieck ABC) mit Lineal und Zirkel konstruierbares Asymptotenpaar. Weitere Aussagen über $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{H}$ sind:

Korollar 2: *Die Hyperbel $\mathfrak{H}$ ist gleichseitig. Gilt für die Seitenlängen $a = |BC|$, $b = |CA|$, $c = |AB|$ etwa $a < b < c$, so geht ein Ast von $\mathfrak{H}$ durch W_a, W, U, W_c, der andere durch W_b. Die Menge $\mathfrak{M}$ besteht aus genau den folgenden Teilbögen von $\mathfrak{H}$:*

(I) *Der Bogen von W_c (über U) bis W.*

(II) *Der von W_a ins Unendliche reichende, W nicht enthaltende Bogen.*

(III) *Der von W_b ins Unendliche reichende Bogen, der sich derselben Geraden asymptotisch annähert wie der in* (II) *genannte Bogen.*

Korollar 3: *Ist ABC gleichschenklig, etwa mit $a = b$, aber nicht gleichseitig, so entartet $\mathfrak{H}$ zum Paar der Winkelhalbierenden durch C; für $a < c$ bzw. $a > c$ besteht $\mathfrak{M}$ bzw. der Abschluß von $\mathfrak{H} \setminus \mathfrak{M}$ aus der Strecke W_cW und den Strahlen W_aC^-, W_bC^-.*

Ist ABC gleichseitig, so wird $\mathfrak{H}$ mehrdeutig; $\mathfrak{M}$ reduziert sich auf die vier Punkte $W = U$, W_a, W_b, W_c.

2 Ein Hyperbel-Schnittsatz zur Proportionalschnittkreis-Ermittlung

Zum Nachweis von Satz 1 kann man zunächst die (schon in [6] aufgetretene) folgende Feststellung leicht nachrechnen:

Hilfssatz 1: *Gegeben seien zwei nicht zueinander parallele Geraden g_1, g_2 und zwei voneinander verschiedene Längen $k_1 \geq 0$, $k_2 \geq 0$. Die Menge der Mittelpunkte aller derjenigen Kreise, die von g_1 eine Sehne der Länge k_1 und von g_2 eine Sehne der Länge k_2 abschneiden, ist eine Hyperbel, deren Asymptoten die beiden winkelhalbierenden Geraden e_1, e_2 von g_1, g_2 sind.* □

Um diesen Hilfssatz auf die Seitenpaare eines Dreiecks anzuwenden, seien noch folgende Bezeichnungen eingeführt: Ist $\mu > 0$ und ABC ein nicht gleichschenkliges Dreieck, so bezeichne $U(\mu)_A$ denjenigen Punkt, für den $\overrightarrow{AU(\mu)_A} = \mu \cdot \overrightarrow{AU}$ gilt, und $\mathfrak{h}(\mu)_A$ bezeichne die durch $U(\mu)_A$ gehende Hyperbel mit der Innen- und Außenwinkelhalbierenden des Winkels bei A als Asymptoten. Ebenso mit zyklischer Vertauschung von A, B, C seien $U(\mu)_B$, $\mathfrak{h}(\mu)_B$ und $U(\mu)_C$, $\mathfrak{h}(\mu)_C$ definiert.

Man kann nun die Mengen- ("geometrische Orts"-) Charakterisierung aus Hilfssatz 1 zu derselben Schlußweise heranziehen, wie sie seit alters für die Herleitung des Schnittverhaltens der Winkelhalbierenden bzw. Mittelsenkrechten bekannt ist: Da der Kreis um $U(\mu)_A$ durch A die Eigenschaft hat, von den Geraden g_{AC}, g_{AB} Sehnen der Längen $\mu \cdot b$, $\mu \cdot c$ abzuschneiden, ist $\mathfrak{h}(\mu)_A$ die Menge der Mittelpunkte aller Kreise mit dieser Eigenschaft. Aus dieser Aussage und den beiden durch zyklische Vertauschung von A, B, C entstehenden Aussagen folgt dann der doppelte Sachverhalt:

Satz 4: (I) *Jeder gemeinsame Punkt (Schnitt- oder Berührungspunkt) von zwei der Hyperbeln $\mathfrak{h}(\mu)_A$, $\mathfrak{h}(\mu)_B$, $\mathfrak{h}(\mu)_C$ liegt auch auf der dritten.*

(II) *Alle so vorhandenen gemeinsamen Punkte der drei Hyperbeln sind genau alle (zu gegebenem ABC mit $a < b < c$ und gegebenem $\mu > 0$ vorhandenen) Mittelpunkte von μ-Schnittkreisen.* □

Auf die bisher ausgeschlossenen Fälle, daß $\mu = 0$ gilt oder ABC gleichschenklig ist, läßt sich Satz 4 übertragen, indem man sinngemäß alle oder einige der Hyperbeln durch Geradenpaare ersetzt, bestehend aus jeweils zusammengehörenden Innen- und Außenwinkelhalbierenden.

3 Anzahl- und Lagediskussion

Nach Satz 4 gilt für die Anzahl $z(\mu)$ der μ-Schnittkreise eines Dreiecks mit $a < b < c$ jedenfalls $z(\mu) \leq 4$. Zum Nachweis der weiteren Aussagen in Satz 1 betrachten wir zunächst die speziellen Hyperbeln $\mathfrak{h}_A := \mathfrak{h}(1)_A$, $\mathfrak{h}_B := \mathfrak{h}(1)_B$, $\mathfrak{h}_C := \mathfrak{h}(1)_C$ (Fig. 2).

Hilfssatz 2: *Die Mittelsenkrechte von BC ist die in U an $\mathfrak{h}_A$ gelegte Tangente.*

Beweis: Im Dreieck $W_a W_b W_c$ sind bekanntlich W, A, B, C der Höhenschnittpunkt bzw. die Höhenfußpunkte; der Umkreis von ABC ist der Feuerbachkreis von $W_a W_b W_c$. Mit dessen bekannten Eigenschaften hat man weiter: Die Verbindungsstrecke QT des Mittelpunktes Q von $W_b W_c$ und des Mittelpunktes T von $W W_a$ ist ein Durchmesser des Umkreises von ABC, und sie ist in der Mittelsenkrechten von BC enthalten. Aus dieser wird folglich von den Asymptoten der Hyperbel $\mathfrak{h}_A$ die durch U halbierte Strecke QT ausgeschnitten; damit ist sie als die genannte Tangente charakterisiert. □

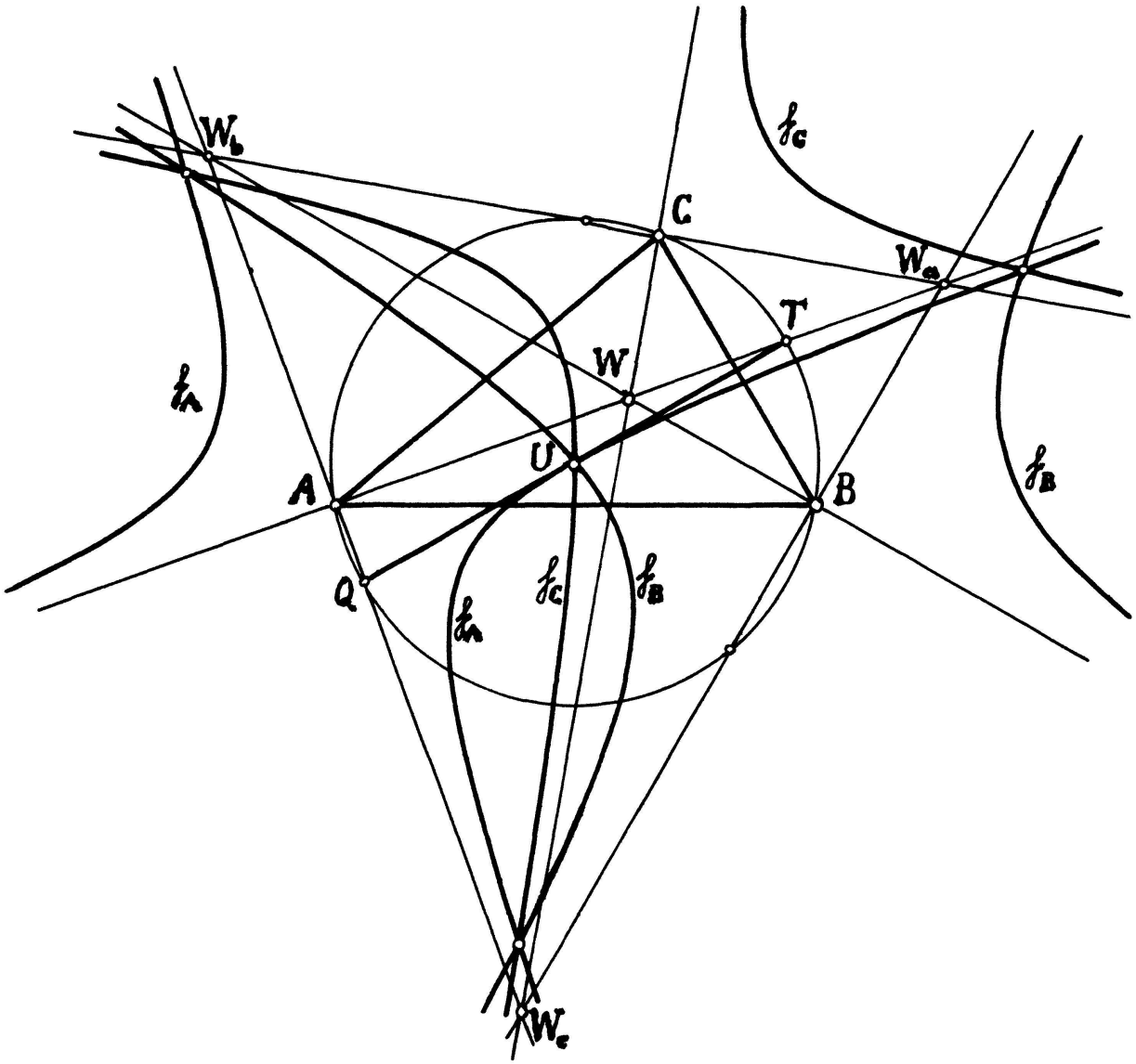

Fig. 2

Berücksichtigt man weiter für je eine Innenwinkelhalbierende, daß sie die Gegenseite im Verhältnis der anliegenden Seiten teilt und daß sie sich — wie eben bereits verwendet — mit der Mittelsenkrechten der Gegenseite auf dem Umkreis schneidet, so folgt aus $a < b < c$: Der Umkreismittelpunkt U liegt im Innern des Dreiecks AWW_c. Unter Nutzung von Hilfssatz 2, auch mit zyklischer Vertauschung von A, B, C, sowie von Stetigkeits-, Monotonie- und Asymptoteneigenschaften der Hyperbeln ergibt sich

Hilfssatz 3: (I) *Die Hyperbeln $\mathfrak{h}_A$, $\mathfrak{h}_B$, $\mathfrak{h}_C$ haben je einen Ast in den konvexen Winkelflächen $\sphericalangle W_aAW_c$, $\sphericalangle W_bBW_c$ bzw. $\sphericalangle W_bCW_c$. Dabei gehen $\mathfrak{h}_A$, $\mathfrak{h}_B$ mit voneinander verschiedenen Tangentialrichtungen durch U und haben folglich im Dreieck AWW_c $(= \sphericalangle W_aAW_c \cap \sphericalangle W_bBW_c \cap W_bCW_c)$ außer U noch genau einen zweiten Schnittpunkt.*

(II) *Ferner haben $\mathfrak{h}_A$, $\mathfrak{h}_B$, $\mathfrak{h}_C$ je einen Ast in den konvexen Winkelflächen $\sphericalangle(AW_a^-, AW_b^+)$, $\sphericalangle W_bBW_c$ bzw. $\sphericalangle W_bCW_c$. In deren Durchschnitt (begrenzt von der Strecke AW_b und den Strahlen AW_a^-, W_bC^-) liegt genau ein weiterer Schnittpunkt der drei Hyperbeln.*

(III) *Sie haben je einen Ast in* $\sphericalangle W_aAW_c$, $\sphericalangle(BW_b^-, BW_a^+)$ *bzw.* $\sphericalangle(CW_a^+, CW_c^-)$ *und damit im Durchschnitt* $\sphericalangle(W_aA^-, W_aC^-)$ *dieser drei Winkelflächen ebenfalls genau einen weiteren Schnittpunkt.* □

Überführt man nun $\mathfrak{h}_A$ bzw. $\mathfrak{h}_B$ durch Streckungen mit den Zentren A bzw. B und einheitlichem Streckfaktor $\mu > 0$ in $\mathfrak{h}(\mu)_A$ bzw. $\mathfrak{h}(\mu)_B$, so zeigt sich, nochmals wegen der Stetigkeits-, Monotonie- und Asymptoteneigenschaften:

Hilfssatz 4: *Es gibt eine Zahl* $m > 1$, *für die beim Übergang zu* $\mathfrak{h}(m)_A$, $\mathfrak{h}(m)_B$ *die in Hilfssatz* 3 (I) *genannten zwei Schnittpunkte zu einem Berührungspunkt zusammenfallen. Mit dieser Zahl* m *gilt ferner: Für jedes positive* $\mu < m$ *haben die in* $\sphericalangle W_aAW_c$, $\sphericalangle W_bBW_c$ *liegenden Äste von* $\mathfrak{h}(\mu)_A$, $\mathfrak{h}(\mu)_B$ *genau zwei Schnittpunkte, für jedes* $\mu > m$ *meiden sie sich.*

Die in Hilfssatz 3 (II), (III) *genannten Schnittpunkte gehen für jedes positive* μ *in je genau einen Schnittpunkt von* $\mathfrak{h}(\mu)_A$, $\mathfrak{h}(\mu)_B$, $\mathfrak{h}(\mu)_C$ *über.* □

Damit ist Satz 1 bewiesen.

4 Die Mittenhyperbel; ein zweiter Hyperbel-Schnittsatz

I. Eine notwendige Bedingung für die Mittelpunkte aller μ-Schnittkreise ist durch Elimination von μ zu erhalten. Satz 4 ermöglicht diese Elimination durch Anwendung der folgenden — auch für sich als Satz über Scharen von Mittelpunktskegelschnitten bemerkenswerten — Aussage:

Hilfssatz 5: *Es seien* $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_2$ *zwei voneinander verschiedene, nicht entartete Kegelschnitte mit Mittelpunkten* M_1 *bzw.* M_2. *Für jedes* $\mu \geq 0$ *gehe* $\mathfrak{C}_j$ *bei der Streckung mit dem Zentrum* M_j *und dem Streckfaktor* μ *über in* $\mathfrak{C}(\mu)_j$ $(j = 1,2)$. *(Für eine Ellipse bzw. Hyperbel* $\mathfrak{C}_j$ *sei im Grenzfall* $\mu = 0$ *der zum Mittelpunkt bzw. Asymptotenpaar von* $\mathfrak{C}_j$ *entartete Kegelschnitt als* $\mathfrak{C}(0)_j$ *verstanden.) Dann existiert ein Kegelschnitt* $\mathfrak{H}$, *der alle Durchschnitte* $\mathfrak{C}(\mu)_1 \cap \mathfrak{C}(\mu)_2$ $(\mu \geq 0)$ *enthält.*

Beweis: In einem x,y-Koordinatensystem hat $\mathfrak{C}_j$ eine Gleichung $f_j(x,y) = 1$, wo zur Abkürzung

$$f_j(x,y) = a_j \cdot (x - x_j)^2 + b_j \cdot (x - x_j) \cdot (y - y_j) + c_j \cdot (y - y_j)^2$$

gesetzt wurde ($(x_j; y_j) = M_j$; a_j, b_j, c_j konstant; $j = 1,2$). Für jedes $\mu > 0$ hat folglich $\mathfrak{C}(\mu)_j$ die Gleichung

$$\frac{1}{\mu^2} \cdot f_j(x,y) = 1. \tag{1}$$

Jeder Punkt $(x;y)$, zu dem ein $\mu > 0$ so existiert, daß $(x;y)$ dem Durchschnitt $\mathfrak{C}(\mu)_1 \cap \mathfrak{C}(\mu)_2$ angehört, erfüllt daher beide (mit diesem μ) für $j = 1,2$ gebildeten Gleichungen (1) und somit auch die Gleichung

$$f_1(x,y) = f_2(x,y);$$

dies ist die Gleichung eines Kegelschnittes $\mathfrak{H}$. Aus Stetigkeitsgründen enthält $\mathfrak{H}$ auch $\mathfrak{C}(0)_1 \cap \mathfrak{C}(0)_2$. □

Wendet man Hilfssatz 5 etwa mit $\mathfrak{C}_1 = \mathfrak{h}_A$, $\mathfrak{C}_2 = \mathfrak{h}_B$ an, so erhält man, wie in Satz 3 behauptet, die Existenz eines Kegelschnittes $\mathfrak{H}$, der alle Mittelpunkte von Proportionalschnittkreisen enthält, insbesondere durch U, W, W_a, W_b, W_c geht. Die Betrachtungen zu Hilfssatz (3 und) 4 über Existenz und Lage von Schnittpunkten der $\mathfrak{h}(\mu)_A$, $\mathfrak{h}(\mu)_B$, $\mathfrak{h}(\mu)_C$ lassen den Kegelschnitt $\mathfrak{H}$ auch sogleich als — möglicherweise zum Geradenpaar entartete — Hyperbel mit Teilbögen $\mathfrak{M}$ erkennen, wie in Korollar 2 und 3 behauptet.

II. Insbesondere kann man eine Asymptotenrichtung von $\mathfrak{H}$ (und damit wegen der sogleich in **III.** zu zeigenden Gleichseitigkeit von $\mathfrak{H}$ auch beide) erhalten, ähnlich wie in **3** zusammen mit einem Hyperbel-Schnittsatz. Verbindet man nämlich irgend einen konstanten Punkt X mit den zwei in Hilfssatz 4 (II), (III) betrachteten Schnittpunkten der $\mathfrak{h}(\mu)_A$, $\mathfrak{h}(\mu)_B$, $\mathfrak{h}(\mu)_c$ und läßt μ gegen ∞ gehen, so gehen die Richtungen der Verbindungsstrecken in eine Asymptotenrichtung von $\mathfrak{H}$ über. Stattdessen kann man für $X = A$ auch $\mathfrak{h}_A$ fest lassen, ABC durch Stauchungen mit $\lambda = \frac{1}{\mu} \to 0$ in A überführen sowie entsprechend auch für $X = B$ und für $X = C$ vorgehen. Damit erhält man wieder als doppelten Sachverhalt:

Satz 5: *Es seien ν_j ($j = 1,2,3$) drei Verschiebungen, die ABC so in $A_jB_jC_j$ abbilden, daß $A_1 = B_2 = C_3$ gilt; bei ν_j sei jeweils $\mathfrak{h}_j$ das Bild von $\mathfrak{h}_A$ bzw. $\mathfrak{h}_B$ bzw. $\mathfrak{h}_C$ (Fig. 3). Dann gilt:*

(I) *Die beiden Schnittpunkte Y, Y' von zwei der Hyperbeln $\mathfrak{h}_1$, $\mathfrak{h}_2$, $\mathfrak{h}_3$ liegen auch auf der dritten.*

(II) *Die Richtung der (von $X = A_1 = B_2 = C_3$ halbierten) Strecke YY' ist eine Asymptotenrichtung von $\mathfrak{H}$.* □

III. Zur weiteren Betrachtung sei dasjenige rechtwinklige x,y-Koordinatensystem eingeführt, in dem

$$W_b = (p;0),\ A = (0;0),\ W_c = (q;0),\ W = (0;s),\ W_a = (0;t) \tag{2}$$

mit reellen Zahlen

$$p < 0 < q, \quad 0 < s < t \tag{3}$$

gelten, wobei (aus (2) schon $AW_a \perp W_bW_c$ folgt und) die noch fehlenden Bedingungen $BW_b \perp W_cW_a$, $CW_c \perp W_aW_b$ äquivalent zu

$$pq + st = 0 \tag{4}$$

sind. Darin ist mit den Abkürzungen $P := \frac{1}{4}(p+q)$, $S := \frac{1}{4}(s+t)$

$$U = (P;S), \tag{5}$$

wie z.B. aus der bereits im Beweis zu Hilfssatz 2 verwendeten Kennzeichnung von U als Mittelpunkt der Strecke QT folgt. Außer $S > 0$ gilt $P \neq 0$, wenn ABC (nicht gleichschenklig ist oder wenigstens) $b \neq c$ erfüllt.

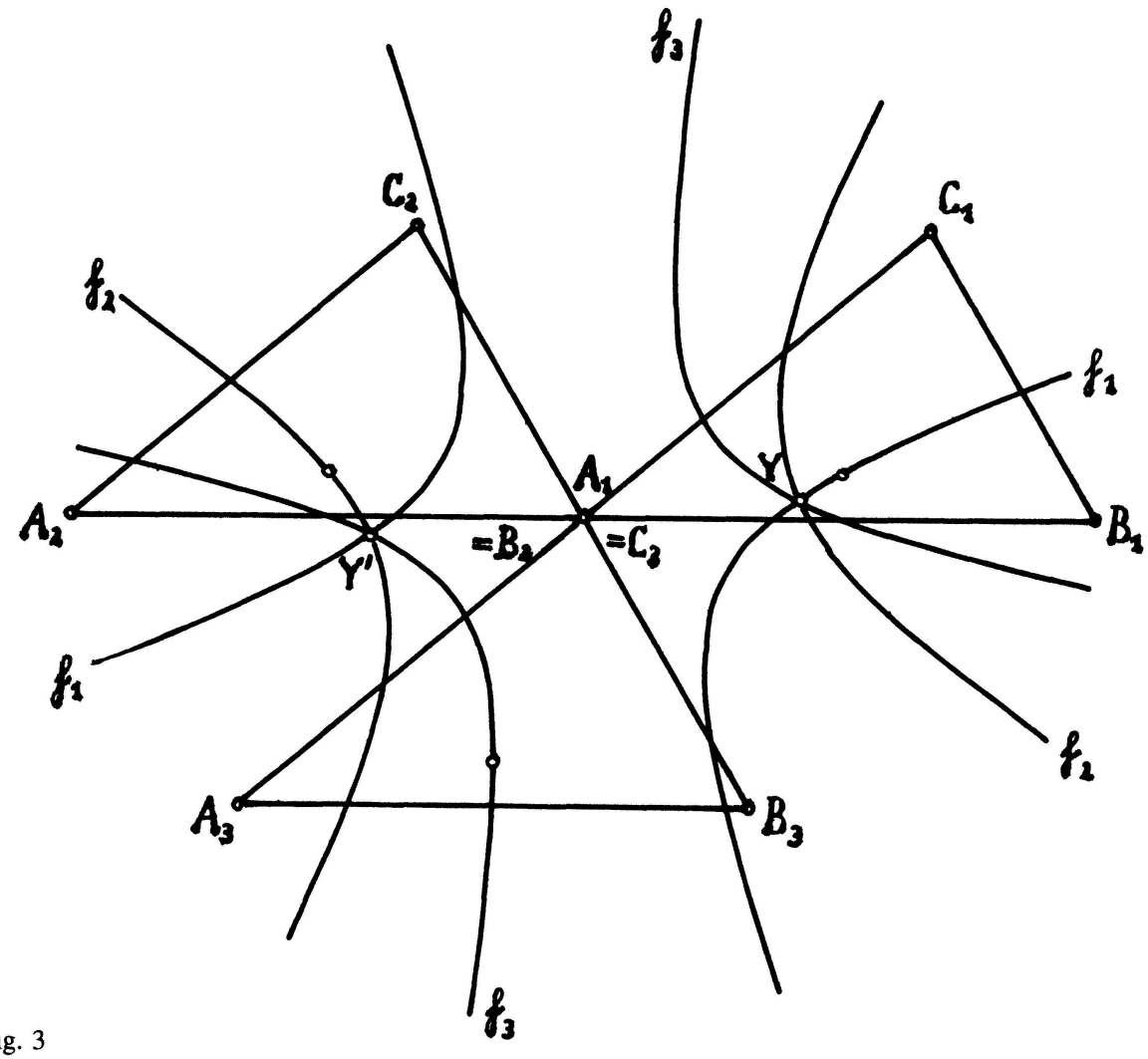

Fig. 3

Unter Beachtung von (4) bestätigt man: Die Punkte W, W_a, W_b, W_c, U liegen auf dem — damit als $\mathfrak{H}$ erkannten — Kegelschnitt

$$x^2 + \frac{3 \cdot (P^2 - S^2) - 16pq}{P \cdot S} \cdot xy - y^2 - Px + Sy + pq = 0. \tag{6}$$

Ist ABC nicht gleichschenklig ($a < b < c$), so gilt $U \in AWW_c$ (Beweis zu Hilfssatz 3), und keine drei der fünf Punkte W, W_a, W_b, W_c, U sind kollinear. Damit und wegen der Koeffizienten 1, -1 bei x^2, y^2 in (6) ist $\mathfrak{H}$ als gleichseitige Hyperbel erkannt, und die Aussagen von Satz 3 mit Korollar 2 und 3 sind bewiesen.

5 Diskussion zur Konstruierbarkeit mit Lineal und Zirkel

Zum Nachweis von Korollar 1 in gleichem elementaren Vorgehen wie etwa in [1] (s. dort 4.3.3. und 4.4.) genügen Irreduzibilitätsaussagen in Beispielen folgender Art:

Hilfssatz 6: (I) *Für das in* (2), (3), (4) *beschriebene Dreieck* ABC *mit*

$$p = -1,\ q = 2,\ s = 1,\ t = 2 \tag{7}$$

führt die Ermittlung der drei vom Umkreis verschiedenen 1*-Schnittkreise auf eine über dem Körper* $\mathbb{Q}$ *der rationalen Zahlen irreduzible Gleichung 3. Grades.*

(II) *Für dasselbe Dreieck führt die Ermittlung der vier* 1/2*-Schnittkreise auf eine über* $\mathbb{Q}$ *irreduzible Gleichung 4. Grades.*

Beweis: Die Winkelhalbierenden durch A bzw. durch B sind das Geradenpaar $x = 0$, $y = 0$ bzw. das Geradenpaar $x/p+y/s = 1$, $x/q+y/t = 1$, speziell für (7) also $-x+y = 1$, $x+y = 2$. Der Schnittpunkt dieses Geradenpaares ist $B = (1/2;\ 3/2)$; nach (5), (7) ist $U = (1/4;\ 3/4)$; damit erhält man $U(1/2)_A = (1/8;\ 3/8)$ und $U(1/2)_B = (3/8;\ 9/8)$.

Hiernach sind die Mittelpunkte der 1-Schnittkreise die Schnittpunkte der Hyperbeln

$$x \cdot y = \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4}, \quad (x+y-1) \cdot (x+y-2) = \left(-\frac{1}{4} + \frac{3}{4} - 1\right) \cdot \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{4} - 2\right), \tag{8}$$

und die Mittelpunkte der 1/2-Schnittkreise sind die Schnittpunkte der Hyperbeln

$$x \cdot y = \frac{1}{8} \cdot \frac{3}{8}, \quad (-x+y-1) \cdot (x+y-2) = \left(-\frac{3}{8} + \frac{9}{8} - 1\right) \cdot \left(\frac{3}{8} + \frac{9}{8} - 2\right). \tag{9}$$

Nach Elimination von y und Substitution von $z = 4x$ bzw. von $z = 8x$ erhält man aus (8) bzw. (9)

$$z^4 - 4z^3 - 24z^2 + 36z - 9 = 0 \tag{10}$$

bzw.

$$z^4 - 8z^3 - 120z^2 + 72z - 9 = 0. \tag{11}$$

Aus (10) kann man noch den (zur Lösung U führenden) Linearfaktor $z - 1$ abspalten; danach verbleibt

$$z^3 - 3z^2 - 27z + 9 = 0. \tag{12}$$

Da sowohl (11) als (12) keinen der Teiler ± 1, ± 3, ± 9 von 9 (zu (12) im Ring $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen, zu (11) im Ring $\mathbb{Z}[i]$ verstanden) als Lösung haben, sind sie als irreduzibel erkannt; Hilfssatz 6 und folglich Korollar 1 sind damit bewiesen.□

Das Dreieck ABC mit (7) ist übrigens rechtwinklig, da U auf AB liegt. Die Aussagen über Nichtkonstruierbarkeit gelten also sogar auch dann, wenn ABC als rechtwinklig vorausgesetzt wird.

Natürlich gibt es auch Fälle konstruierbarer Proportionalschnittkreise, auch mit anderen Werten als $\mu = 0$ oder $\mu = 1$. Ist μ (aus der Zahl 1) konstruierbar, so trifft dies z.B. für alle gleichschenkligen Dreiecke zu — man vergleiche die analoge Feststellung in [3]. Wie dort ergeben sich insbesondere für gleichschenklig-rechtwinklige Dreiecke ABC besonders sinnfällige Ergebnisse, z.B. wird die Anzahl $z(m) = 3$ (siehe Satz 1 und Hilfssatz 4) mit $m = \sqrt{2}$ durch drei *zueinander kongruente* Kreise erreicht, deren Mittelpunkte dasjenige Dreieck bilden, das die Punkte A, B, C als Seitenmitten hat.

6 Das gleichseitige Dreieck der Mittelpunkte von 1-Schnittkreisen

Ein Beweis von Satz 2 kann folgendermaßen rechnerisch geführt werden: Wie in (8) sind allgemein bei den Vorgaben (2) mit (3), (4), (5) die Mittelpunkte der 1-Schnittkreise die Schnittpunkte der Hyperbeln

$$xy = \frac{1}{16}(p+q)(s+t),$$

$$\left(\frac{x}{p}+\frac{y}{s}-1\right)\cdot\left(\frac{x}{q}+\frac{y}{t}-1\right) = \left(\frac{p+q}{4p}+\frac{s+t}{4s}-1\right)\cdot\left(\frac{p+q}{4q}+\frac{s+t}{4t}-1\right).$$

Nach Elimination von y und Abspalten des (zur Lösung $U = (P;S) = (\frac{p+q}{4};\frac{s+t}{4})$ führenden) Faktors $x-P$ sowie unter Berücksichtigung von (4), nämlich nach Division durch pq $(= -st)$, folgt: Die Mittelpunkte U_j $(j = 1,2,3)$ der vom Umkreis verschiedenen 1-Schnittkreise sind die Punkte

$$U_j = \left(x_j; \frac{PS}{x_j}\right), \tag{13}$$

worin x_1, x_2, x_3 die Lösungen der Gleichung

$$x^3 - 3Px^2 - 3S^2x + PS^2 = 0 \tag{14}$$

sind. Aus (14) folgt durch Multiplikation mit $(x+P) : x^2$

$$(x-P)^2 + \left(\frac{PS}{x} - S\right)^2 = 4(P^2+S^2),$$

also liegen alle drei Punkte U_j auf demjenigen Kreis um U, dessen Radius $2\cdot\sqrt{P^2+S^2}$ nach (2), (5) gleich dem zweifachen Umkreisradius von ABC ist. — Zu zeigen ist noch

$$|U_1U_2| = |U_1U_3|, \quad |U_2U_3| = |U_2U_1|, \quad |U_3U_1| = |U_3U_2|. \tag{15}$$

Wegen (13) ist (15) äquivalent damit, daß das Tripel $(x_1;\, x_2;\, x_3)$ die Bedingung erfüllt, sowohl Nullstelle des Polynoms

$$T_1 = X_1X_2^2X_3^2(X_2+X_3-2X_1) - P^2S^2(X_1X_2+X_1X_3-2X_2X_3)$$

als auch Nullstelle der durch zyklische Vertauschung von 1, 2, 3 definierten T_2, T_3 zu sein. Um dies zu beweisen, kann man die Polynome $\Theta_1 = T_1+T_2+T_3$, $\Theta_2 = T_1T_2+T_1T_3+T_2T_3$, $\Theta_3 = T_1T_2T_3$ bilden. Sie sind symmetrisch in X_1, X_2, X_3, lassen sich also als Polynome der elementarsymmetrischen Terme $\xi_1 = X_1+X_2+X_3$, $\xi_2 = X_1X_2+X_1X_3+X_2X_3$, $\xi_3 = X_1X_2X_3$ darstellen. Führt man diese (etwas umfangreiche) Rechnung aus und nimmt dann gemäß (14) die Substitution $\xi_1 = 3P$, $\xi_2 = -3S^2$, $\xi_3 = -PS^2$ vor, so gehen in der Tat Θ_1, Θ_2, Θ_3 identisch in 0 über; also verschwinden T_1, T_2, T_3 für das Tripel der Lösungen x_j von (14).

Damit ist Satz 2 bewiesen. Abschließend sei nicht versäumt, die Frage aufzuwerfen, ob sich auch ein mehr (synthetisch-) geometrischer Beweis finden läßt. Jedenfalls ist es möglich, aus bekannten trigonometrischen Lösungsformeln der kubischen Gleichung (14) auch Konstruktionsmöglichkeiten für die Punkte U_j herzuleiten (wobei eine Winkeldreiteilung heranzuziehen ist und übrigens ähnlich einfach wie oben $|UU_j| = 2\cdot\sqrt{P^2+S^2}$ erhalten werden kann). Doch sei auf genauere Ausführungen hierzu nicht mehr eingegangen.

Literatur

[1] Böhm, J. et al.: Geometrie II (Studienbücherei Mathematik für Lehrer, Bd. 7). Deutscher Verlag der Wissenschaften Berlin 1975.

[2] Coxeter, H.S.M.: Unvergängliche Geometrie. Birkhäuser Verlag Basel und Stuttgart 1963.

[3] Stammler, L.: Der Kreis mit minimaler Flächendifferenz zum Dreieck. Elemente der Mathematik 33 (1978), Nr. 6, 143–152.

[4] Stammler, L. und B. Weissbach: Halbierungssätze zur Gestaltabweichung ebener Figuren. Beiträge zur Algebra und Geometrie 8 (1979), 55–65.

[5] Stammler, L. und U. Matte: Stetigkeitsaussagen zur Diskussion des Schnittverhaltens einer Ovalenschar mit einem Oval. Beiträge zur Algebra und Geometrie 9 (1980), 149–159.

[6] Stammler, L.: Optimierung konstant belegter Ovale und ein Hyperbel-Schnittsatz. Beiträge zur Algebra und Geometrie 29 (1989), 21–34.

Ludwig Stammler
Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg
Fachbereich Mathematik und Informatik
Postfach
D O-4010 Halle (Saale)