Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 48 (1993)

Artikel: Mathématiques et politique
Autor: Carnal, Henri
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-44623

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 13.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

El. Math., *48*, (1993)

0013-6018/93/010027-06$1.50 + 0.20/0
© 1993 Birkhäuser Verlag, Basel

Mathématiques et politique

Henri Carnal

Henri Carnal, né en 1939, a obtenu son doctorat en 1963 à l'École Polytechnique Fédérale (ETH) de Zurich. Après des séjours à Vienne, Paris et New York, il a été nommé en 1966 professeur à l'Université de Berne, où il enseigne en particulier le calcul des probabilités. Il a dirigé à plusieurs reprises des stages destinés aux enseignants dans le domaine des mathématiques appliquées et des probabilités.

Introduction

L'enseignement des mathématiques s'entend souvent reprocher d'être à l'écart du monde. L'actualité offre cependant à un maître attentif l'une ou l'autre occasion d'illustrer les théories qu'il est chargé d'inculquer à ses ouailles. Nous présentons ici deux exemples de situations bien réelles où un modèle mathématique aurait été d'une certaine utilité, voire d'une utilité certaine. Ils concernent des domaines particulièrement sensibles de la politique, à savoir le calcul du taux d'inflation (qui détermine l'adaptation des salaires) et le mode de répartition des sièges dans les parlements régionaux ou nationaux. Dans l'un et l'autre cas, il s'agit de trouver une formule qui donne des garanties minimales de cohérence et de stabilité; les idées les plus naturelles ne sont pas toujours les meilleures et nous verrons avec le premier exemple que même le très sérieux OFIAMT (Office

Die Addition an der Ladenkasse und die Zinsrechnung bei der Bank sind nicht die einzigen Orte, wo die Mathematik ganz direkt ins tägliche Leben eingreift; zwei weitere, tiefer reichende Beispiele kommen hier zur Sprache: die Sitzverteilung bei Proporzwahlen und die Berechnung des Lebenskostenindex. Beides beansprucht natürlich besondere Sorgfalt, hängt doch die "gerechte" politische Vertretung des Wählers und die "gerechte" Berücksichtigung der Teuerung im Gehalt davon ab. Mathematisch erwartet man dabei eigentlich keine ernsthaften Probleme. In seinem Beitrag zeigt Henri Carnal, wie trotzdem in unserem Land auf Grund von Entscheiden von Politikern und Verwaltungsfachleuten untragbare Verzerrungen zustande gekommen sind. Die mathematische Seite ist offensichtlich komplizierter — und auch interessanter — als es auf den ersten Blick den Anschein macht. *ust*

fédéral pour l'industrie, les arts & métiers et le travail) s'est naguère laissé prendre au piège d'un raisonnement trop simpliste.

En ce qui concerne les élections législatives, chacun saisit facilement le sens approximatif de l'article 73 de la Constitution helvétique: "Les élections ... ont lieu d'après le principe de la proportionnalité". Mais combien de citoyens savent-ils que, derrière cette simple formule, se cache l'article 40 de la *Loi fédérale sur les droits politiques*, qui dit ceci:

1. Le nombre de suffrages valables de toutes les listes est divisé par le nombre de mandats à distribuer. Le résultat est le *quotient*.
2. Chaque liste se voit attribuer autant de mandats que son nombre total de suffrages contient de fois ce quotient.
3. Les mandats non attribués sont répartis selon le mode suivant: le total de suffrages obtenu par chaque liste est divisé par le nombre plus un des mandats déjà attribués à cette liste. Un mandat supplémentaire est attribué à la liste qui obtient le plus fort quotient.
4. Cette opération est répétée jusqu'au moment où tous les mandats ont été attribués.

Cette procédure, mise au point en 1882 par le mathématicien belge Victor d'Hondt, répond à un critère de "probabilité maximale", ce qui contribue à la rendre "robuste" et à éviter les paradoxes auxquels on se heurte en appliquant naïvement la méthode "du plus grand reste.". Elle peut aussi se généraliser pour répondre à des exigences nouvelles, p. ex. celle d'une représentation féminine minimale.

De tels exemples, présentés à les lycéens, devraient contribuer à mettre en évidence les liens souvent insoupçonnés entre mathématiques et politique.

1 L'indice des prix et l'inégalité de Jensen

Le calcul de l'indice des prix, qu'il soit général ou sectoriel (habillement, nourriture, produits laitiers, etc.), exige tout d'abord l'existence d'un "panier de la ménagère". Il s'agit d'un ensemble $E = \{1, 2, \ldots, k\}$ de produits, auxquels on attribue des poids $p_1, \ldots, p_k$ de somme 1 ($p_i = 0,02$ signifie p. ex. qu'un ménage consacre en moyenne 2% de ses dépenses au produit i). On peut donc parler d'un "espace de probabilité", sur lequel apparaissent des variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots, X_n$: $X_n(i)$ est le prix du produit i au bout du n-ième mois d'observation. Le taux de renchérissement de cet article au cours du n-ième mois est donc

$$T_n(i) = X_n(i)/X_{n-1}(i). \tag{1.1}$$

Comment faut-il, à partir de là, calculer le taux global de renchérissement et l'indice général des prix? En 1977, notre OFIAMT avait proposé

$$t_n = E(T_n) = \sum_{i=1}^{k} p_i T_n(i) \tag{1.2}$$

pour le taux global et la formule de récurrence $I_n = I_{n-1} t_n$, c'est-à-dire

$$I_n = t_1 t_2 \ldots t_n \tag{1.3}$$

pour l'indice général. Le défaut du système se révèle avec l'exemple suivant:

a) Prenons $k = 2$, $p_1 = p_2 = 0.5$, $X_0(1) = X_0(2) = 1$.

b) Supposons $X_1(1) = 1.5$ et $X_1(2) = 0.5$, donc $T_1(1) = 1.5$, $T_1(2) = 0.5$, $I_1 = t_1 = 1$.

c) Supposons encore $X_2(1) = X_2(2) = 0.75$, donc $T_2(1) = 0.5$, $T_2(2) = 1.5$, $I_2 = t_2 = 1$.

On constate que l'indice général n'a pas bougé, alors que chacun des produits a baissé de 25%! On peut évidemment prétendre que l'exemple est totalement artificiel et qu'une erreur de la forme présentée sera tôt ou tard compensée par une erreur de sens opposé. Ce bel optimisme est rapidement mis en défaut par l'*inégalité de Jensen*. En tenant compte de la concavité de la fonction $\ln(x)$ et de $E(T_n - t_n) = 0$, on obtient en effet:

$$\ln T_n(i) \leq \ln t_n + t_n^{-1}(T_n(i) - t_n) \tag{1.4}$$

$$E(\ln T_n) = E(\ln X_n - \ln X_{n-1}) \leq \ln t_n \tag{1.5}$$

$$E(\ln(X_N / X_0)) = E(\ln X_N - \ln X_0) = \sum_{n=1}^{N} E(\ln T_n) \leq \sum_{n=1}^{N} \ln t_n = \ln I_N. \tag{1.6}$$

Si donc, comme dans notre exemple, le quotient X_N / X_0 est une constante C (et même si ce n'est qu'à peu près le cas), si donc tous les produits ont augmenté dans les mêmes proportions, on aura $\ln C \leq \ln I_N$ et donc $I_N \geq C$: l'indice sera *systématiquement* trop élevé. Dans la réalité, il fallut plusieurs années pour s'apercevoir de l'erreur: ce furent les producteurs de fruits et légumes qui s'étonnèrent les premiers de voir leur indice sectoriel atteindre la valeur 1.3 (30% de renchérissement) alors que les prix réels étaient presque restés stables. L'explication tient au fait que le secteur en question est très hétérogène, c'est-à-dire que les variations mensuelles (les T_n) diffèrent fortement d'un article à l'autre, alors que les variations annuelles dépendent peu de i. On trouve plus précisément, en développant $\ln T_n$ jusqu'au terme d'ordre 2:

$$\ln T_n \simeq \ln t_n + t_n^{-1}(T_n - t_n) - \frac{1}{2} t_n^{-2}(T_n - t_n)^2 \tag{1.7}$$

$$E(\ln T_n) \simeq \ln t_n - \frac{1}{2} t_n^{-2} \operatorname{Var}(T_n). \tag{1.8}$$

L'erreur est donc du même ordre de grandeur que la variance de T_n, elle se manifeste par conséquent plus vite dans un domaine comme celui des fruits et légumes. Inutile de dire que l'OFIAMT dut rapidement revenir à la formule $I_N = E(X_N) / (E(X_0)$, qui n'évite pas la référence à X_0.

2 La répartition proportionnelle et la loi multinomiale

La difficulté, dans l'application du principe de proportionnalité, tient au fait qu'on ne saurait diviser les sièges et qu'il faut donc arrondir les nombres fractionnaires obtenus. Mais selon quels critères? Voici un exemple pour illustrer les dangers du critère naturel "du plus grand reste": Essayons de répartir 4 sièges entre 3 partis ayant récolté 55, 33 et 12% des voix. Les restes après division par 25 étant 5, 8 et 12, ils justifieraient la répartition 2;1;1. Imaginons alors qu'une évolution démographique favorable amène un

5e siège à la circonscription en cause, sans que les forces respectives des partis ne soient modifiées. Le diviseur serait désormais de 20, les restes après division de 15, 13 et 12. Les partis obtiendraient alors 3, 2 et 0 sièges, ce qui signifierait que la 3e formation serait pénalisée par l'accroissement du nombre de mandats disponibles! Ce phénomène est appelé "paradoxe de l'Alabama", nom de l'état où il se révéla en 1881 [1]. Voilà pourquoi on applique l'algorithme décrit dans l'introduction et qui se traduit comme suit:

Si n est le nombre de mandats à distribuer, s_i le nombre de suffrages du parti (ou de la liste) i et s la somme des s_i ($i = 1, 2, \ldots, k$), la règle 1 définit $q = s/n$ et la règle 2 attribue au parti i un nombre provisoire de mandats $m_i = \lfloor s_i/q \rfloor$ (arrondi vers le bas). Si $m_1 + \ldots + m_k < n$, la règle 3 accorde un siège supplémentaire au parti qui dispose du quotient $s_i/(m_i+1)$ le plus élevé et la règle 4 exige la poursuite de la procédure jusqu'à épuisement des sièges. Les nombres définitifs de mandats obtenus, que nous appelerons $n_1, \ldots, n_k$, satisferont à la condition

$$s_i/n_i \geq s_j/(n_j+1) \text{ pour } i \neq j \text{ (tirage au sort en cas d'égalité).} \tag{2.1}$$

Le résultat a une interprétation probabiliste: Supposons que l'on procède à un sondage lors duquel n électeurs choisis au hasard (n est encore le nombre total de sièges) seraient appelés à désigner leur parti préféré et où $p_i = s_i/s$ serait la probabilité qu'un sondé quelconque se prononce pour le parti i (la somme des p_i vaut 1). La probabilité d'un échantillon avec n_1 adeptes du parti $1, \ldots, n_k$ du parti k, serait dès lors

$$P(n_1, \ldots, n_k) = \frac{n!}{n_1! n_2! \ldots n_k!} p_1^{n_1} p_2^{n_2} \ldots p_k^{n_k} \tag{2.2}$$

(probabilité multinomiale). Or l'expression atteint son maximum lorsque les n_i satisfont (2.1): on doit avoir p. ex. $P(n_1, n_2, n_3, \ldots) \geq P(n_1-1, n_2+1, n_3, \ldots)$ et il suffit de calculer le *quotient* des deux termes pour trouver

$$p_1 \cdot (n_2+1)/n_1 p_2 \geq 1 \Leftrightarrow p_1/n_1 \geq p_2/(n_2+1) \Leftrightarrow s_1/n_1 \geq s_2/(n_2+1)$$

(et de même pour i et j au lieu de 1 et 2). La répartition proportionnelle correspond ainsi à l'échantillon le plus probable et cette propriété lui confère des qualités de stabilité et de cohérence facilement démontrables [2,3,4].

L'histoire a trouvé dans le canton de Berne un prolongement inattendu et plus ou moins amusant, selon le point de vue où l'on se place. Une initiative populaire acceptée en 1980 exigeait que le système proportionnel fût appliqué, non plus dans chacun des petits districts ruraux, mais dans des régions regroupant plusieurs districts. Un article stipulait néanmoins que chaque district conserverait le nombre de députés auquel sa population lui donnait droit. On abandonna ensuite aux juristes le soin de trouver une clé de répartition compatible avec ces beaux principes. La formule retenue envisageait, au terme de la phase préliminaire, des transferts de sièges effectués selon des critères facilement applicables, encore que fort mystérieux. Des mathématiciens irrévérencieux tentèrent bien, exemples à l'appui, de démontrer l'imperfection du système: on se doute qu'ils ne furent guère pris au sérieux par MM. les politiciens. Or les élections de 1982

firent effectivement apparaître un cas où l'algorithme était inapplicable et deux cas où il admettait différentes interprétations. La loi fut donc réaménagée en tenant compte d'une partie (mais d'une partie seulement) des recommandations émises. Nous renonçons ici, faute de place, à en reproduire le texte intégral!

En 1986, on eut la satisfaction d'obtenir partout une solution et une seule, ce qui ne suffit pourtant pas à cacher certaines incohérences. A Saanen, le parti A (69% des voix) et le parti B (11%) eurent chacun un siège, le parti C (20%) zéro. A Nidau, il s'avéra même que le nombre de sièges n'était pas une fonction monotone du nombre d'électeurs: avec quelque malchance, on peut perdre un mandat en gagnant des suffrages...

Le problème, on l'aura compris, consiste à déterminer de manière aussi logique que possible des nombres n_{ij} (sièges du parti i dans le district j) sous des conditions de la forme

$$\sum_j n_{ij} = n_i \text{ (sièges conquis par le parti } i \text{ dans la région)} \tag{2.3}$$

$$\sum_i n_{ij} = m_j \text{ (sièges garantis au district } j\text{)} \tag{2.4}$$

et en tenant compte de la proportion p_{ij} d'électeurs ayant voté pour le parti i dans le district j. La solution mathématique consisterait, par analogie avec le problème à un indice, à maximiser l'expression

$$\prod_{i,j} p_{ij}^{n_{ij}} / n_{ij}! \tag{2.5}$$

sous les contraintes (2.3) et (2.4). Malheureusement, comme beaucoup de problèmes d'optimisation à deux ou plusieurs indices, celui que nous venons de décrire ne peut pas se résoudre à l'aide d'un algorithme simple, donc susceptible d'être traduit en langage juridique. Toutefois, si j ne dépasse pas 4 (ce qui est le cas à Berne), les calculs nécessaires s'effectuent en une fraction de seconde sur un micro-ordinateur. Avec la démocratisation de l'informatique, les juristes admettront peut-être bientôt que, même présenté sous la forme d'un logiciel, un algorithme fondé sur les critères éprouvés est préférable à une procédure qui définit pas à pas le chemin à suivre sans se soucier du but à atteindre...

Voici encore des problèmes qui viennent d'être posés et qui attendent une solution:

a) Comment élire un parlement lorsque une représentation féminine (et masculine) minimale doit être garantie (40% en ville de Berne)?

b) Une décision de la Cour européenne de justice va obliger les cantons suisses à redéfinir les tâches des juges de district, de manière à dissocier l'instruction du procès. Il est possible que plusieurs districts soient regroupés en cercle, où les magistrats occuperaient alternativement différentes fonctions. Comment peut-on garantir, lors de l'élection des juges dans un cercle, que chaque district ait au moins un élu?

Références

[1] Balinski, M.L. & Young, H.P.: The Quota Method of Apportionment. Amer. Math. Monthly 82 (1975), 701–730.

[2] Balinski, M.L. & Young, H.P.: Apportionment Schemes and the Quota Method. Amer. Math. Monthly 84 (1977), 450–455.

[3] Leyvraz, J.P.: Le problème de la répartition proportionnelle. Thèse 270 de l'EPFL, Lausanne (1977).

[4] Woodall, D.R.: How Proportional is Proportional Representation? Math. Intelligencer 8 (1986), 36–46.

Henri Carnal
Université de Berne
Institut de statistique
Sidlerstr. 5
CH-3012 Berne