Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 48 (1993)

Artikel: Die Summe der Reziproken der natürlichen Zahlen ohne Ziffer 9
Autor: Fischer, Hans-Jürgen
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-44628

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 02.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

El. Math. *48* (1993)

0013-6018/93/030100-07$1.50 + 0.20/0
© 1993 Birkhäuser Verlag, Basel

Die Summe der Reziproken der natürlichen Zahlen ohne Ziffer 9

Hans-Jürgen Fischer

Hans-Jürgen Fischer hat von 1972 bis 1976 an der Technischen Universität Chemnitz (Karl-Marx-Stadt) Mathematik studiert und 1980 in Kiew promoviert. Zur Zeit ist er im Fachbereichsrechenzentum Mathematik der Technischen Universität Chemnitz tätig. Er beschäftigt sich vor allem mit analytischen Methoden und deren Umsetzung in Computeralgorithmen.

Die nur auf den ersten Blick verblüffende Tatsache, daß die Reihe konvergiert, die aus der (divergenten) harmonischen Reihe durch Weglassen aller der Glieder entsteht, in derem Nenner die Ziffer 9 auftritt, ist seit langem bekannt (einige Literaturhinweise wurden in [3] zusammengestellt). Offensichtlich ist aber auch, daß die Reihe extrem langsam konvergiert, zudem verhalten sich die Partialsummen nicht so regelmäßig, daß man in naheliegender Weise auf den Wert dieser Reihe extrapolieren könnte. Das ist wohl auch der Grund, weshalb in der Literatur lediglich mehr oder weniger grobe Abschätzungen bewiesen werden für einen wohldefinierten (und also berechenbaren) Zahlenwert. Interessanterweise läßt sich die Summe der Reihe sehr genau berechnen.

1 Eine Funktionalgleichung

Bezeichnen wir die Menge der natürlichen Zahlen, in deren Dezimaldarstellung die Ziffer 9 nicht vorkommt, mit M. Diese Menge hat eine einfache Struktur: Eine Zahl

Es ist wohl für jeden Mathematikstudenten eine Überraschung, wenn er zum ersten Mal vernimmt, dass die harmonische Reihe nicht konvergiert. Nicht nur junge Studenten zeigen sich überrascht, wenn sie vernehmen, dass die harmonische Reihe konvergent wird, wenn aus ihr 'einige' Glieder entfernt werden, etwa die Reziproken der ganzen Zahlen, die in der Zehnerschreibweise eine Neun aufweisen. Mit dieser Reihe beschäftigt sich der vorliegende Beitrag. Die Konvergenz der Reihe nachzuweisen stellt sich dabei als recht einfaches Problem heraus, schwieriger ist es, ihre Summe zu bestimmen. Denn die Konvergenz erfolgt so langsam, dass die Berechnung der Partialsummen keine taugliche Methode ist. Andere, raffiniertere Methoden müssen herangezogen werden. — Hans-Jürgen Fischer gibt im vorliegenden Beitrag eine derartige Methode an; sie kann benützt werden, um die Reihensumme mit beliebiger Genauigkeit zu berechnen. *ust*

aus M ist entweder einstellig, also eine der Zahlen $1, 2, \ldots, 8$, oder sie entsteht dadurch, daß an eine Zahl aus M mit geringerer Stellenzahl eine der Ziffern $0, 1, \ldots, 8$ angehängt wird. Es gilt also

$$M = \{1,2,3,4,5,6,7,8\} \cup \bigcup_{z=0}^{8} \{10m + z : m \in M\}. \tag{1}$$

Aus der obigen Überlegung ergibt sich auch sofort, daß es genau $8 \cdot 9^{n-1}$ n-stellige Zahlen aus M gibt — es gibt 8 Möglichkeiten für die erste Ziffer und 9 für jede weitere. Da die n-stelligen Zahlen im Bereich von 10^{n-1} bis $10^n - 1$ liegen, gilt die grobe Abschätzung

$$\sum_{m \in M} \frac{1}{m} \leq \sum_{n=1}^{\infty} 8 \cdot 9^{n-1} \cdot 10^{-n+1} = 80.$$

Sie ist natürlich nur für einen einfachen Konvergenzbeweis geeignet. Zur genauen Berechnung der uns interessierenden Reihe $\sum_{m \in M} \frac{1}{m}$ betrachten wir die Funktion

$$s(x) = \sum_{m \in M} \frac{1}{m + x}, \quad x \geq 0,$$

die auf Grund der für $x \geq 0$ gleichmäßigen Konvergenz der Reihe (Majorante $\sum_{m \in M} \frac{1}{m}$) wohldefiniert und stetig ist. Aus (1) ergibt sich dann sofort

$$\begin{aligned} s(x) &= \frac{1}{1+x} + \ldots + \frac{1}{8+x} + \sum_{z=0}^{8} \sum_{m \in M} \frac{1}{10m + z + x} \\ &= \frac{1}{1+x} + \ldots + \frac{1}{8+x} + \frac{1}{10} \sum_{z=0}^{8} \sum_{m \in M} \frac{1}{m + \frac{z+x}{10}} \\ &= \frac{1}{1+x} + \ldots + \frac{1}{8+x} + \frac{1}{10} \sum_{z=0}^{8} s\left(\frac{z+x}{10}\right), \end{aligned}$$

und damit die Gleichung

$$s(x) - \frac{1}{10} \sum_{z=0}^{8} s\left(\frac{z+x}{10}\right) = \frac{1}{1+x} + \ldots + \frac{1}{8+x}. \tag{2}$$

Führt man zur Abkürzung für die rechte Seite von (2) die Bezeichnung $r(x)$ ein, so kann man mit dem durch

$$(Af)(x) = \frac{1}{10} \sum_{z=0}^{8} f\left(\frac{z+x}{10}\right)$$

auf dem Raum $C[0,1]$ definierten Operator A Gleichung (2) auch in der Form

$$s - As = r \tag{3}$$

schreiben.

2 Eigenschaften der Operatorgleichung

Die folgenden Eigenschaften des Operators A sind leicht zu überprüfen:

1. A ist linear.
2. $\|A\| = 9/10 < 1$
3. Ist f nichtnegativ auf $[0, 1]$, so gilt dasselbe für Af.
4. Ist p_n ein Polynom n-ten Grades, so gilt das auch für Ap_n.

Daraus ergibt sich unmittelbar, daß der Operator $I - A$ invertierbar ist (dabei bezeichne wie üblich I den identischen Operator),

$$(I - A)^{-1} = I + A + A^2 + \ldots \tag{4}$$

und

$$\|(I - A)^{-1}\| \leq (1 - \|A\|)^{-1} = 10.$$

Damit ist die Gleichung

$$(I - A)f = g$$

für beliebige $g \in C[0, 1]$ eindeutig lösbar in $C[0, 1]$, und unsere gesuchte Funktion $s(x)$ ist durch (3) bzw. (2) eindeutig bestimmt. Sei nun noch l das durch

$$l(g) = (I - A)^{-1}g(0) \quad \text{für} \quad g \in C[0, 1]$$

definierte Funktional; offensichtlich ist es linear. Aus Eigenschaft 3 und Gleichung (4) folgt, daß $g_1(x) \leq g_2(x)$ für alle $x \in [0, 1]$ auch $l(g_1) \leq l(g_2)$ nach sich zieht, außerdem gilt

$$\|l\| \leq \|(I - A)^{-1}\| \leq 10. \tag{5}$$

Wegen

$$\sum_{m \in M} \frac{1}{m} = s(0) = (I - A)^{-1}r(0) = l(r)$$

läuft unsere Aufgabe auf die Berechnung von $l(r)$ hinaus. Grundlage dafür ist die Tatsache, daß auf Grund von Eigenschaft 4 das Funktional $l(p)$ für ein Polynom p leicht zu berechnen ist, und daß sich bekanntlich Funktionen aus $C[0, 1]$ beliebig genau durch Polynome approximieren lassen.

3 Zwei Rekursionen

Natürlich läßt sich für ein gegebenes Polynom p das eindeutig bestimmte Polynom $q = (I - A)^{-1}p$ durch Einsetzen in die Gleichung $q - Aq = p$ und Koeffizientenvergleich ermitteln. Da es uns aber nur auf $l(p)$ ankommt, und sich $p(x)$ als $a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$ oder auch als $b_0 + b_1(1-x) + \ldots + b_n(1-x)^n$ schreiben läßt, genügt es, rekursive Beziehungen für die Folgen

$$\alpha_n = l(x^n) \quad \text{und} \quad \beta_n = l((1-x)^n)$$

zu finden.

Nach Definition gilt $l((I-A)g) = g(0)$ für beliebiges $g \in C[0,1]$. Setzen wir $g(x) = (e^{t/10}-1)e^{tx}$, so erhalten wir zunächst

$$Ag(x) = \frac{1}{10}(e^{t/10}-1)\left(e^{tx/10}+\ldots+e^{t(x+8)/10}\right) = \frac{1}{10}(e^{9t/10}-1)e^{tx/10}$$

und daraus

$$l\left((e^{t/10}-1)e^{tx} - \frac{1}{10}(e^{9t/10}-1)e^{tx/10}\right) = e^{t/10}-1.$$

Entwicklung beider Seiten nach Potenzen von t und Koeffizientenvergleich ergibt

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!(n-k)!}\left(\frac{1}{10^k} - \frac{9^k}{10^{n+1}}\right)\alpha_{n-k} = \frac{1}{n!}\frac{1}{10^n} \quad \text{für} \quad n \geq 1.$$

Diese Gleichung kann man in die Form

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k}\left(10^{n-k+1} - 9^k\right)\alpha_{n-k} = 10 \quad \text{für} \quad n \geq 1 \tag{6}$$

bringen. Aus (6) erhält man sukzessive $\alpha_0 = 10, \alpha_1 = 360/91, \ldots$
Völlig analog erhalten wir mit $g(x) = (e^{t/10}-1)e^{t(1-x)}$

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k}\left(10^{n-k+1} - 10^k + 1\right)\beta_{n-k} = 10\left(11^n - 10^n\right) \quad \text{für} \quad n \geq 1 \tag{7}$$

und hieraus $\beta_0 = 10, \beta_1 = 550/91, \ldots$
Es sei hier noch vermerkt, daß wegen $x^{n+1} \leq x^n$ und $(1-x)^{n+1} \leq (1-x)^n$ für $x \in [0,1]$ die Folgen (α_n) und (β_n) monoton fallend sind.

Um diese Ergebnisse auf Gleichung (2) anwenden zu können, brauchen wir eine genaue Approximation von $r(x)$ durch ein Polynom, z. B. aus einer abgebrochenen Potenzreihenentwicklung. Prinzipiell ist dafür schon die Taylorreihe von $r(x)$ (freilich um $x = 1$!) geeignet, da sie auf $[0,1]$ gleichmäßig konvergiert — wenn auch leider nicht übermäßig schnell (bei Abbruch nach n Gliedern ist der Fehler 2^{-n}). "Schuld" ist natürlich der Pol von $r(x)$ bei $x = -1$. Glücklicherweise läßt sich Gleichung (2) umformen in eine ebensolche mit einer "besseren" rechten Seite.

4 Eine analytische Methode

An dieser Stelle müssen wir feststellen, daß Gleichung (2) nur in $C[0,1]$ (oder in einem anderen Raum beschränkter Funktionen) eindeutig lösbar ist — es existieren auch unbeschränkte Lösungen. Die einfachste ist $-\frac{1}{x}$, wie man durch Einsetzen sofort nachprüft. Das bedeutet aber, daß die (unbeschränkte!) Funktion $s_1(x) = s(x) + \frac{1}{x}$ der Gleichung

$s_1 - As_1 = 0$ genügt. Nun gilt aber (siehe [1, 6.4.8] für $n = 0, m = 10$) für die logarithmische Ableitung der Gammafunktion, $\psi(x) = \Gamma'(x)/\Gamma(x)$:

$$\psi(x) = \ln 10 + \frac{1}{10}\sum_{k=0}^{9} \psi\left(\frac{x+k}{10}\right),$$

woraus sofort folgt, daß die Funktion $s_2(x) = s_1(x) + \psi(x) + \gamma$ die Gleichung

$$s_2(x) - As_2(x) = \ln 10 + \frac{1}{10}\left[\psi\left(\frac{x+9}{10}\right) + \gamma\right] = r_1(x)$$

erfüllt. Nach [1, 6.3.5] gilt

$$s_2(x) = s(x) + \frac{1}{x} + \psi(x) + \gamma = s(x) + \psi(1+x) + \gamma,$$

diese Funktion ist also in $C[0,1]$, und es gilt $s(0) = s_2(0) = l(r_1)$. Da aber wegen [1, 6.3.14]

$$r_1(x) = \ln 10 + \frac{1}{10}\left[\psi\left(1 - \frac{1-x}{10}\right) + \gamma\right] = \ln 10 - \frac{1}{10}\sum_{n=2}^{\infty} \zeta(n)\left(\frac{1-x}{10}\right)^{n-1}$$

ist, erhalten wir das folgende interessante

Resultat 1 *Es gilt*

$$\sum_{m\in M} \frac{1}{m} = \beta_0 \ln 10 - \sum_{n=2}^{\infty} 10^{-n}\beta_{n-1}\zeta(n), \tag{8}$$

wobei die β_n durch (7) bestimmt werden.

Der Abbruchfehler der Reihe (8) läßt sich leicht abschätzen: Da $\zeta(n)$ und β_n monoton fallen, ist der Quotient zweier aufeinanderfolgender Glieder $\leq 1/10$, damit ist der Fehler $\leq 10^{-1} + 10^{-2} + \ldots = 1/9$ des letzten berücksichtigten Gliedes. Die Werte von $\ln 10$ und $\zeta(n)$ sind in einigen Standardtabellenwerken zu finden, so daß (8) für eine Berechnung "von Hand" (also wohl eher mit einem Taschenrechner) sehr gut geeignet ist. Mit den Gliedern bis einschließlich $n = 7$ findet man

$$\sum_{m\in M} \frac{1}{m} = 22.9206766\ldots$$

Wollen wir allerdings $s(0)$ mit erheblich höherer Genauigkeit berechnen, so ist (8) nicht die beste Methode, da dann $\ln 10$ und $\zeta(n)$ erst berechnet werden müssen.

5 Tschebyschew-Approximation

Zur Approximation der Funktion $r(x)$ auf $[0,1]$ durch Polynome ist die Taylorreihe kein geeignetes Instrument. Dazu verwenden wir besser einige einfache Eigenschaften der Tschebyschew-Polynome. Diese sind bekanntlich ([2, 4.9]) durch

$$T_n(y) = \cos(n \arccos y)$$

definiert, deshalb gilt

$$|T_n(y)| \leq 1 \quad \text{für} \quad y \in [-1,1],$$

also auch

$$|T_n(1-2x)| \leq 1 \quad \text{für} \quad x \in [0,1].$$

Das Polynom $T_{n+1}(3) - T_{n+1}(1-2x)$ verschwindet für $x = -1$, ist also ohne Rest durch $1+x$ teilbar. Bezeichnen wir den Quotienten mit $Q_n(x)$. Wegen $|T_{n+1}(1-2x)| \leq 1$ gilt

$$\frac{T_{n+1}(3)-1}{1+x} \leq \frac{T_{n+1}(3)-T_{n+1}(1-2x)}{1+x} = Q_n(x) \leq \frac{T_{n+1}(3)+1}{1+x} \quad \text{für} \quad x \in [0,1].$$

Teilen wir noch durch $T_{n+1}(3)$ und führen die Bezeichnung

$$\frac{Q_n(x)}{T_{n+1}(3)} = \sum_{k=0}^{n} q_{nk} x^k$$

ein, so folgt

$$\left(1 - \frac{1}{T_{n+1}(3)}\right) \frac{1}{1+x} \leq \sum_{k=0}^{n} q_{nk} x^k \leq \left(1 + \frac{1}{T_{n+1}(3)}\right) \frac{1}{1+x} \quad \text{für} \quad x \in [0,1]$$

und wegen

$$\frac{1}{m+x} = \frac{1}{m} \frac{1}{1+x/m} \quad \text{für} \quad m = 1,2,\ldots,8$$

auch

$$\left(1 - \frac{1}{T_{n+1}(3)}\right) \frac{1}{m+x} \leq \sum_{k=0}^{n} q_{nk} \frac{1}{m^{k+1}} x^k \leq \left(1 + \frac{1}{T_{n+1}(3)}\right) \frac{1}{m+x} \quad \text{für} \quad x \in [0,1].$$

Addieren wir diese Ungleichungen für $m = 1,2,\ldots,8$ und wenden darauf das Funktional l an, so erhalten wir unmittelbar

Resultat 2 *Mit den obigen Bezeichnungen (die Folge* (α_k) *ist durch (6) definiert) und*

$$H_8^{(k)} = 1 + \frac{1}{2^k} + \ldots + \frac{1}{8^k}$$

gilt

$$\left(1 - \frac{1}{T_{n+1}(3)}\right) \sum_{m \in M} \frac{1}{m} \leq \sum_{k=0}^{n} \alpha_k q_{nk} H_8^{(k+1)} \leq \left(1 + \frac{1}{T_{n+1}(3)}\right) \sum_{m \in M} \frac{1}{m} \tag{9}$$

Die Tschebyschew-Polynome lassen sich aus ihrer Rekursionsformel auch für großes n leicht berechnen, die Division durch $1 + x$ ist mittels Hornerschema ebenfalls kein Problem. Welcher Polynomgrad für eine vorgegebene Genauigkeit notwendig ist, läßt sich leicht abschätzen: Laut ([2, 4.13]) gilt

$$T_n(x) = \frac{1}{2}\left[(x + \sqrt{x^2 - 1})^n + (x - \sqrt{x^2 - 1})^n\right]$$

und deshalb

$$T_n(3) \geq \frac{1}{2}(3 + 2\sqrt{2})^n.$$

Mit einem Polynom 135-ten Grades und 100-stelliger Rechnung können wir aus (9)

$$\sum_{m \in M} \frac{1}{m} = 22.9206766192641503481636570943759319149447624369984815$$
$$6854199835657215633818991112944562603744 82\ldots$$

erhalten.

Literatur

[1] Abramowitz, M., Stegun, I.A., Handbook of Mathematical Functions, Nat. Bureau of Stand., 1964

[2] Meinardus, G., Approximation von Funktionen und ihre numerische Behandlung, Springer-Verlag, 1964

[3] Stadje, W., Konvergenz von Teilen der harmonischen Reihe, El.Math., Vol. 46, Nr. 2 1991, S. 51–54

Hans-Jürgen Fischer
Fachbereichszentrum Mathematik
TU Chemnitz
Postfach 964
D-09009 Chemnitz