

# Another Computation of [Formel]

Autor(en): **Kortram, Ronald A.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **48 (1993)**

PDF erstellt am: **30.06.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-44635>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

# Another Computation of $\int_0^\infty e^{-u^2} du$

Ronald A. Kortram

Ronald Kortram was born in 1944. He studied mathematics in Leiden and obtained his PhD in 1971 under the direction of C. Visser. He worked at the universities of Helsinki and Nijmegen. His main interest is in the theory of functions of one complex variable.

There are many ways to determine the value of  $\int_0^\infty e^{-u^2} du$ . In this article we establish a relation between this value and the number of lattice points in a disc.

Let  $x$  be a real number, and let  $0 < x < 1$ . The function

$$t \rightarrow x^{t^2} = e^{t^2 \log x} \quad t \in [0, \infty)$$

is decreasing, thus

$$\int_0^\infty e^{t^2 \log x} dt \leq \sum_{n=0}^\infty x^{n^2} \leq 1 + \int_0^\infty e^{t^2 \log x} dt.$$

Substitution of  $u = t\sqrt{-\log x}$  leads to

$$\int_0^\infty e^{-u^2} du \leq \sqrt{-\log x} \sum_{n=0}^\infty x^{n^2} \leq \sqrt{-\log x} + \int_0^\infty e^{-u^2} du,$$

thus

$$\lim_{x \uparrow 1} \sqrt{-\log x} \sum_{n=0}^\infty x^{n^2} = \int_0^\infty e^{-u^2} du.$$

Die Berechnung des Gaußschen Fehlerintegrals  $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} du$  ist üblicherweise einer der Höhepunkte in der einführenden Vorlesung über Differential- und Integralrechnung, und zwar für alle Beteiligten und unabhängig von der benützten Methode. Selbst spontaner Applaus von Seiten der Zuhörerschaft ist an dieser Stelle keine Seltenheit! — In seinem Beitrag behandelt Ronald Kortram einen offenbar neuen Zugang zur Berechnung dieses Integrals, bei dem sich überraschende Beziehungen zum bekannten zahlentheoretischen Problem über die Darstellung von ganzen Zahlen als Summe von zwei Quadraten zeigen. *usf*

From  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\log x}{x-1} = 1$ , we conclude that

$$\int_0^\infty e^{-u^2} du = \lim_{x \uparrow 1} \sqrt{1-x} \sum_{n=0}^\infty x^{n^2},$$

i.e.

$$\left( \int_0^\infty e^{-u^2} du \right)^2 = \lim_{x \uparrow 1} (1-x) \left( \sum_{n=0}^\infty x^{n^2} \right)^2 = \lim_{x \uparrow 1} (1-x) \sum_{n=0}^\infty b_n x^n$$

where  $b_n$  is the number of representations of  $n$  as sum of two squares of non-negative integers, i.e.  $b_n$  is the number of lattice points with non-negative coördinates, at distance  $\sqrt{n}$  from the origin.

We base the computation of  $\lim_{x \uparrow 1} (1-x) \sum_{n=0}^\infty b_n x^n$  on the following lemma.

**Lemma:** Let  $A_n$  be a sequence of positive numbers, such that  $\sum A_n x^n$  converges for  $x \in [0, 1)$  but diverges for  $x = 1$ . Let  $B_n$  be a sequence of numbers such that

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{B_n}{A_n} = \lambda.$$

Then we have

$$\lim_{x \uparrow 1} \frac{\sum_{n=0}^\infty B_n x^n}{\sum_{n=0}^\infty A_n x^n} = \lambda.$$

**Proof:** Since  $|B_n|$  is dominated by a constant multiple of  $A_n$ ,  $\sum B_n x^n$  converges for  $x \in [0, 1)$ . Let  $\varepsilon > 0$  be given. Choose  $N$  such that for all  $n > N$  we have

$$\left| \frac{B_n}{A_n} - \lambda \right| < \frac{1}{2} \varepsilon,$$

i.e.

$$|B_n - \lambda A_n| < \frac{1}{2} \varepsilon A_n.$$

For  $x \in [0, 1)$  it follows that

$$\begin{aligned} \left| \frac{\sum_{n=0}^\infty B_n x^n}{\sum_{n=0}^\infty A_n x^n} - \lambda \right| &= \frac{\left| \sum_{n=0}^\infty (B_n - \lambda A_n) x^n \right|}{\sum_{n=0}^\infty A_n x^n} \leq \frac{\sum_{n=0}^N |B_n - \lambda A_n| + \frac{1}{2} \varepsilon \sum_{n=N+1}^\infty A_n x^n}{\sum_{n=0}^\infty A_n x^n} \\ &< \frac{\sum_{n=0}^N |B_n - \lambda A_n|}{\sum_{n=0}^\infty A_n x^n} + \frac{1}{2} \varepsilon, \end{aligned}$$

and for  $x$  sufficiently close to 1, this is smaller than  $\varepsilon$ , and the lemma is proved. □

We apply this lemma, with

$$A_n = n+1 \quad \text{and} \quad B_n = \sum_{k=0}^n b_k,$$

the number of lattice points with non-negative coördinates in the closed disc with radius  $\sqrt{n}$  around the origin. To each such lattice point we associate the unit square that lies "north east" of it. These squares cover a closed quarter-disc with radius  $\sqrt{n}$  and are covered by a closed quarter-disc with radius  $\sqrt{n} + \sqrt{2}$ , hence

$$\frac{1}{4}\pi(\sqrt{n})^2 \leq B_n \leq \frac{1}{4}\pi(\sqrt{n} + \sqrt{2})^2$$

thus

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{B_n}{n+1} = \frac{1}{4}\pi.$$

It follows from the lemma that

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}\pi &= \lim_{x \uparrow 1} \frac{\sum_{n=0}^{\infty} B_n x^n}{\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n} = \lim_{x \uparrow 1} \frac{(1-x) \sum_{n=0}^{\infty} B_n x^n}{(1-x) \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n} = \\ &= \lim_{x \uparrow 1} \frac{\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n}{\sum_{n=0}^{\infty} x^n} = \lim_{x \uparrow 1} (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n, \end{aligned}$$

and this shows that

$$\int_0^{\infty} e^{-u^2} du = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}.$$

Ronald A. Kortram  
 Department of Mathematics  
 Catholic University of Nijmegen  
 Toernooiveld  
 6525 ED Nijmegen