Zeitschrift: Elemente der Mathematik

Band: 49 (1994)

Rubrik: Aufgaben

El. Math. 49 (1994)

0013-6018/94/010038-05$1.50 + 0.20/0

Aufgaben

Neue Aufgaben

Lösungen sind erbeten bis zum 10. August 1994 an:

- Peter Gallin, Tüfenbach 176, CH-8494 Bauma

oder

- Hans Walser, Gerlikonerstrasse 29, CH-8500 Frauenfeld

Aufgabe 1081: Es seien a und b zwei verschiedene, positive reelle Zahlen, aus denen elementare Mittelwerte gebildet werden. Mit den Bezeichnungen

$$G(a,b)=\sqrt{ab},\qquad A(a,b)=\frac{a+b}{2},$$

$$L(a,b)=\frac{a-b}{\log a-\log b},\quad I(a,b)=e^{-1}\left(\frac{a^a}{b^b}\right)^{\frac{1}{a-b}}$$

beweise man folgende Gleichungen

$$G(a,b)\cdot\exp\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k}\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^{2k}\right)=A(a,b) \tag{1}$$

$$G(a,b)\cdot\exp\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k+1}\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^{2k}\right)=I(a,b) \tag{2}$$

$$G(a,b)\cdot\exp\left(\frac{A(a,b)-L(a,b)}{L(a,b)}\right)=I(a,b) \tag{3}$$

H.-J. Seiffert, Berlin, D

Aufgabe 1082: Es sei $p\geq 2$ eine natürliche Zahl. Man beweise oder widerlege die folgende Aussage über den ganzen Teil zweier Terme: Für alle $n\in\mathbb{N}$ gilt

$$\lfloor n^{\frac{1}{p}}+(n+1)^{\frac{1}{p}}\rfloor=\lfloor(2^pn+2^{p-1}-1)^{\frac{1}{p}}\rfloor.$$

Hans Kappus, Rodersdorf, CH

Aufgabe 1083 (Die einfache dritte Aufgabe): Um die Höhe h eines Ballons über dem Boden zu bestimmen, werden von den Eckpunkten A, B und C eines bekannten, horizontalen Dreiecks aus die drei Höhenwinkel α, β und γ gemessen, unter denen man den Ballon von diesen Punkten aus sichtet. Man bestimme h nicht nur rechnerisch, sondern auch konstruktiv aus folgenden Daten:

$$\overline{BC} = a = 13\,\text{km}; \quad \overline{CA} = b = 15\,\text{km}; \quad \overline{AB} = c = 14\,\text{km};$$

$$\alpha = 54.74^\circ; \quad \beta = 39.23^\circ; \quad \gamma = 32.31^\circ.$$

Rolf Rose, Magglingen, CH

Lösungen

Aufgabe 1069. Es seien $A_1, A_2, \ldots, A_n$ die Ecken eines regulären n-Eckes mit Umkreisradius 1, und P sei ein beliebiger Punkt auf dem Umkreis. Man beweise die Ungleichung

$$3\cos^2\left(\frac{\pi}{2n}\right) - 1 \le \frac{1}{8}\sin\left(\frac{3\pi}{2n}\right)\sum_{j=1}^{n}|PA_j|^3 \le 2\cos^3\left(\frac{\pi}{2n}\right),$$

wobei links (bzw. rechts) Gleichheit genau dann eintritt, wenn P den Bogen zwischen A_j und A_{j+1} halbiert (bzw. gleich einem der A_j ist), $j = 1, 2, \ldots, n$, mit der Zusatzkonvention $A_{n+1} := A_1$. Peter Bundschuh, Köln, D

Auswertung der eingesandten Lösungen. Es sind 8 Lösungen eingegangen: Francisco Bellot / Maria Ascensión López (Valladolid, E), G. Bercea (München, D), J.C. Binz (Bolligen, CH), Walther Janous (Innsbruck, A), O.P. Lossers (Eindhoven, NL), Wolfgang Moldenhauer (Erfurt, D), H.-J. Seiffert (Berlin, D), Michael Vowe (Therwil, CH). In allen Lösungen wird die abzuschätzende Summe als Funktion eines geeigneten Winkels dargestellt und hernach das Extremwertverhalten dieser Funktion zum Beweis der Ungleichungen verwendet. Als Beispiel die Lösung nach M. Vowe:

Die Ecken A_j seien durch $e^{2\pi i \frac{j}{n}}, j = 1, 2, \ldots, n$, und der Punkt P durch $e^{i\phi}$ gegeben. Aus Symmetriegründen kann $0 \le \phi \le \frac{\pi}{n}$ angenommen werden. Damit wird

$$S = \sum_{j=1}^{n}|PA_j|^3 = \sum_{j=1}^{n}\left|e^{2\pi i \frac{j}{n}} - e^{i\phi}\right|^3 = 8\sum_{j=1}^{n}\sin^3\left(\pi\frac{j}{n} - \frac{\phi}{2}\right)$$
$$= 2\sum_{j=1}^{n}\left(3\sin\left(\pi\frac{j}{n} - \frac{\phi}{2}\right) - \sin\left(3\pi\frac{i}{n} - 3\frac{\phi}{2}\right)\right).$$

Mit trigonometrischen Umformungen (zum Beispiel nach der Formelsammlung von Gradstein/Rhyshik, Vol. 1, p. 57, Formel 1.341) ergibt sich, wenn man noch zur Abkürzung $\frac{\phi}{2} = x$ und $\frac{\pi}{2n} = a, 0 \le x \le a$, setzt:

$$S = 2\left(3\cos x\,\frac{\cos a}{\sin a} - \cos 3x\,\frac{\cos 3a}{\sin 3a} + 4\sin^3 x\right).$$

Damit wird der mittlere Term der vorgelegten Ungleichung

$$f(x) := \frac{1}{4}\left(3\cos x \frac{\cos a}{\sin a}\sin 3a - \cos 3a \cos 3x + 4 \sin 3a \sin^3 x\right).$$

Aus

$$f'(x) = -3 \sin x \sin(2a - x) \sin(a - x)$$

folgt sofort, dass f im Intervall $[0, a]$ monoton fallend ist, also

$$f(0) \geq f(x) \geq f(a).$$

Es bleibt zu zeigen, dass $f(0) = 2\cos^3 a$ und $f(a) = 3\cos^2 a - 1$ richtig ist; dies ist aber nach einigen Umformungen ersichtlich.

G. Bercea bemerkt, dass die Verwendung geradzahliger Exponenten zu konstanten ganzzahligen Summen führt, zum Beispiel $\sum_{j=1}^{n} |PA_j|^2 = 2n$ (für $n = 2$ ist dies der Satz des Pythagoras) oder $\sum_{j=1}^{n} |PA_j|^4 = 6n$.

W. Janous gibt folgende Literaturangaben für die Ungleichung

$$\sum_{j=1}^{n} |PA_j|^3 \geq 2\left(3\text{cosec}\frac{\pi}{2n} - \text{cosec}\frac{3\pi}{2n}\right)$$

mit Gleicheit für die Bogenmittelpunkte aufeinanderfolgender Eckpunkte:

[1] D.S. Mitrinovic e.a.: Addenda to the monograph “Recent Advances in Geometric Inequalities”, part I. Journal of Ningbo University, vol. 4, no. 2, December 1991, pp. 79–145, item 71.

[2] D.M. Milosevic, M.E. Kuczma: Problem 1476, Crux math. 15 (1989), 233 and 16 (1990), 311–313.

Aufgabe 1070. (Fassung ohne Abbildung) Ein Freund bringt mir einen achterförmigen Papierstreifen, gefertigt aus einem um 360° verdrehten geschlossenen Band mit Einschnitten an gegenüberliegenden Stellen, so dass die Ränder zwei in parallelen Ebenen liegende Kurven sind. Die Randkurven sehen der Bernoullischen Lemniskate sehr ähnlich. Man bestimme den Unterschied zwischen Lemniskate und der elastischen Achterschleife praktisch und prinzipiell. Georg Unger, Dornach, CH

Vorläufige Auswertung. Es sind leider keine Lösungsvorschläge für diese offen gestellte Aufgabe eingegangen. Dagegen haben sich bereits einige Leser für eine Lösung interessiert. Vielleicht hat das Problem einen doch zu stark physikalischen Charakter, so dass sich unsere Löserinnen und Löser etwas abschrecken liessen. Selbst der Aufgabensteller musste in seiner Lösung eine Zusatzannahme treffen, die vom Problem her nicht auf der Hand liegt: Den Winkel, unter dem sich die Achterschlaufe im Zentrum kreuzt, legte er willkürlich auf 90° fest. Ausserdem hat er nicht etwa eine Gleichung für die Randkurve der Achterschleife aufgestellt, sondern sich damit begnügt, die Krümmungen in den Scheitelpunkten mit denjenigen der Lemniskate zu vergleichen und durch eine numerische Integration die beiden Kurven einander grafisch gegenüberzustellen. Vielleicht lässt sich mit Hilfe dieser Zusatzangaben auch eher ein Kollege oder eine Kollegin aus dem Bereich der Physik überreden, sich mit der Aufgabe zu befassen. Da sie sicher mehr als nur ein akademisches Spiel ist, möchten wir sie an dieser Stelle nochmals zur Bearbeitung empfehlen und hoffen auf Lösungsvorschläge bis zum 10. August 1994.

Aufgabe 1071 (Die einfache dritte Aufgabe). Durch einen gegebenen Punkt P im Innern eines Winkels mit dem Scheitel S lege man eine den Schenkel a in A und den Schenkel b in B schneidende Gerade so, dass das Dreieck SAB minimalen Umfang erhält.

Hans Egli, Zürich, CH

Auswertung der eingesandten Lösungen. Es sind 16 Lösungen eingegangen: Francisco Bellot (Valladolid, E), G. Bercea (München, D), Friedhelm Götze (Jena, D), Hans Irminger (Wetzikon, CH), Walther Janous (Innsbruck, A), Joachim Klose (Bonn, D), O.P. Lossers (Eindhoven, NL), Wolfgang Moldenhauer (Erfurt, D), Werner Raffke (Vechta, D), J. Schaer (Calgary, CDN), François Sigrist (Neuchâtel, CH), Georg Unger (Dornach, CH), Michael Vowe (Therwil, CH), Thomas Wihler (Killwangen, CH), Roland Wyss (Flumenthal, CH), Peter Zimmermann (Glarus, CH).

Mehrfach wurde darauf hingewiesen, dass die Aufgabe bereits in Ivan Niven *Maxima and Minima without Calculus*, Dolciani Math. Expositions, vol. 6 (MAA 1981), p. 70 mit der eleganten geometrischen Lösung publiziert ist, welche auch hier mehrheitlich gewählt wurde: Wenn ein Kreis beide Schenkel des Winkels berührt, dann schneiden alle Tangenten, welche den Kreis vom Scheitel S trennen, Dreiecke vom gleichen Umfang ab. Dies kann anhand der Tangentenabschnitte eingesehen werden; der halbe Dreiecksumfang ist der Tangentenabschnitt von S zum Kreis. Nun suche man den kleinsten Kreis, der beide Schenkel berührt und P nicht von S trennt. Dieser Kreis verläuft durch P, und die Tangente in P ist die gesuchte Gerade.

F. Götze, J. Klose, F. Sigrist und Th. Wihler geben eine Lösung mit Differentialrechnung, zum Beispiel (nach F. Sigrist): Es sei $\alpha := \angle\,(ASP), \beta := \angle\,(PSB)$ und $\phi := \angle\,(SPB)$. Wir setzen $|SP| = 1$ und erhalten mit Hilfe des Sinussatzes für den Dreiecksumfang

$$u(\phi) = \frac{\sin\phi + \sin\beta}{\sin(\phi+\beta)} + \frac{\sin\phi + \sin\alpha}{\sin(\phi-\alpha)} .$$

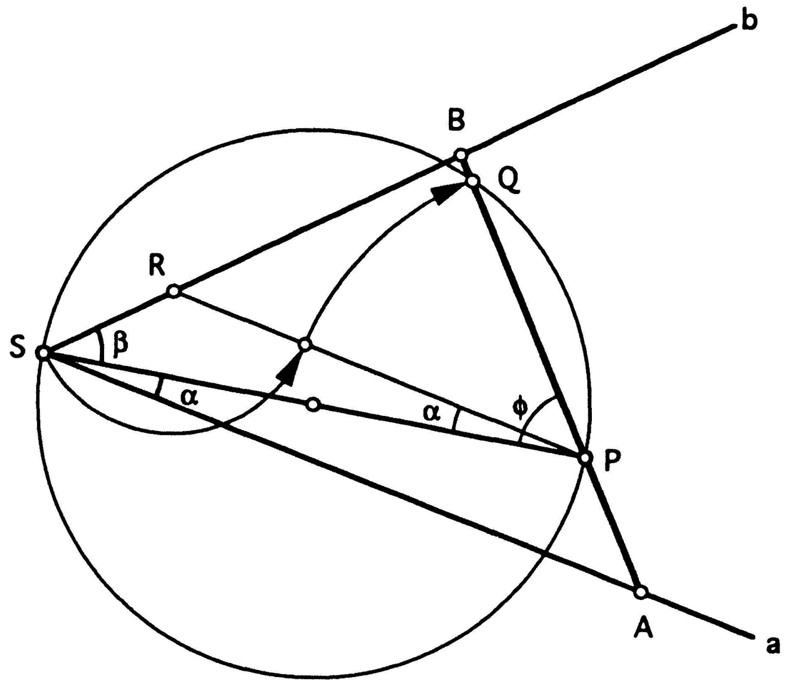
Aus $\frac{d}{d\phi}u(\phi) = 0$ ergibt sich für den gesuchten Winkel ϕ:

$$\cos\phi = \frac{\sin\beta - \sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)} .$$

Zur planimetrischen Konstruktion führen wir die Parallele zum Schenkel a durch P ein; diese schneide den Schenkel b in R (siehe Figur). Im Dreieck SPR ergibt sich aus dem Sinussatz

$$\frac{|PR|}{\sin\beta} = \frac{1}{\sin(\alpha+\beta)} = \frac{|SR|}{\sin\alpha} .$$

Somit ist $\cos\phi = |PR| - |SR|$, woraus sich die sehr einfache Konstruktion der Figur ergibt.



G. Unger schlägt als Variante die Minimisierung der Summe $|SA| + |SB|$ vor, eine Aufgabe, die mit einer Hyperbel gelöst werden kann.