

A good basis for computing with complex numbers

Autor(en): **Robert, Alain**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **49 (1994)**

PDF erstellt am: **14.08.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-45427>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

A Good Basis for Computing with Complex Numbers

Alain Robert

Alain Robert, né en 1941, a obtenu son doctorat en 1967. Après des séjours à Paris et Princeton, il a été nommé professeur à l'université de Neuchâtel en 1971 où il enseigne l'analyse. Il a aussi enseigné à Kingston (Canada), Rio-de-Janeiro et Berkeley. Il est auteur de divers livres dont "Courbes elliptiques", "Représentations des groupes", "Analyse non standard". Il s'intéresse actuellement aux relations entre nombres p -adiques et fractals.

Das Dezimalsystem beginnt mit den natürlichen Zahlen: Es codiert sie als Wörter endlicher Länge über dem Alphabet $\{0, \dots, 9\}$. Mit Hilfe eines Vorzeichens lassen sich dann auch beliebige ganze Zahlen in eindeutiger Weise darstellen. Die ganzen Zahlen \mathbb{Z} bilden im System \mathbb{R} der reellen Zahlen einerseits einen Ring und andererseits ein Gitter mit dem Schrittintervall $[0, 1] =: F$ als Fundamentalbereich. Jede reelle Zahl $\alpha \in F$ wird vom Dezimalsystem als unendliche Nachkommazahl, Beispiel: 26391145... codiert, wobei die sinngemäss interpretierten endlichen Anfangsstücke dieses Wortes die gemeinte Zahl α besser und besser approximieren. Und noch etwas: Die Menge der höchstens n -stelligen natürlichen Zahlen ist eine (um den Faktor 10^n vergrößerte) "gerasterte" Kopie von F .

Schon verschiedentlich ist der Versuch gemacht worden, eine analoge Basisdarstellung für die komplexen Zahlen zu komponieren. Dazu benötigt man eine geeignete Basis $b \in \mathbb{C}$ und ein zugehöriges Alphabet S derart, dass jede Zahl $\zeta \in \mathbb{C}$ ohne Rückgriff auf Real- und Imaginärteil mehr oder weniger eindeutig als Summe $\sum_{k \leq r} a_k b^k$, die $a_k \in S$, darstellbar ist und damit als Wort $a_r a_{r-1} \dots a_1 a_0 . a_{-1} a_{-2} \dots$ codiert werden kann. Der hier von Robert unterbreitete Vorschlag ist darum besonders reizvoll, weil der entstehende Fundamentalbereich F nicht etwa ein Gitterparallelogramm ist, sondern eine fraktale Grenze aufweist. Die oben für \mathbb{Z} und \mathbb{R} beschriebenen Sachverhalte bleiben gültig; insbesondere gleicht die Menge der höchstens n -stelligen "ganzen" Zahlen für wachsendes n immer mehr einer stark vergrößerten Kopie von F .

Aufgabe für den Leser: Ein Rechenbuch für das Umgehen mit derartigen komplexen b -Brüchen zu verfassen, beginnend mit dem "kleinen Einmaleins" und endend mit Regeln für das "Schriftlichrechnen". *cbl*

Several bases for computing with complex numbers have been studied. We propose one which gives a numbering system for the ring of integers L in $\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$. This ring of integers is generated by $\zeta = (1 + \sqrt{-3})/2 = \exp(\pi i/3)$ (a primitive sixth root of 1) and is a hexagonal lattice in \mathbb{C} .

We propose to take the basis $b = \sqrt{-3} = i\sqrt{3}$, and we let the corresponding digits be $S = \{0, 1, \zeta\}$. Our purpose thus is to consider finite sums

$$a_0 + a_1\sqrt{-3} + a_2(-3) + a_3(-3\sqrt{-3}) + \dots + a_n(\sqrt{-3})^n$$

with digits $a_i \in S$.

In Figure 1 we picture the first nine elements of this system: $0, \sqrt{-3}, \zeta\sqrt{-3}, 1, 1 + \sqrt{-3}, 1 + \zeta\sqrt{-3}, \zeta, \zeta + \sqrt{-3}, \zeta + \zeta\sqrt{-3}$.

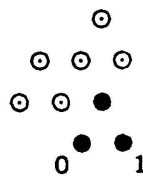


Fig. 1

Figure 2 shows the growth of the basic scheme with the first 81 and $3 \cdot 81$ points. Let $S^{\mathbb{N}}$ denote the set of families $(a_i)_{i \geq 0}$ of elements of S with $a_i \neq 0$ for finitely many indices only (i.e. $a_i = 0$ for $i \gg 0$).

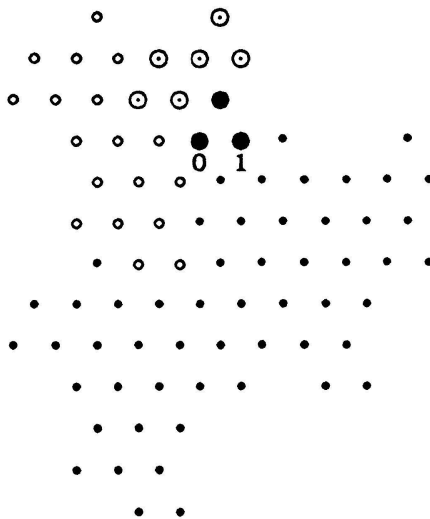


Fig. 2

Proposition 1. *The mapping $\Phi : S^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{C}, (a_i) \mapsto \sum a_i b^i$ is injective with image $L = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\zeta = \mathbb{Z}[\zeta] \subset \mathbb{Q}(\sqrt{-3})$.*

Proof. Since L is a ring containing b and S , the image of Φ is in L . On the other hand, $L = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\zeta$ is the free abelian group generated by 1 and ζ . It will be enough to show that the image of Φ , namely the set of finite sums $\sum a_i b^i$ ($a_i \in S$) is also a group (hence a subgroup of L containing 1 and ζ). For this purpose we have to show how to bring

sums and differences of elements in the image of Φ in reduced form. It is enough to give reduced expressions for the elements of $-S$ and of $S + S$. But from $\zeta = (1 + b)/2$ we have $2\zeta = 1 + b$, and

$$-1 = b - 2\zeta = \zeta + b - 3\zeta = \zeta + b + \zeta b^2$$

gives

$$-\zeta = 1 + b + \zeta b^2 .$$

Similarly one proves

$$2 = \zeta + b + b^2 + \zeta b^3 , \quad 1 + \zeta = \zeta b + \zeta b^2 + b^3 + \zeta b^4 .$$

(Although we do not need it later, let us also note $\zeta^2 = 1 + \zeta b$. This shows that $\text{Im } \Phi$ is a subring.) We still have to prove that the mapping Φ is *injective*. This is easily seen by using the field \mathbb{Q}_3 of 3-adic numbers and its quadratic extension K obtained by adjoining a square root of -3 . One can think of \mathbb{Q}_3 as consisting of formal (infinite) expansions

$$\sum_{i \geq k} a_i 3^i \quad (a_i \in \{0, 1, 2\}, k \in \mathbb{Z}) .$$

(One can also work with representatives $a_i = 0$ or ± 1 , or any other set S of representatives of $\mathbb{Z} \bmod 3\mathbb{Z}$.) The sums $\sum_{i \geq 0} a_i 3^i$ make up the subring \mathbb{Z}_3 of 3-adic integers: this is a maximal subring in \mathbb{Q}_3 . The ring \mathbb{Z}_3 is a principal ideal domain; its ideals are of the form $3^l \mathbb{Z}_3$ ($l \geq 0$). The quadratic extension $K = \mathbb{Q}_3(b)$ where $b^2 = -3$ also contains a maximal subring R ; it is not hard to see that R too is a principal ideal domain and that its ideals are of the form $b^l R$ ($l \geq 0$). In particular, it has a unique maximal ideal $P = bR$, the corresponding quotient is

$$R/P = \mathbb{Z}_3/3\mathbb{Z}_3 = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} = \mathbb{F}_3$$

where \mathbb{F}_3 denotes the field with 3 elements. (One says that the quadratic extension K/\mathbb{Q}_3 is *totally ramified*.) If a set of representatives S of $R \bmod P$ is chosen, then the elements of K admit unique expansions

$$\sum_{i \geq k} a_i b^i \quad (a_i \in S, k \in \mathbb{Z}) ,$$

and the elements of R admit unique expansions

$$\sum_{i \geq 0} a_i b^i \quad (a_i \in S) .$$

I claim that we can take $S = \{0, 1, \zeta\}$. Indeed, we have seen

$$-1 = \zeta + b + \zeta b^2$$

and this proves that $\zeta \equiv -1 \pmod{P}$ (recall $P = bR$). This already proves that distinct finite sums $\sum_{i \geq 0} a_i b^i$ correspond to distinct elements of L (they are distinct in R !) \square

Let us now consider the index set $I = \{i < 0, i \in \mathbb{Z}\}$ and the compact set S^I (with the product of the discrete topologies). Since $|b^{-1}| < 1$ the series

$$\sum_{i < 0} a_i b^i$$

converge absolutely in \mathbb{C} for all sequences $a = (a_i) \in S^I$, and we obtain a continuous map

$$S^I \rightarrow \mathbb{C} : a = (a_i) \mapsto \sum_{i < 0} a_i b^i$$

which we still denote by Φ . Its image $\Phi(S^I) = F$ is a compact subset of \mathbb{C} . By definition bF consists of the sums

$$\sum_{i \leq 0} a_i b^i = a_0 + \sum_{i < 0} a_i b^i \quad (a_i \in S)$$

so that $bF = F \cup (1 + F) \cup (\zeta + F)$. Similarly, since $b^4 = 9$, we have $9F = \bigcup (a + F)$ where the union is taken over $a \in S + Sb + Sb^2 + Sb^3$. The homothetic $9F$ of F is made up of 81 pieces congruent to F (a puzzle!). Let us denote by $F_k \subset F$ the finite part consisting of the sums $\sum_{-k \leq i < 0} a_i b^i$. It is obvious that $F_\infty = \bigcup_{k \geq 1} F_k$ is dense in F .

Lemma. *The origin is an interior point of F .*

Proof. It is easy to make pictures of the sets F_k for some small values of k . For example $9F_4 = S + Sb + Sb^2 + Sb^3$ which contains 81 elements is pictured in Figure 2. These pictures show that one can find an open neighbourhood of the origin $U = \{z \mid |z| < \epsilon\}$ in \mathbb{C} such that $F_\infty \cap U$ is dense in U . Hence $F \cap U = U$ since it is both closed and dense in U . (From the fact that the origin has six neighbours in F_4 the assiduous reader will infer an explicit value for ϵ above!)

Proposition 2. (a) *The set F_∞ is contained in the interior of F .*

(b) *The set F_∞ is a set of representatives for $L[1/b] \bmod L$, i.e. $L[1/b]$ can be written as disjoint union:*

$$L[1/b] = \bigcup_{\gamma \in L} (\gamma + F_\infty).$$

Proof. To prove (a), observe that if $z \in F_\infty$, say $z = \sum_{-k \leq i < 0} a_i b^i \in F_k$, then $z + b^{-k}F \subset F$. Hence z is an interior point of F by the lemma. For (b) observe that an element z of $b^{-k}L$ has an expression as a *finite* sum $\sum_{-k \leq i} a_i b^i$ and accordingly can be decomposed

$$z = \sum_{-k \leq i < 0} a_i b^i + \sum_{i \geq 0} a_i b^i \in \gamma + F_k \quad \text{with} \quad \gamma = \sum_{i \geq 0} a_i b^i \in L.$$

In fact, we see that

$$b^k L = \bigcup_{\gamma \in L} (\gamma + F_k).$$

F



Fig. 3 The set F (Computer image by C. Begum).

Corollary. *The set F is a fundamental domain for L in \mathbb{C} : $\mathbb{C} = F + L$ and the intersection of two distinct translates of F has no interior point.*

Proof. From the fact that the origin is an interior point of F we deduce that for any $z \in \mathbb{C}$ there is a positive integer k such that $b^{-k}z \in F$. Hence

$$b^{-k}z = \sum_{i < 0} a_i b^i \quad (a_i \in S) ,$$

$$z = \sum_{i < 0} a_i b^{i+k} = \sum_{j < 0} a_{j-k} b^j + \sum_{0 \leq j < k} a_{j-k} b^j \in F + L .$$

This proves that $\mathbb{C} = \bigcup_{\gamma \in L} (\gamma + F)$. On the other hand, if $F \cap (\gamma + F)$ has an interior point, let B be an open disc (of positive radius) contained in this intersection. Then

$$B \cap F_\infty \subset (\gamma + F) \cap L[1/b] = \gamma + F_\infty$$

proves that $(\gamma + F_\infty) \cap F_\infty$ is not empty.

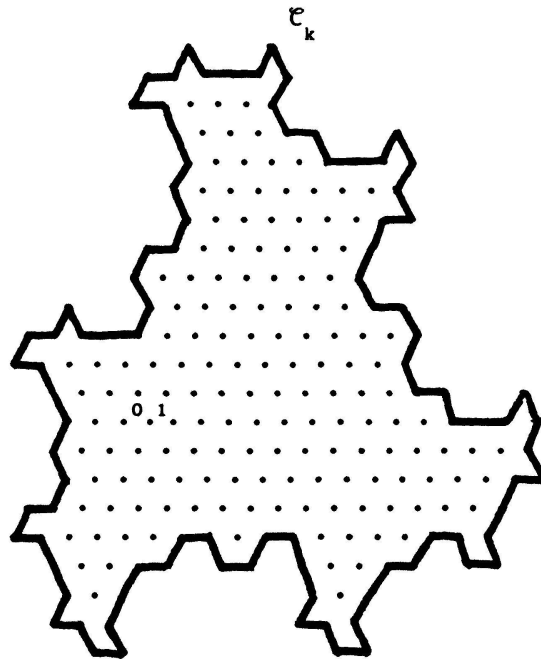


Fig. 4

Proposition 3. *The boundary of F is a Jordan curve \mathcal{C} of fractal dimension $d = \log 4 / \log 3 = 1,26\dots$*

Proof. Coming back to the pictures of the sets F_k for small values of k , e.g. to F_4 or its homothetic $9F = S + Sb + Sb^2 + Sb^3$, containing 81 elements, we see that we can take polygonal lines \mathcal{C}_k with vertices at the boundary points of F_k (points having less than 6 neighbours in F_k , cf. Figure 4). The curves \mathcal{C}_k converge uniformly to a curve \mathcal{C} . To determine the dimension of \mathcal{C} we observe that $\sqrt{-3} \cdot \mathcal{C}$ is a union of two copies of \mathcal{C} : Figure 5 shows how two copies of \mathcal{C} are used to reconstruct this homothetic

$$\sqrt{-3} \cdot \mathcal{C} = \sqrt{-3} \cdot \partial F = \partial(\sqrt{-3} \cdot F) .$$

Since the similarity dimension d of a set A is defined by

$$\text{Size}(\lambda A) = \lambda^d \cdot \text{Size}(A)$$

we see that, in our case, we must have $(\sqrt{3})^d = 2$, whence $d \cdot \log \sqrt{3} = \log 2$. This proves Proposition 3.

Corollary. *The set F is connected (it is homeomorphic to a closed disc). The interior of F is the bounded component of $\mathbb{C} - \mathcal{C}$ and F is equal to the closure of its interior.*

Observe that the dimension of \mathcal{C} is the same as the dimension of the von Koch curve.

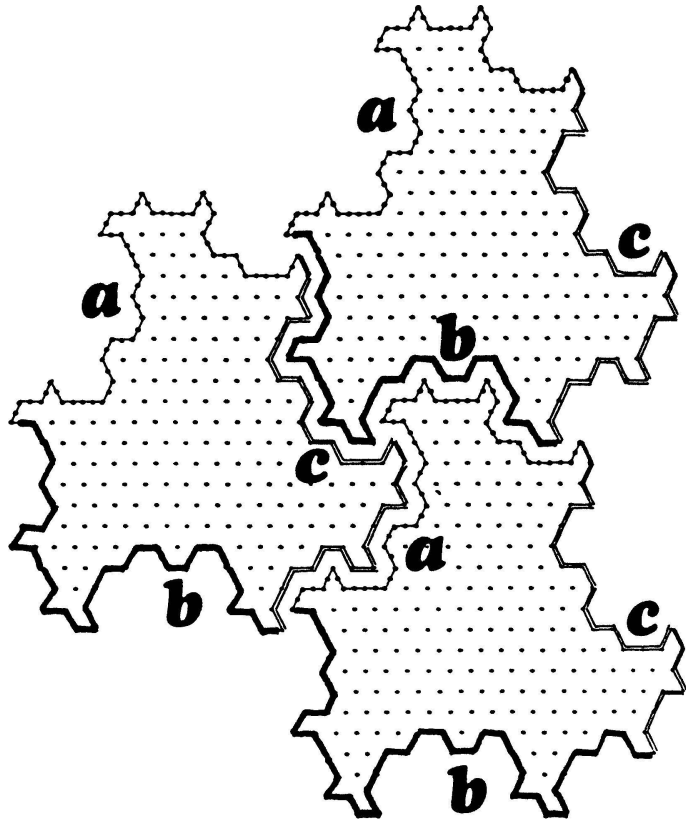


Fig. 5

References

- [1] W.J. Gilbert: Fractal Geometry derived from Complex Bases, *Mathematical Intelligencer*, 4 (1982), 78–86
- [2] D. Goffinet: Number Systems with a Complex Base: a Fractal Tool for Teaching Topology, *Amer. Math. Monthly*, 98 (1991), 249–255.
- [3] D.E. Knuth: *The Art of Computer Programming*, Addison-Wesley; Vol. 2, Chap. 4, pp. 189–193.
- [4] B.B. Mandelbrot: *Fractals, Form, Chance and Dimension*, Freeman and Co, 1977; pp. 313–314.

Alain Robert
Institut de Mathématiques
Rue Emile Argand 11
CH-2007 Neuchâtel (Suisse)