El. Math. *49* (1994) 0013-6018/94/010126-05$1.50 + 0.20/0

Aufgaben

Neue Aufgaben

Lösungen sind erbeten bis zum 10. Februar 1995 an:

- Peter Gallin, Tüfenbach 176, CH-8494 Bauma

  oder

- Hans Walser, Gerlikonerstrasse 29, CH-8500 Frauenfeld

Aufgabe 1087: Der Inkreismittelpunkt des Seitenmittendreiecks eines Dreiecks ABC ist das Potenzzentrum der drei Ankreise des Dreiecks ABC. Man beweise folgende bemerkenswerte Verallgemeinerung: Es seien k_1, k_2 und k_3 drei Kreise, die aus den Seitengeraden eines Dreiecks ABC Strecken vorgegebener Länge herausschneiden: Aus BC eine Strecke der Länge u, aus CA eine Strecke der Länge v und aus AB eine Strecke der Länge w. Dann ist das Potenzzentrum von k_1, k_2 und k_3 der Mittelpunkt eines Kreises, der aus den Seitengeraden des Seitenmittendreiecks von ABC Strecken der Längen $u/2$, $v/2$ und $w/2$ herausschneidet.

Roland Stärk, Schaffhausen, CH

Aufgabe 1088: Summen mit Quadraten von Binomialkoeffizienten.

Summiert man die Zahlen der n-ten Zeile im Pascaldreieck, erhält man 2^n. Versieht man diese Zahlen der Reihe nach mit den Gewichten $0, 1, 2, \ldots, n$, so erhält man $n \cdot 2^{n-1}$. Wählt man die Quadratzahlen $0, 1, 4, \ldots, n^2$ als Gewichte, so erhält man $n(n+1) \cdot 2^{n-2}$. Allgemein gilt

$$\sum_{j=1}^{n} j^r \binom{n}{j} = \frac{\partial^r}{\partial t^r}(1+e^t)^n \bigg|_{t=0} \quad , \quad r = 1, 2, \ldots \quad .$$

Nun kennt man aber auch die Summe der Quadrate aller Binomialkoeffizienten einer Zeile im Pascaldreieck. Es stellt sich also die Frage, ob man das obige Spiel mit Gewichten auch mit den Quadraten der Binomialkoeffizienten treiben kann. Es sei

$$Q(n,r) = \sum_{j=1}^{n} j^r \binom{n}{j}^2 \quad , \quad r = 0, 1, 2, \ldots \quad .$$

Man beweise, dass

$$Q(n,0) = \binom{2n}{n} - 1$$

$$Q(n,1) = n \cdot \binom{2n-1}{n}$$

$$Q(n,2) = n^2 \cdot \binom{2n-2}{n-1}$$

$$Q(n,3) = n^2(n+1) \cdot \binom{2n-1}{n-1} \quad .$$

Renate Golombek, Marburg, D

Aufgabe 1089 (Die einfache dritte Aufgabe): Gesucht ist ein möglichst einfacher und kurzer Konstruktionsweg der elementargeometrischen Aufgabe, ein regelmässiges Fünfeck in ein flächengleiches Quadrat zu verwandeln.

Franz Mayer, München, D

Lösungen

Aufgabe 1075. Man suche alle natürlichen Zahlen x, so dass 10 die kleinste natürliche Zahl n ist, für die $n!$ durch x teilbar ist.

(Hinweis: Es handelt sich hier um die Umkehrung der sogenannten Smarandache-Funktion $\eta : \mathbb{Z}^* \to \mathbb{N}$. Es ist $\eta(m)$ die kleinste natürliche Zahl n, so dass $n!$ durch m teilbar ist.)

Thomas Martin, Phoenix, USA

Auswertung der eingesandten Lösungen. Von den 14 eingesandten Lösungen sind 12 korrekt. Sie stammen von Peter Bundschuh (Köln, D), Harald Fripertinger (Graz, A), Walther Janous (Innsbruck, A), Hans Irminger (Wetzikon, CH), Joachim Klose (Bonn, D), Hansjürg Lädrach (Aarwangen, CH), Pieter Moree (Princeton, USA), Andreas Müller (Altendorf, CH), Werner Raffke (Vechta, D), Hans Schneider (Freiburg i. Br., D), H.-J. Seiffert (Berlin, D) und Michael Vowe (Therwil, CH).

Alle Lösungen verwenden den gleichen Gedankengang und unterscheiden sich nur im Grad der Formalisierung in der Niederschrift. Die knappste Beschreibung der gesuchten Menge stammt von Peter Bundschuh, dessen Lösung wir hier vorstellen:

Lösung. Für $x \in \mathbb{N}$ werde $\eta(x) := \min\{n \in \mathbb{N} : x | n!\}$ gesetzt. Die Aufgabe besteht darin, sämtliche x mit $\eta(x) = 10$ zu ermitteln. Aus der Definition folgt, dass $\eta(x) = 10$ gleichwertig ist mit

$$x | 10! \quad \text{und} \quad x \nmid 9! \quad . \tag{$*$}$$

Wegen der kanonischen Primfaktorzerlegungen

$$9! = 2^7 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7 \quad \text{und} \quad 10! = 2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7$$

verlangen die beiden Bedingungen $(*)$, dass die gesuchten Zahlen x mindestens einen der beiden Faktoren 2^8 oder 5^2 enthalten. Daher gilt

$$x = 2^{8-\alpha} \cdot 3^{\beta} \cdot 5^{2-\gamma} \cdot 7^{\delta}$$

mit $\alpha \in \{0, \cdots, 8\}$, $\beta \in \{0, \cdots, 4\}$, $\gamma \in \{0, 1, 2\}$, $\delta \in \{0, 1\}$, $\min(\alpha, \gamma) = 0$. Dies sind exakt 110 natürliche Zahlen x, die hier nicht weiter hingeschrieben werden sollen; die kleinste ist 25, die grösste ist $10! = 3628800$.

Anmerkungen.

1. Mit der Definition

$$X := \{x \in \mathbb{N} : x | n! \quad \text{und} \quad x \nmid (n-1)!\}$$

verallgemeinert Harald Fripertinger das Problem von 10 auf ein beliebiges $n \in \mathbb{N}$. Dazu sei $c(p, n)$ die Vielfachheit des Primteilers p in $n!$. Bezeichnet man mit p Primteiler von $n!$ und mit p_0 Primteiler von n, und sind j und j_p ganze Zahlen, so kann man die Menge X folgendermassen darstellen:

$$X = \bigcup_{p_0 | n} \bigcup_{j=c(p_0, n-1)+1}^{c(p_0, n)} \left\{ {p_0}^j \prod_{p \neq p_0} p^{j_p} : 0 \leq j_p \leq c(p, n) \right\} .$$

2. Die beiden falschen Lösungen sind erstaunlicherweise gleich. Sie lauten:

$$X = \left\{ 2^{8 \cdot \alpha} \cdot 3^{\beta} \cdot 5^{2 \cdot \gamma} \cdot 7^{\delta} : \alpha, \gamma \in \{0, 1\}, \alpha + \gamma \geq 1, \beta \in \{0, \cdots, 4\}, \delta \in \{0, 1\} \right\} .$$

3. H.-J. Seiffert weist darauf hin, dass der Aufgabensteller die gleiche Aufgabe bereits als Problem B-740 in Fib. Quart. 31(2), p. 181, 1993 veröffentlicht hat.

4. Weiterführende Angaben zur Smarandache-Funktion findet man in "Smarandache Function Journal", Number Theory Publishing Co., R. Muller Editor, Phoenix, New York, Lyon, Vol. 1, No. 1, 1990, ISSN 1053-4792.

Aufgabe 1076. Ein Sprachlehrer möchte für die Semesternote seiner Schüler die Noten der schriftlichen Arbeiten gegenüber den Noten für mündliche Leistungen stärker gewichten. Dazu versieht er die beiden Mittelwerte (um es genau zu machen, ohne jegliche Rundung) beipielsweise mit den Gewichten 3 und 2 und teilt die erhaltene Summe durch 5, ohne zu berücksichtigen, aus wie vielen Einzelnoten die Mittelwerte berechnet worden sind. So erhält er beispielsweise mit einem schriftlichen Mittelwert von $\bar{x} = 4.00$ und einem mündlichen von $\bar{y} = 5.00$ den Wert 4.40. Würde man aber berücksichtigen, dass der schriftliche Mittelwert aus 4 Einzelnoten und der mündliche aus 9 Einzelnoten berechnet worden ist, ergäbe sich der korrekte Wert 4.60. Bei einem Mittel von $\bar{x} = 3.00$ aus 9 schriftlichen Arbeiten und einem solchen von $\bar{y} = 4.00$ bei 4 mündlichen Noten erhält er den Wert 3.40 (anstatt 3.23), was gerade der verkehrten Gewichtung 2 zu 3 bei korrekter Berechnung entspricht.

Unter welchen Umständen genau heben sich bei einer Gewichtung $u : v$ von $s \geq 1$ schriftlichen bzw. $m \geq 1$ mündlichen Einzelnoten mit den Mittelwerten $\bar{x}$ bzw. $\bar{y}$ die Berechnungsunterschiede auf, wann werden sie maximal und wann entspricht die fehlerhafte Berechung gerade dem korrekt gerechneten Mittel mit vertauschter Gewichtung $v : u$?

Roland Wyss, Flumenthal, CH

Auswertung der eingesandten Lösungen. Es sind 5 Lösungen eingetroffen: H. Fripertinger (Graz, A), Friedhelm Götze (Jena, D), Walther Janous (Innsbruck, A), H.-J. Seiffert (Berlin, D), Michael Vowe (Therwil, CH). Die Lösungswege sind weitgehend dieselben: Aus $z_f(u,v) = \frac{u\bar{x}+v\bar{y}}{u+v}$ für die falsche und $z_k(u,v) = \frac{us\bar{x}+vm\bar{y}}{us+vm}$ für die korrekte Berechnungsart folgt für die Differenz

$$|z_k - z_f| = \left|\frac{uv(s-m)(\bar{x}-\bar{y})}{(u+v)(us+vm)}\right|$$

Diese Differenz verschwindet für $s = m$ oder für $\bar{x} = \bar{y}$.

Für die Berechnung des Maximums müssen zuerst die Randbedingungen festgelegt werden. Die meisten Lösungen gehen von konstanten Werten für $s, m, \bar{x}$ und $\bar{y}$ aus. Dann kann (nach Götze) das Maximum auch ohne Differentialrechnung ermittelt werden: Es ist

$$|z_k - z_f| = \left|\frac{\sqrt{s}-\sqrt{m}}{\sqrt{s}+\sqrt{m}}\,(1-q)(\bar{x}-\bar{y})\right|$$

mit

$$q := \frac{(u\sqrt{s}-v\sqrt{m})^2}{(u\sqrt{s}-v\sqrt{m})^2 + uv(\sqrt{s}+\sqrt{m})^2}\,.$$

Das Maximum wird erreicht für $q = 0$, das heisst für

$$u : v = \sqrt{m} : \sqrt{s}\,.$$

Seiffert setzt als Randbedingung $u, v, \bar{x}, \bar{y}$ konstant, diskutiert also das Problem mit den Variablen s und m. Mit $z := \frac{s}{m}$ wird

$$|z_k - z_f| = \alpha\left|\frac{z-1}{uz+v}\right| =: \alpha|f(z)|\,.$$

Aus $f'(z) = \frac{u+v}{(uz+v)^2} > 0$ folgt die Monotonie dieser Funktion; die Funktion $|f(z)|$ hat daher (Rand)maxima in $s = 1$ und $m = 1$.

Für die letzte Frage der Aufgabenstellung folgt aus $z_f(u,v) = z_k(v,u)$ die Bedingung $(mu^2 - sv^2)(\bar{x}-\bar{y}) = 0$, also bei $\bar{x} \neq \bar{y}$ schliesslich

$$u : v = \sqrt{s} : \sqrt{m}\,.$$

Aufgabe 1077 (Die einfache dritte Aufgabe). Ausgehend von einem Dreieck $A_1A_2A_3$ werden Kreise so gezeichnet, dass das Zentrum des Bogens B_kB_{k+1} in der Ecke

$A_{k+2(\bmod 3)}$ liegt. Die aus den sechs Kreisbogen zusammengesetzte Figur hat in jeder Richtung denselben Durchmesser, ist also eine sogenannte Orbiforme, von den Schülern "Gleichdick" genannt. Man zeige nun, dass die sechs Übergangspunkte $B_1, B_2, \ldots, B_6$ auf einem Kreis liegen.

Hans Walser, Frauenfeld, CH

Auswertung der eingesandten Lösungen. Es sind sieben Lösungen eingetroffen: Hans Egli (Zürich, CH), Friedhelm Götze (Jena, D), Hans Irminger (Wetzikon, CH), Walther Janous (Innsbruck, A), Werner Raffke (Vechta, D), Georg Unger (Dornach, CH), Michael Vowe (Therwil, CH).

Die meisten Lösungen zeigen zunächst mit einer Symmetrieüberlegung, dass der Mittelpunkt eines allfälligen Kreises durch die sechs Übergangspunkte $B_1, B_2, \ldots, B_6$ notwendigerweise der Inkreismittelpunkt des Dreieckes $A_1A_2A_3$ sein muss. Dann kann — mit verschiedenen Methoden — gezeigt werden, dass die Strecken $\overline{IB_i}$ tatsächlich alle gleich lang sind.

Irminger zeigt mit einfachen Winkelüberlegungen, dass die Vierecke $B_iB_{i+1}B_{i+2}B_{i+3}$ (Indizes mod 6) Sehnenvierecke sind. Da die Umkreise K_i und K_{i+1} der beiden aufeinanderfolgenden Sehnenvierecke $B_iB_{i+1}B_{i+2}B_{i+3}$ und $B_{i+1}B_{i+2}B_{i+3}B_{i+4}$ die drei Punkte B_{i+1}, B_{i+2}, B_{i+3} gemeinsam haben, ist $K_i = K_{i+1}$. Daraus folgt aber, dass sämtliche Umkreise aufeinanderfallen. Damit ist die Behauptung bewiesen, ohne dass der Mittelpunkt des Kreises genannt wird.