Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Band: 49 (1994)

Artikel: Calcul des probabilités et modélisation
Autor: Carnal, Henri
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-45434

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Siehe Rechtliche Hinweise.

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. Voir Informations légales.

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. See Legal notice.

Download PDF: 18.10.2024

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

El. Math. 49 (1994)

0013-6018/94/040166-08$1.50 + 0.20/0
© 1994 Birkhäuser Verlag, Basel

Calcul des probabilités et modélisation

Henri Carnal

Henri Carnal, né en 1939, a obtenu son doctorat en 1963 à l'École Polytechnique Fédérale (ETH) de Zurich. Après des séjours à Vienne, Paris et New York, il a été nommé en 1966 professeur à l'Université de Berne, où il enseigne en particulier le calcul des probabilités. Il a dirigé à plusieurs reprises des stages destinés aux enseignants dans le domaine des mathématiques appliquées et des probabilités.

Introduction

Les lycées suisses ont, depuis peu, la possibilité de remplacer le vénérable cours de géométrie descriptive par un programme de mathématiques appliquées encore à définir. L'idéal serait d'inciter les élèves à effectuer des travaux d'assez longue durée (plusieurs semaines) sur des thèmes inspirés par des situations concrètes. Un domaine privilégié pourrait être celui des jeux de société, où le calcul des probabilités intervient de manière naturelle. C'est pourquoi nous présentons ici quelques problèmes sensiblement plus exigeants que les exercices habituels, mais encore susceptibles d'être abordés avec les connaissances acquises au lycée. Dans un autre article [1], nous évoquons des sujets amenés par l'actualité économique ou politique.

Welcher Vater, welche Mutter kennt nicht das Problem: Eine Kaugummifirma ködert die Käufer, indem sie ihren Produkten Fotos von Fussballern oder Olympiasiegern oder Tennisspielerinnen beilegt, die in einem Album gesammelt werden sollen. Wieviele Käufe müssen die Kinder tätigen, damit sie bei 100 verschiedenen Bildern mit vertretbarer Wahrscheinlichkeit einen vollständigen Satz erhalten? Die Zahlenwerte, welche die Wahrscheinlichkeitsrechnung zu diesen und ähnlichen Problemen liefert, überraschen oft. Ernst genommen würden sie in vielen Fällen ein anderes Verhalten als das "übliche" nahelegen. – In weiteren Abschnitten dieses Beitrages beschäftigt sich Henri Carnal mit der Eintretenswahrscheinlichkeit eines Ruins und ferner mit der Verbreitung eines Gerüchtes bzw. einer ansteckenden Krankheit. Hilfsmittel der modernen Wahrscheinlichkeitstheorie wie zum Beispiel Martingale kommen hier zum Zuge. *ust*

1. Temps d'attente

Il existe une multitude de problèmes réels ou construits à propos des temps d'attente: temps nécessaire pour atteindre un état particulier ou une distribution stable, temps de convergence d'un processus d'itération, etc. On trouvera de nombreux exemples (souvent assez ardus) dans l'ouvrage [2]. En ce qui concerne les temps de convergence pour les chaînes de Markov, on peut aussi consulter [3].

Nous commencerons par un problème tout à fait classique: un fabricant accompagne ses produits de cadeaux choisis au hasard parmi k modèles. Combien d'achats sont-ils nécessaires pour obtenir toute la collection?

On appelle T_i le nombre d'achat effectués jusqu'à l'acquisition de i objets différents. La *variable aléatoire* (v.a.) qui nous intéresse est donc $T = T_k$. Si l'on pose $n = k(\ln k + m)$ et que l'on appelle A_j^n l'événement *pas d'objet du modèle j parmi les n premiers*, on trouve l'inégalité:

$$\text{(1.1)}\quad \mathrm{P}(T > n) = \mathrm{P}(A_1^n \cup \cdots \cup A_k^n) \leq \sum_{i=1}^{k} \mathrm{P}(A_i^n) = k\left(1 - \frac{1}{k}\right)^n \cong ke^{-n/k} = e^{-m}.$$

Pour $k = 100$, il faut donc environ 760 achats si l'on veut être sûr (à 95 %) d'obtenir toute la collection.

Nous remarquerons encore que la différence $U_i = T_{i+1} - T_i$ a une distribution géométrique: $\mathrm{P}(U_i > n) = (i/k)^n$, que $U_1, \ldots, U_{k-1}$ sont des v.a. indépendantes et que $T = 1 + U_1 + \cdots + U_{k-1}$. Cela va nous aider à résoudre un deuxième problème, apparemment assez différent du premier:

Nous considérons un jeu de k cartes, numérotées du 1 à k et arrangées dans cet ordre de bas en haut du paquet. Nous allons les brasser en soulevant à chaque fois la carte située au sommet du paquet (la carte k à la première opération) et en replaçant cette carte au hasard dans le tas, les k positions possibles étant supposées équiprobables. Combien d'opérations sont-elles nécessaires à un *bon brassage*?

Il faut d'abord définir ce que sont des cartes *bien brassées*: Après n opérations du type évoqué, on aura obtenu une permutation aléatoire σ_n, donc un élément aléatoire parmi les $k!$ du groupe S_k. Nous exigerons que, pour tout sous-ensemble A de S_k (le nombre d'éléments de A sera noté $|A|$), on ait $|\mathrm{P}(\sigma_n \in A) - |A|/k!| \leq \epsilon$, avec $\epsilon > 0$.

On note V_i le nombre d'opérations jusqu'au moment où $i' = i - 1$ cartes sont placées sous la carte 1, celle qui au départ était la plus basse ($i = 2, \ldots, k$). On se persuade facilement, par induction sur i, qu'à ce moment-là les i' cartes inférieures sont *bien brassées*: chacune des $i'!$ permutations a la probabilité $1/i'!$ Cela vaut en particulier pour $i = k$ et l'on en conclut qu'après $V_k + 1$ opérations les cartes sont bien brassées. Les opérations ultérieures ne changent rien à cet état de fait et nous pouvons donc écrire:

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(\sigma_n \in A) &= \mathrm{P}(\sigma_n \in A \mid V_k < n) \cdot \mathrm{P}(V_k < n) + \mathrm{P}(\sigma_n \in A \mid V_k \geq n) \cdot \mathrm{P}(V_k \geq n) \\ &= \frac{|A|}{k!} \cdot \mathrm{P}(V_k < n) + \mathrm{P}(\sigma_n \in A \mid V_k \geq n) \cdot \mathrm{P}(V_k \geq n)\ ;\end{aligned}$$

$$\left|\mathrm{P}(\sigma_n \in A) - \frac{|A|}{k!}\right| = \left|\mathrm{P}(\sigma_n \in A \mid V_k \geq n) - \frac{|A|}{k!}\right| \cdot \mathrm{P}(V_k \geq n) \leq \mathrm{P}(V_k \geq n) .$$

Or $W_i = V_{i+1} - V_i$ a la même distribution que le U_{k-i} du problème de tout à l'heure: à chaque opération, on replace la carte soulevée dans l'une des $k-i$ positions supérieures avec la probabilité $(k-i)/k$, ce qui implique

$$\mathrm{P}(W_i > n) = \left(\frac{k-i}{k}\right)^n .$$

De plus, nos W_i sont toujours des v.a. indépendantes et $W_1 + W_2 + \cdots + W_{k-1} = V_k$, donc $V_k + 1$ a la même distribution que le T du problème précédent. (1.1) et l'inégalité trouvée donnent alors

$$\left|\mathrm{P}(\sigma_n \in A) - \frac{|A|}{k!}\right| \leq \mathrm{P}(V_k \geq n) = \mathrm{P}(T > n) \cong e^{-m} \tag{1.2}$$

où $n = k(\ln k + m)$.

Pour $k = 52$ et $m = 3$ (donc $e^{-m} \cong 0,05$), on arrive à $n \cong 360$. Il est possible de démontrer que l'inégalité est presque une égalité.

P. Diaconis, un ancien prestidigitateur, discute dans [2] des méthodes de brassage plus réalistes: si l'on divise le paquet en deux parties ayant respectivement i et $j = k - i$ éléments et si l'on intercale de manière idéale le premier ensemble dans le second (l'ensemble permuté doit occuper chacune des $\binom{k}{i}$ positions possibles avec la même probabilité), on obtient un brassage parfait après environ $\log_2(k/2)$ opérations.

2. Problèmes de ruine

Les premiers problèmes de ruine furent résolus par Pascal en 1654. Aujourd'hui, on les traite de préférence à l'aide de la théorie des martingales, ébauchée par Ville en 1940 et développée par Doob dans les années suivantes. Nous en présentons ici les premiers éléments (pour un exposé complet, voir [4]).

Ω sera un ensemble, $\mathcal{B}$ une partition en sous-ensembles $A_1, A_2, \ldots, A_{\hat{m}}$ (souvent, les A_i seront de la forme $\{\omega : X(\omega) = a, Y(\omega) = b, \ldots\}$ et on dira alors que $\mathcal{B}$ est engendrée par les v.a. $X, Y, \ldots$). En même temps que $\mathcal{B}$, nous considérons la famille de toutes les réunions de la forme $A_i \cup A_j \cup \ldots$ Cette famille est une *algèbre* de sous-ensembles: elle est stable pour les opérations de réunion, d'intersection et de complémentation; par abus de notation, nous l'appellerons encore $\mathcal{B}$. Une v.a. est dite $\mathcal{B}$-mesurable si elle est constante sur chaque A_i. Cela est vrai en particulier pour les indicatrices I_{A_i}, qui valent 1 sur A_i et 0 ailleurs. Toute v.a. $\mathcal{B}$-mesurable est combinaison linéaire de telles indicatrices.

L'espérance conditionnelle d'une v.a. X par rapport à $\mathcal{B}$, notée $\mathrm{E}(X|\mathcal{B})$, est la v.a. $\mathcal{B}$-mesurable Y qui prend sur A_i la valeur suivante, que l'on pourra considérer comme la moyenne de X sur A_i:

$$y_i = \mathrm{E}(XI_{A_i})/\mathrm{P}(A_i) \quad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

En tenant compte des remarques qui précèdent, on démontre aisément:

(2.1) L'application $X \mapsto Y = \mathrm{E}(X|\mathcal{B})$ est linéaire, positive, donc monotone.

(2.2) Si Z est $\mathcal{B}$-mesurable on a $\mathrm{E}(XZ) = \mathrm{E}(YZ)$ et $\mathrm{E}(XZ|\mathcal{B}) = Z\mathrm{E}(X|\mathcal{B})$, en particulier: $\mathrm{E}(X) = \mathrm{E}(Y)$ et $\mathrm{E}(Z|\mathcal{B}) = Z$.

(2.3) Si $\mathcal{B} \subset \mathcal{C}$, c'est-à-dire si les sous-ensembles de la première partition sont des réunions de sous-ensembles de la seconde, on a: $\mathrm{E}(X|\mathcal{B}) = \mathrm{E}\left[\mathrm{E}(X|\mathcal{C})|\mathcal{B}\right]$.

X est dite *indépendante de* $\mathcal{B}$ si $\mathrm{P}(X = c|A_i) = \mathrm{P}(X = c)$ pour tout i et tout c. Cela est en particulier vrai pour l'algèbre *triviale* $\mathcal{B} = \{\Phi, \Omega\}$.

(2.4) Si X est indépendante de $\mathcal{B}$ on a: $\mathrm{E}(X|\mathcal{B}) = \mathrm{E}(X)$ (valeur constante).

Une *martingale* $(X_n, \mathcal{B}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ représente l'évolution de la fortune d'un joueur qui participe à une suite de jeux équilibrés: Si X_n est la fortune après n parties et si les éléments de $\mathcal{B}_n$ sont les sous-ensembles que l'on peut distinguer à ce moment-là ($\mathcal{B}_n$ sera souvent engendrée par $X_0, X_1, \ldots, X_n$ ou par un autre ensemble de v.a. dont dépendra le précédent), on postulera, outre la mesurabilité de X_n par rapport à $\mathcal{B}_n$:

$$(2.5) \qquad \mathcal{B}_n \subset \mathcal{B}_{n+1} \text{ en tant qu'algèbre,}$$

$$(2.5') \qquad \mathrm{E}(X_{n+1}|\mathcal{B}_n) = X_n.$$

Dans les cas évidents, nous ne décrirons pas explicitement $\mathcal{B}_n$.

(2.5′) signifie que la valeur moyenne de la fortune future, calculée à partir des connaissances actuelles, vaut précisément la fortune présente: on peut songer à la valeur d'actions en bourse.

En utilisant (2.3), on démontre par récurrence sur k à partir de (2.5′):

$$(2.6) \qquad \mathrm{E}(X_{n+k}|\mathcal{B}_n) = X_n \ (k = 1, 2, \ldots), \text{ en particulier } \mathrm{E}(X_n|\mathcal{B}_0) = X_0.$$

Un *temps d'arrêt* est une v.a. à valeurs dans $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$ et telle que

$$(2.7) \qquad \{\omega : T(\omega) = n\} \in \mathcal{B}_n$$

pour $n \in \mathbb{N}$. On s'arrête donc au temps n sur la base d'informations recueillies jusqu'à ce moment-là (il est permis de songer aux exemples du paragraphe 1). On démontre facilement l'équivalence de (2.7) avec

$$(2.8) \qquad \{\omega : T(\omega) \leq n\} \in \mathcal{B}_n \ .$$

La martingale *arrêtée au temps* n est la suite

$$X'_n(\omega) = \begin{cases} X_n(\omega) & \text{si } n < T(\omega) \\ X_{T(\omega)}(\omega) & \text{si } n \geq T(\omega)\ . \end{cases}$$

Nous négligerons parfois ω.

Théorème 1: $(X_n', \mathcal{B})$ *est encore une martingale.*

Démonstration: L'ensemble $\{\omega : T(\omega) > n\}$, complément de $\{T \leq n\}$, est dans $\mathcal{B}_n$ par (2.8). Partant de $X_{n+1}' - X_n' = I_{\{T>n\}}(X_{n+1} - X_n)$, on déduit

(a) la mesurabilité de X_n' par rapport à $\mathcal{B}_n$ (induction sur n),
(b) $\mathrm{E}(X_{n+1}' - X_n' | \mathcal{B}_n) = I_{\{T>n\}}\mathrm{E}(X_{n+1} - X_n | \mathcal{B}_n) = 0$ (par (2.5′) et (2.2)).

Théorème 2: *Si* (i) $T(\omega) \leq n_0$ *ou si* (ii) $\mathrm{P}(T(\omega) < \infty) = 1$ *et* $|X_n| \leq c$ *quel que soit* n, *alors* $\mathrm{E}(X_T | \mathcal{B}_0) = X_0$.
Ce deuxième théorème est fondamental en théorie des martingales. Il signifie qu'on ne saurait transformer un jeu équilibré en jeu favorable, même avec une bonne stratégie pour quitter le jeu. Les hypothèses ne peuvent pas être abandonnées: un joueur qui doublerait sa mise après chaque échec et s'arrêterait au premier succès ferait mentir le théorème ... à condition d'avoir des réserves illimitées.

Démonstration: Dans le cas (i), $X_T = X_{n_0}'$ et l'on applique (2.6). Dans le cas (ii), $X_T = \lim X_n'$ (avec probabilité 1) et l'on applique le théorème de Lebesgue sur la convergence bornée.

Problème de la ruine: A et B jouent une suite de parties indépendantes. A chaque partie, la probabilité de gagner est p pour A et $q = 1 - p$ pour B. La fortune initiale de A est i, celle de B est j (on pose $i + j = k$). Le gagnant de chaque partie reçoit 1 Fr. du perdant. Quelle est alors la probabilité que B soit ruiné avant A?

Solution: (a) $p = 1/2$. On appelle X_n la fortune de A après n parties et $\mathcal{B}_n$ l'algèbre engendrée par $X_0, X_1, \ldots, X_n$. On pose $T = \min\{n : X_n = 0 \text{ où } X_n = k\}$. $(X_n, \mathcal{B}_n)$ est une martingale, T un temps d'arrêt et $\mathrm{P}(T < \infty) = 1$ (il suffit que A gagne k parties successives pour que le jeu s'arrête et ce fait se produira en mk parties avec une probabilité supérieure à $1 - r^m$, où $r = 1 - 2^{-k} < 1$). Le théorème 2, cas (ii), donne alors (cf. (2.4) pour $\mathcal{B}_0$ triviale)

$$i = X_0 = \mathrm{E}(X_T | \mathcal{B}_0) = \mathrm{E}(X_T) = k\mathrm{P}(X_T = k),$$

d'où $\mathrm{P}(X_T = k) = i/k$.
On remarquera encore que X_{n+1}^2 vaut $(X_n - 1)^2$ ou $(X_n + 1)^2$ avec probabilité $1/2$ et donc que $\mathrm{E}(X_{n+1}^2 | \mathcal{B}_n) = X_n^2 + 1$. Il s'ensuit que $M_n = X_n(k - X_n) + n$ est encore une martingale par rapport à $\mathcal{B}_n$ et le théorème 2 implique

$$ij = M_0 = \mathrm{E}(M_T | \mathcal{B}_0) = \mathrm{E}(M_T) = \mathrm{E}(X_T(k - X_T) + T) = \mathrm{E}(T).$$

(b) $p \neq 1/2$. On pose $M_n = u^{X_n}$ avec $u = q/p$, solution de $pu + qu^{-1} = 1$, on peut toujours vérifier (2.5′) et on obtient en appliquant le théorème 2:

$$u^i = M_0 = \mathrm{E}(M_T) = u^k\mathrm{P}(X_T = k) + u^0\mathrm{P}(X_T = 0),$$

donc pour $u = q/p$

$$\mathrm{P}(X_T = k) = \frac{u^i - 1}{u^k - 1}.$$

Cas de 3 joueurs [6]: A, B et C ont des fortunes initiales i, j et k avec $i + j + k = h$. Chacun gagne une partie avec probabilité $1/3$ et reçoit alors 1 Fr. de chaque perdant. On s'arrête dès que l'un des joueurs est ruiné. Combien de parties aura-t-il joué en moyenne jusque là?

Solution: X_n, Y_n et Z_n seront les fortunes après n parties, $\mathcal{B}_n$ l'algèbre engendrée par $X_0, Y_0, Z_0, \ldots, X_n, Y_n, Z_n$ et $T = \min\{n : X_nY_nZ_n = 0\}$. $(X_{n+1}, Y_{n+1}, Z_{n+1})$ prend les valeurs $(X_n + 2, Y_n - 1, Z_n - 1)$, $(X_n - 1, Y_n + 2, Z_n - 1)$ et $(X_n - 1, Y_n - 1, Z_n + 2)$ avec à chaque fois la probabilité $1/3$ et l'on vérifie

$$\mathrm{E}\left(X_{n+1}Y_{n+1}Z_{n+1}|\mathcal{B}_n\right) = X_nY_nZ_n - (X_n + Y_n + Z_n) + 2 = X_nY_nZ_n - (h - 2).$$

On en déduit que $M_n = X_nY_nZ_n + n(h - 2)$ est une martingale pour $\mathcal{B}_n$ et que

$$ijk = M_0 = \mathrm{E}(M_T) = \mathrm{E}(T(h - 2)),$$

donc que $\mathrm{E}(T) = ijk/(i + j + k - 2)$.

Généralisation: Si, dans la définition (2.5′), l'égalité est remplacée par l'inégalité

$$\mathrm{E}(X_{n+1}|\mathcal{B}_n) \leq X_n,$$

on parle d'une *surmartingale*. Le théorème 2 se modifie naturellement en $\mathrm{E}(X_T|\mathcal{B}_0) \leq X_0$.

Ce résultat est utilisé dans [4] pour résoudre le problème que voici: Un joueur, qui possède une fortune initiale x, doit absolument atteindre la fortune $a > x$ (on peut toujours, en changeant au besoin d'unité, poser $a = 1$). Sa seule chance est de gagner la somme manquante au jeu de *rouge et noir* dans un casino. Il peut là, à chaque coup, engager tout ou partie de sa fortune, sachant que son enjeu sera perdu avec probabilité q et restitué à double avec probabilité $p = 1 - q < 1/2$. Comment faut-il jouer pour atteindre la somme $a = 1$ avec le maximum de chances?

On démontre l'optimalité de la stratégie *audacieuse*, celle qui consiste à engager la totalité de son avoir x si $x \leq 1/2$ et la différence $1 - x$ si $x \geq 1/2$. La probabilité d'atteindre le but en partant d'un avoir x est alors une fonction $f(x)$, que l'on calcule d'abord pour

$$x = \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \ldots, \frac{k}{2^n}, \ldots$$

à partir de la formule de récurrence

$$f(x) = \begin{cases} pf(2x) & \text{si } x \leq \dfrac{1}{2} \\ p + qf(2x - 1) & \text{si } x \geq \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

et que l'on complète sur [0,1] pour la rendre monotone.

En appliquant une stratégie quelconque, on obtient une suite de v.a.

$$X_0 = x, X_1, \dots, X_n, \dots$$

On peut démontrer que la suite $f(X_n)$ est une surmartingale en vérifiant

$$pf(x+y) + qf(x-y) \leq f(x)$$

pour $0 < y \leq x$. L'exercice est relativement difficile (on se limite à des x et des y de la forme $k/2^n$ et l'on procède par induction sur n), ce pourquoi nous y renoncerons. La version corrigée du théorème 2 implique alors

$$f(x) = f(X_0) \geq \mathrm{E}(f(X_T)) = \mathrm{P}(X_T = 1)$$

pour $T = \min\{n : X_n = 0 \text{ ou } 1\}$, ce qui revient au même que le résultat annoncé.

3. La propagation d'une rumeur selon [7]

Dans une population de $N+1$ personnes, une rumeur se répand selon le modèle suivant: chaque personne informée essaie de transmettre la nouvelle en téléphonant au hasard à l'un de ses N partenaires possibles. Si la personne appelée n'est pas encore au courant, elle devient elle-même active et se met à téléphoner. Sinon, la personne qui a appelé se résigne et abandonne toute activité. On suppose que l'histoire commence avec une seule personne informée. Combien de personnes resteront-elles ignorantes lorsque les appels auront cessé?

Il faut distinguer trois catégories de personnes: les ignorants, les actifs et les résignés, dont les effectifs respectifs après n appels seront notés X_n, Y_n et Z_n (dans la modélisation d'épidémies, problème analogue au nôtre, on parle d'infectables, d'infectés et d'immunisés). On a naturellement:

$$X_0 = N,\ Y_0 = 1, Z_0 = 0 \tag{3.1}$$

et

$$X_n + Y_n + Z_n = N + 1. \tag{3.2}$$

On passe du triplet (X_n, Y_n, Z_n) à $(X_n - 1, Y_n + 1, Z_n)$ avec probabilité X_n/N et à $(X_n, Y_n - 1, Z_n + 1)$ avec probabilité $1 - X_n/N$. Dans chaque cas, $X_{n+1} - Z_{n+1} = X_n - Z_n - 1$, ce qui, à partir de $X_0 - Z_0 = N$, implique $X_n - Z_n = N - n$ et, en utilisant (3.2), $2X_n + Y_n = 2N - n + 1$.

Si $T = \min\{n : Y_n = 0\}$, il s'ensuit:

$$2X_T = 2N - T + 1\ . \tag{3.3}$$

Nous nous intéressons au rapport X_T/N pour $N \to \infty$ (proportion finale des ignorants). Avec les $\mathcal{B}_n$ habituelles, on trouve

$$\mathrm{E}(X_{n+1}|\mathcal{B}_n) = \frac{X_n}{N} \cdot (X_n - 1) + \left(1 - \frac{X_n}{N}\right) \cdot X_n = X_n \cdot \left(1 - \frac{1}{N}\right)\ . \tag{3.4}$$

$M_n = X_n(1 - 1/N)^{-n}$ devient donc élément de martingale et le théorème 2 dit:

$$N = M_0 = \mathrm{E}(M_T) = \mathrm{E}\left(X_T\left(1-\frac{1}{N}\right)^{-T}\right) \tag{3.5}$$

ou bien, en divisant par N et en posant $U = X_T/N$, où $T = 2N(1-U)+1$ par (3.3):

$$1 = \mathrm{E}\left(U\left(1-\frac{1}{N}\right)^{2N(U-1)-1}\right) \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} \mathrm{E}(Ue^{2(1-U)}) \,. \tag{3.6}$$

Avec le même procédé, on montre que $L_n = X_n(X_n-1)(1-2/N)^{-n}$ est aussi élément de martingale et que $\lim_{N\to\infty} \mathrm{E}(U^2 \cdot \exp(4(1-U))) = 1$. Ce résultat et (3.6) impliquent que la variance de la v.a. $V = U \cdot \exp(2(1-U))$ tend vers 0, donc que $\mathrm{P}(|V-1| > \epsilon) \to 0$ pour tout $\epsilon \to 0$ par l'inégalité de Tchebychev (on dit que V tend vers 1 en probabilité). Mais $f(u) = u \cdot \exp(2(1-u)) = 1$ aussi bien pour $u = 1$ que pour $u = 0,204$. Nous allons exclure la première valeur grâce à l'argument suivant: Si $U > 1-\epsilon$, $T = 2i+1$ avec $1 \le i \le N\epsilon$ (cf. (3.3)), ce qui signifie que $i+1$ des $2i+1$ premiers appels ont échoué. Comme la probabilité d'un échec est $1 - X_n/N < 1 - X_T/N = 1 - U < \epsilon$, l'événement $U > 1-\epsilon$ a, au pire, la probabilité

$$\sum_{i\ge1}\binom{2i+1}{i+1}\epsilon^{i+1} \le \sum_{i\ge1} 2^{2(2i+1)}\epsilon^{i+1} = \frac{4(4\epsilon)^2}{(1-4\epsilon)} \,.$$

On en conclut que U tend vers 0.204 en probabilité. Il faut pourtant remarquer que le résultat dépend fortement de l'hypothèse selon laquelle on se résigne dès le premier échec. Si ce n'est le cas qu'au deuxième, la proportion finale d'ignorants tombe à 0.059, solution de $ue^{3(1-u)} = 1$.

Références

[1] Carnal, H.: Mathématiques et politique. El. Math. 48 (1993), 27–32.

[2] Diaconis, P.: Group Representations in Probability and Statistics. Inst. of Math. Statistics, Hayward, California, 1988.

[3] Diaconis, P., Stroock, D.: Geometric Bounds for Eigenvalues of Markov Chains. Ann. Appl. Prob. 1 (1991), 36–61.

[4] Dubins, L.E., Savage, L.J.: How to gamble if you must. McGraw-Hill. New York, 1965.

[5] Neveu, J.: Martingales à temps discret. Masson & Cie, Paris, 1972.

[6] Sandell, D.: A game with three players. Stat. & Prob. Letters 7 (1989), 61–63.

[7] Sudbury, A.: The proportion of a population never hearing a rumour. J. Appl. Prob. 22 (1985), 443–446.

Henri Carnal
Université de Berne
Institut de statistique
Sidlerstr. 5
CH-3012 Berne