Zur Verteilung der Reste der Fibonacci-Folge modulo 5c

Autor(en): **Darvasi, Gyula / Eckmann, Steffen**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **50 (1995)**

PDF erstellt am: **11.08.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-46344

El. Math. 50 (1995) 0013-6018/95/020076-05$1.50 + 0.20/0

Zur Verteilung der Reste der Fibonacci-Folge modulo $5c$

Gyula Darvasi und Steffen Eckmann

Gyula Darvasi wurde 1944 in Ungarn geboren. Er studierte an der Universität Debrecen, wo er 1987 promovierte. Seit 1973 ist er an der Pädagogischen Hochschule in Nyiregyháza (Ungarn) tätig. Seine Interessen erstrecken sich neben der Mathematik auch auf Fremdsprachen: er spricht Deutsch, Englisch und Russisch.

Steffen Eckmann absolvierte von 1976 bis 1983 das Lehramtsstudium in Mathematik und Physik an der Universität Köln. Danach war er am Institut von Peter Bundschuh als Assistent tätig und promovierte im Jahre 1986. Er wechselte anschliessend in die Industrie, wo er sich heute bei einer Wirtschaftsprüfungsgesellschaft mit versicherungs- und wirtschaftsmathematischen Fragen beschäftigt. In seiner Freizeit unternimmt er gerne Reisen in ferne Länder. Da zu seinen ausserberuflichen Interessen auch die Astronomie gehört, freut es ihn jeweils ganz besonders, wenn er die Beobachtung einer Sonnenfinsternis zum Anlass einer grösseren Reise nehmen kann.

1 Einleitung

Eine Folge (u_n), $n \in \mathbb{N}$ von ganzen Zahlen (oder Resten ganzer Zahlen modulo m) heisst *reinperiodisch*, falls es eine ganze Zahl $h_0 \geq 1$ gibt mit $u_{n+h_0} = u_n$ für alle $n \geq 0$. Ist (u_n) eine Folge ganzer Zahlen und $m \geq 2$ eine ganze Zahl, so erhält man durch Reduktion modulo m eine Folge $(\overline{u}_n)$ von Resten modulo m. Letztere kann reinperiodisch sein, auch wenn die ursprüngliche Folge (u_n) diese Eigenschaft nicht besessen hat. In diesem Falle bezeichnen wir mit $h(m)$ die kleinste Periodenlänge modulo m; sie teilt die Länge aller anderen vollen Perioden der Folge $(\overline{u}_n)$. Ist $(\overline{u}_n)$ reinperiodisch und

Fast wie ein Zauberer aus einer Wundertüte holt die Mathematik aus der Fibonacci-Folge immer wieder neue Überraschungen. Die folgende seltsame Tatsache steht am Beginn des vorliegenden Beitrages: Reduziert man die Fibonacci-Folge modulo der ganzen Zahl m, $m \geq 2$, so wird sie periodisch. Dabei spielen die Zahl 5 und die Potenzen von 5 eine Sonderrolle. Die Autoren gehen der Frage nach, wie die Reste, die in den Reduktionen der Fibonacci-Folge modulo c und modulo $5c$ vorkommen, zueinander in Beziehung stehen. Sie gelangen dabei zu detaillierten Ergebnissen. — Ein Feld eigener Betätigung öffnet sich, indem man die hier für die klassische Fibonacci-Folge gestellten Fragen auf allgemeinere Rekursionsfolgen überträgt. *ust*

kommt jeder Rest modulo m in einer Periode von $(\overline{u}_n)$ gleich oft vor, so nennen wir (u_n) gleichverteilt modulo m. In diesem Fall ist $h(m)$ offensichtlich ein Vielfaches von m. Wir merken an, dass in der Literatur (siehe zum Beispiel [6]) eine allgemeinere Definition der Gleichverteilung von Folgen ganzer Zahlen zu finden ist.

Ist $(\overline{u}_n)$ reinperiodisch und listet man die Häufigkeitswerte aller Reste modulo m in der kleinsten Periode der Reihe nach auf, wird der so entstehende Zahlenblock Häufigkeitsblock modulo m genannt. Ist (u_n) gleichverteilt modulo m, so sind die Elemente des dazugehörigen Häufigkeitsblocks alle gleich.

Wie üblich bezeichnen wir für natürliche Zahlen a und b mit $\mathrm{ggT}(a, b)$ den grössten gemeinsamen Teiler von a und b und mit $\mathrm{kgV}(a, b)$ ihr kleinstes gemeinsames Vielfache.

2 Bekannte Ergebnisse

Die Fibonacci-Folge (F_n) ist durch $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ und $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ für $n \geq 2$ definiert. Von den zahlreichen bekannten Eigenschaften dieser Folge erwähnen wir die für uns in dieser Arbeit wichtigen.

(1) Für jedes $m \geq 2$ ist die Folge $(\overline{F}_n)$ reinperiodisch (siehe [9]).

(2) Für $m > 2$ ist $h(m)$ eine gerade ganze Zahl grösser als 4 (siehe [5]).

(3) Für beliebige teilerfremde Zahlen a und b ist $h(ab)$ das kleinste gemeinsame Vielfache von $h(a)$ und $h(b)$ (siehe [3], [8], [9]). Zur Untersuchung von $h(m)$ genügt es deshalb, Primzahlpotenzen zu betrachten.

(4) Für $p \equiv \pm 2 \pmod 5$ ist $h(p)$ ein Teiler von $2(p+1)$, und für $p \equiv \pm 1 \pmod 5$ ist $h(p)$ ein Teiler von $p - 1$ (siehe [3], [8], [9]).

(5) Für $k \geq 1$ gilt $h(5^k) = 4 \cdot 5^k$ (siehe [9]).

(6) Für $k \geq 1$ ist (F_n) gleichverteilt modulo 5^k (siehe [4], [5]).

3 Problemstellung

Wir werden in diesem Beitrag die Verteilung der Reste der Fibonacci-Folge (F_n) modulo m mit $m = 5c$, $2 \leq c \in \mathbb{N}$ untersuchen. Zuerst betrachten wir explizit das Verhalten der Fibonacci-Folge modulo m, wo m die Werte 2, 3, 10, 15 durchläuft. Wir geben die kleinste Periodenlänge $h(m)$ sowie den Häufigkeitsblock modulo m an.

Beispiel 1: $m = 3$

0, 1, 1, 2, 0, 2, 2, 1, 0, ...

$h(3) = 8$, $\quad \boxed{2\,|\,3\,|\,3}$

Beispiel 2: $m = 15$

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 6, 4, 10, 14, 9, 8, 2, 10, 12, 7, 4, 11, 0, 11, 11, 7, 3, 10, 13, 8, 6, 14, 5, 4, 9, 13, 7, 5, 12, 2, 14, 1, 0, ...

$h(15) = 40$, $\quad \boxed{2\,|\,3\,|\,3\,|\,2\,|\,3\,|\,3\,|\,2\,|\,3\,|\,3\,|\,2\,|\,3\,|\,3\,|\,2\,|\,3\,|\,3}$

Beispiel 3: $m = 2$

0, 1, 1, 0,...

$h(2) = 3, \quad \boxed{1}\boxed{2}$

Beispiel 4: $m = 10$

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 3, 1, 4, 5, 9, 4, 3, 7, 0, 7, 7, 4, 1, 5, 6, 1, 7, 8, 5, 3, 8, 1, 9, 0, 9, 9, 8, 7, 5, 2, 7, 9, 6, 5, 1, 6, 7, 3, 0, 3, 3, 6, 9, 5, 4, 9, 3, 2, 5, 7, 2, 9, 1, 0, ...

$h(10) = 60, \quad \boxed{4}\boxed{8}\boxed{4}\boxed{8}\boxed{4}\boxed{8}\boxed{4}\boxed{8}\boxed{4}\boxed{8}$

Wir stellen fest, dass der Häufigkeitsblock modulo 15 durch fünfmalige Wiederholung des Häufigkeitsblocks modulo 3 erhalten wird. Auf ähnliche Weise wird der Häufigkeitsblock modulo 10 durch fünfmalige Wiederholung des Häufigkeitsblocks modulo 2 erhalten, wobei zusätzlich die einzelnen Einträge mit 4 multipliziert werden. Die Frage, ob Analoges mit $m = 5c$ für alle $2 \leq c \in \mathbb{N}$ gültig ist, lässt sich leicht durch explizite Berechnungen mit $m = 55, 110, 155, 165, 205, 220$ usw. negativ beantworten. Es stellt sich also die Frage, unter welchen Bedingungen der in unseren Beispielen festgestellte Zusammenhang zwischen den Häufigkeitsblocks von c und $5c$ besteht.

4 Die Resultate

Unsere Resultate (vgl. auch [2]) beziehen sich ganz allgemein auf die in den obigen Beispielen festgestellte Wiederholung in den Häufigkeitsblocks.

Satz 1. *Für $2 \leq c \in \mathbb{N}$ ist $y := h(5c)/h(c)$ ein Teiler von 20.*

Beweis: Es sei 5^r mit $r \geq 0$ die höchste Potenz von 5, die c teilt. Dann gilt $c = 5^r \cdot s$ mit $5 \nmid s$. Aus (3) und (5) erhält man für $r \geq 1$

$$y = \frac{h(5c)}{h(c)} = \frac{h(5^{r+1} \cdot s)}{h(5^r \cdot s)} = \frac{\mathrm{kgV}(h(5^{r+1}), h(s))}{\mathrm{kgV}(h(5^r), h(s))} = \frac{\mathrm{kgV}(4 \cdot 5^{r+1}, h(s))}{\mathrm{kgV}(4 \cdot 5^r, h(s))} .$$

Hieraus folgt $y \in \{1, 5\}$. Für $r = 0$ folgt $y \in \{1, 2, 4, 5, 10, 20\}$ wegen $h(5) = 20$.

Es sei nun $v_5(k)$ die genaue Potenz von 5, die in $k \in \mathbb{N}$ aufgeht. Aus Satz 1 folgt dann sofort, dass $q := h(5c)/5h(c)$ genau dann eine natürliche Zahl ist, wenn $v_5(h(s)) \leq r$ ist. In diesem Fall ergeben sich für q nur die Zahlen $1, 2$ oder 4. Für $v_5(h(s)) > r$ ist somit q keine natürliche Zahl. In diesem Fall können also die Häufigkeitsblocks zu c und $5c$ nicht in der einfachen Weise zusammenhängen, wie wir dies in den Beispielen 1 bis 4 festgestellt haben. Der Leser verifiziert leicht, dass unsere oben als Gegenbeispiele genannten Zahlen $m = 55, 110, 155, 165, 205, 220$ von dieser Art sind.

Satz 2. *Für $m = 5c$ mit $2 \leq c = 5^r \cdot s$, $r \geq 0$, $5 \nmid s$ und $v_5(h(s)) \leq r$ besteht der Häufigkeitsblock modulo m aus der fünfmaligen Wiederholung des Häufigkeitsblocks modulo c, wobei dessen Elemente mit $q := h(5c)/5h(c)$ multipliziert werden.*

Beweis: Wir führen den Beweis in zwei Teilen. In Teil A beschäftigen wir uns mit dem Fall $r = 0$ und in Teil B mit dem Fall $r \geq 1$.

Teil A: Es sei $r = 0$, das heisst $5 \nmid c$. Wir machen hier Gebrauch vom folgenden Lemma:

Lemma. *Für* $m, n \in \mathbb{N}$ *und* $F_m \equiv F_n \pmod 5$ *gilt entweder* $5 \mid m$ *und* $5 \mid n$ *oder es existiert ein* $t \in \mathbb{N}$, *so dass sich* m *und* n *modulo* 20 *als eine der Zahlen* $5t-1, 5t+1, 5t+2$ *oder* $5t+8$ *darstellen lassen. Insbesondere liegen* m *und* n *für* $m \neq n$ *in verschiedenen Restklassen modulo* 4.

Der *Beweis des Lemmas* erfolgt durch einfache Betrachtung der (zwanzig) Reste 0, 1, 1, 2, 3, 0, 3, 3, 1, 4, 0, 4, 4, 3, 2, 0, 2, 2, 4, 1, 0, ... der Folge (F_n) modulo 5.

Für den Teil A des Beweises des Satzes rufen wir ferner in Erinnerung, dass laut Definition der Zahl $h(c)$ für festes $w \in \mathbb{N}$ die Zahlen $F_{w+jh(c)}$, $j = 0, 1, \ldots$ modulo c übereinstimmen. Die weitere Behandlung spaltet in verschiedene Fälle auf:

Fall 1: $q = 1$. Wegen $q = \mathrm{kgV}(20, h(c))/5h(c)$ tritt dieser Fall genau dann ein, wenn 4 ein Teiler von $h(c)$ ist.

Es ist zu zeigen, dass die fünf Zahlen $F_{w+jh(c)}$, $j = 0, 1, 2, 3, 4$ modulo 5 (und damit modulo $5c$) paarweise verschieden sind. Wir beweisen dies, indem wir die Annahme $F_{w+j_1h(c)} \equiv F_{w+j_2h(c)} \pmod 5$ für $0 \leq j_1, j_2 \leq 4$ und $j_1 \neq j_2$ zu einem Widerspruch führen. Zu diesem Zweck betrachten wir k_i, $i = 1, 2$, mit $0 \leq k_i < 20$ und $k_i \equiv w + j_ih(c) \pmod{20}$.

Wegen $h(5) = 20$ folgt $F_{k_1} \equiv F_{k_2} \pmod 5$. Wegen der Voraussetzung $v_5(h(c)) = 0$, das heisst $5 \nmid h(c))$, und da $0 < |j_1 - j_2| < 5$, folgt $20 \nmid (j_1 - j_2) \cdot h(c)$ und daher $k_1 \neq k_2$. Wegen $4 \mid h(c)$ liegen $w + j_1h(c)$ und $w + j_2h(c)$, also auch k_1 und k_2 in derselben Restklasse modulo 4. Dies steht aber wegen $0 < |k_1 - k_2| < 20$ im Widerspruch zur Aussage des Lemmas.

Fall 2: $q = 2$. Dieser Fall tritt genau dann ein, wenn gleichzeitig $2 \mid h(c)$ und $4 \nmid h(c)$ gelten.

Es ist zu zeigen, dass höchstens zwei der 10 Zahlen $F_{w+jh(c)}$, $j = 0, 1, \ldots, 9$ modulo 5 gleich sein können. Wir beweisen dies, indem wir die Annahme $F_{w+j_1h(c)} \equiv F_{w+j_2h(c)} \equiv F_{w+j_3h(c)} \pmod 5$ für $0 \leq j_1, j_2, j_3 \leq 9$ und paarweise verschieden zu einem Widerspruch führen. Zu diesem Zweck betrachten wir k_i, $i = 1, 2, 3$, mit $0 \leq k_i < 20$ und $k_i \equiv w + j_ih(c) \pmod{20}$.

Wegen $\mathrm{ggT}(20, h(c)) = 2$ und $0 < |j_1 - j_2|, |j_1 - j_3|, |j_2 - j_3| < 10$ sind die k_i paarweise verschieden und liegen wegen $2 \mid h(c)$ alle in derselben Restklasse modulo 2 . Dies ist erneut ein Widerspruch zum Lemma.

Fall 3: $q = 4$. Dieser Fall tritt genau dann ein, wenn $2 \nmid h(c)$ gilt. Wegen $\mathrm{ggT}(20, h(c)) = 1$ und der Gleichverteilung von (F_n) modulo 5 können von den 20 Zahlen $F_{w+jh(c)}$, $j = 0, 1, \ldots, 19$, deren Indizes modulo 20 paarweise inkongruent sind, nicht mehr als vier Zahlen modulo 5 übereinstimmen.

Teil B: Es sei nun $r \geq 1$, das heisst $5 \mid c$.

Wegen

$$q = \frac{\mathrm{kgV}(4 \cdot 5^{r+1}, h(s))}{5 \cdot \mathrm{kgV}(4 \cdot 5^r, h(s))} \leq 1$$

kommt als ganzzahliges q nur $q = 1$ in Frage. Wegen $v_5(h(s)) \leq r$ gilt

$$h(c) = \mathrm{kgV}(h(5^r), h(s)) = h(5^r) \cdot z$$

mit $5 \nmid z$. Deshalb durchlaufen die Zahlen $w + jh(c)$ bzw. $w + jh(5^r)$, $j = 0, 1, \ldots, 4$ jeweils dieselben Reste modulo $h(5^r)$. Es folgt, dass die Zahlen $F_{w+jh(c)}$, $j = 0, 1, \ldots, 4$ dieselben Reste modulo 5^r durchlaufen wie die Zahlen $F_{w+jh(5^r)}$, welche nach Lemma 8 aus [1] paarweise verschieden modulo 5^{r+1} sind. Daher sind die $F_{w+jh(c)}$, $j = 0, 1, \ldots, 4$ erst recht modulo $5c$ paarweise verschieden.

Damit ist Satz 2 vollständig bewiesen.

Aufgrund der bisherigen Ergebnisse lässt sich aus der Gleichverteilung der Fibonacci-Folge modulo 5 sofort die Gleichverteilung der Fibonacci-Folge modulo 5^k mit $k > 1$ gewinnen, weil in diesem Falle $q = 1$ gilt, und deshalb der Häufigkeitsblock modulo 5^k mit $k > 1$ nur die Elemente des Häufigkeitsblocks modulo 5 enthalten kann.

Satz 2 lässt sich verallgemeinern zu

Satz 3. *Für $m = 5^t \cdot c$ mit $2 \leq c = 5^r \cdot s$, $t \geq 1$, $r \geq 0$, $5 \nmid s$ und $v_5(h(s)) \leq r$ besteht der Häufigkeitsblock modulo m aus der 5^t-maligen Wiederholung des Häufigkeitsblocks modulo c, wobei dessen Elemente mit $q = h(m)/(5^t \cdot h(c))$ multipliziert werden.*

Der Beweis folgt durch iterative Anwendung von Satz 2. Man beachte hierbei, dass bei den einzelnen Iterationsschritten jeweils $q = 1$ ist, höchstens mit Ausnahme des letzten Schrittes.

5 Ausblick

Für die Fibonacci-Folge (F_n) kann die erwähnte Wiederholung in den Häufigkeitsblocks erst dann bestehen, wenn alle im Satz 3 aufgezählten Bedingungen erfüllt werden. Nicht betrachtet haben wir in unserer Arbeit allgemeinere Fibonacci-Folgen. Analoge Resultate lassen sich wohl auch für diese erhalten. Wir hoffen, den Leser dazu angeregt zu haben, die entsprechenden Überlegungen selbst durchzuführen.

Literatur

[1] Bundschuh, P.: On the distribution of Fibonacci numbers; Tamkang J. Math. 5 (1974), No. 1, 75–79.

[2] Darvasi, G.: Computerunterstützte Behandlung der Verteilung von Resten der Fibonacci-Folge mod $5c$; Praxis Math., 31 (1989), 242–244.

[3] Göttsch, G.: Über die mittlere Periodenlänge der Fibonacci-Folgen modulo p; Dissertation, Hannover 1982.

[4] Kuipers, L. und Shiue, J.-S.: A distribution property of the sequence of Fibonacci numbers; Fibonacci Quart. 10 (1972), 375–376, 392.

[5] Niederreiter, H.: Distribution of Fibonacci numbers mod 5^k; Fibonacci Quart. 10 (1972), 373–374.

[6] Niven, I.: Uniform distribution of sequences of integers; Trans. Amer. Math. Soc. 98 (1961), 52–61.

[7] Stanley, T.E.: Some remarks on the periodicity of the sequences of Fibonacci numbers; Fibonacci Quart. 14 (1976), 52–54.

[8] Vince, A.: The Fibonacci sequence modulo n; Fibonacci Quart. 16 (1978), 403–407.

[9] Wall, D.D.: Fibonacci series modulo m; Amer. Math. Monthly 67 (1960), 525–532.

Gyula Darvasi
Vasvári P.u.39, III/12
H-4400 Nyiregyháza, Ungarn

Steffen Eckmann
Gleuelerstrasse 187–189
D-50935 Köln