

Aufgaben

Objektyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **50 (1995)**

PDF erstellt am: **14.08.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Aufgaben

Neue Aufgaben

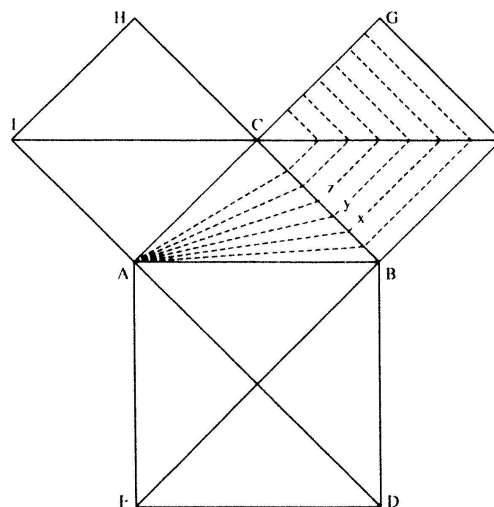
Lösungen sind erbeten bis zum 10. November 1995 an:

- Peter Gallin, Tüfenbach 176, CH-8494 Bauma
oder
- Hans Walser, Gerlikonerstrasse 29, CH-8500 Frauenfeld

Aufgabe 1096: Im Buch von Jury Wipper “Sechshundvierzig Beweise des Pythagoräischen Lehrsatzes” (Berlin 1911) wird an zweitletzter Stelle der folgende Beweis von Mr. de Fischbach angeführt.

XLV. Beweis: Wir zeichnen auf dem rechtwinkligen und gleichschenkligen Dreieck ACB die Quadrate $ABDE$, $CBFG$ und $ACHI$. Es ist augenscheinlich, dass das Quadrat auf der Hypotenuse gleich ist der Summe der Quadrate auf den Katheten, folglich ist beispielsweise das Quadrat $ABDE$ gleich dem doppelten Quadrat $ACHI$.

Wenn wir die Seite CB eines der gleichen Quadrate allmählig verkleinern und die Linien Ax , Ay , Az , ... nach den Punkten x , y , z , ... ziehen, so würden auch die Quadrate auf Cx , Cy , Cz , ..., so wie die Quadrate auf Ax , Ay , Az , ... allmählig kleiner werden, und wenn schliesslich die Linie AB , immer mehr sich verkleinernd, mit der Linie AC zusammenkommt, so verschwindet vollständig das Quadrat $CBFG$ und das Quadrat $ABDE$ wird dem Quadrat $ACHI$ gleich.



Stellen wir uns vor, dass es eine zahllose Menge derartiger allmählicher Verkleinerungen wie im Quadrat $CBFG$, so im Quadrat $ABDE$ gäbe, da bei jeder Verringerung des Quadrates $CBFG$ auch das Quadrat $ABDE$ kleiner würde, so könnte man folgende Supposition machen: die erste Verkleinerung des Quadrats $CBFG$ gleich der ersten Verkleinerung des Quadrats $ABDE$, die zweite Verkleinerung des Quadrats $CBFG$ der zweiten Verkleinerung des Quadrats $ABDE$, die dritte der dritten u.s.w., daraus folgt, dass in jedem rechtwinkligen Dreieck das Quadrat der Hypotenuse gleich ist der Summe der Quadrate der Katheten.

Dieser Beweis ist enthalten in den “*Éléments de Géométrie ou traité de la mesure du corps, par Mr. de Fischbach 1723*”.

Anmerkung. Wir geben diesen Beweis unter der Hinzufügung, dass derselbe bei weitem nicht der mathematischen Strenge und Genauigkeit entspricht. Es ist begreiflich, dass, wie gering auch die Verkleinerung der Katheten und der Hypotenuse sein mögen, diese Verkleinerungen (nur auf Grund des Gesagten) auch ungleichmässig sein könnten, in welchem Falle der Lehrsatz selbst nicht bewiesen wäre.

Der Grundgedanke des Beweises besteht darin, zu zeigen, dass die Funktion, welche einem rechtwinkligen Dreieck (mit Katheten a , b und Hypotenuse c) den Wert $a^2 + b^2 - c^2$ zuordnet, konstant ist. Dabei genügt es offenbar, Dreiecke mit fester Hypotenuse zu betrachten. Wie kann so ein strenger Beweis geführt werden?

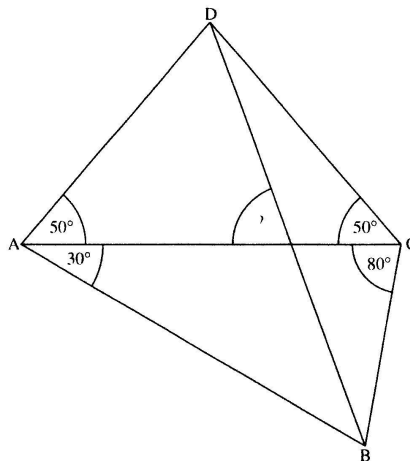
Ernst Specker, Zürich, CH

Aufgabe 1097: Eine unsymmetrische Münze wird so oft geworfen, bis zum ersten Mal "Kopf" erscheint. Die Anzahl von Würfeln "Zahl", die bei einer solchen Serie geworfen werden, nennen wir die Länge der Serie. Wir nehmen an, dass p ($0 < p < 1$) die Wahrscheinlichkeit für einen einzelnen Wurf "Zahl" ist. Nun werden jeweils n ($n \in \mathbb{N}$) Serien gespielt und die Länge der längsten Serie beobachtet. Mit $E(n)$ bezeichnen wir den Erwartungswert der Länge der längsten Serie unter n Serien. Man zeige, dass für n gegen unendlich die folgende asymptotische Formel gilt

$$E(n) = \sum_{m=1}^{\infty} \{(1 - p^{m+1})^n - (1 - p^m)^n\} m \sim \frac{\log n}{\log(1/p)}.$$

Pieter Moree, Leiden, NL

Aufgabe 1098 (Die einfache dritte Aufgabe): Unter welchem Winkel schneiden sich die Diagonalen des Vierecks ABCD?



Hans Egli, Zürich, CH

Lösungen der Aufgaben aus Heft 2, Vol. 49 (1994).

Aufgabe 1084. Es seien a , b , λ reelle Zahlen, so dass $\lambda > 0$ und $b - a \geq \pi/\sqrt{\lambda}$. Die Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sei stetig differenzierbar.

Man zeige: Es gibt ein $t \in (a, b)$ mit $f'(t) < \lambda + f^2(t)$

Walther Janous, Innsbruck, A

Auswertung der eingesandten Lösungen. Es sind 11 Lösungen eingetroffen: Peter Bundschuh (Köln, D), Thomas Grischott (Andeer, CH), F. Grupp (Schweinfurt, D), Joachim Klose (Bonn, D), Kee-Wai Lau (Hong Kong), Chr. A. Meyer (Bern, CH), Andreas Müller (Altendorf, CH), H.-J. Seiffert (Berlin, D), Paul Streckeisen (Zürich, CH), Hansruedi Widmer (Rieden, CH), Klaus Zacharias (Berlin, D). Fast alle Einsender vergleichen die Funktion f mit der Tangensfunktion. Die folgende indirekte Beweisführung stammt von Thomas Grischott: Aus der Annahme $f'(t) \geq \lambda + f^2(t) \forall t \in (a, b)$, also

$$\frac{df}{dt} \geq \lambda + f^2$$

folgt wegen $\lambda + f^2 > 0$ die Ungleichung

$$\frac{df}{\lambda + f^2} \geq dt$$

mit positivem dt . Durch Integration

$$\int_{f(a)}^{f(b)} \frac{df}{\lambda + f^2} \geq \int_a^b dt$$

ergibt sich

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} \arctan \frac{f(b)}{\sqrt{\lambda}} - \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \arctan \frac{f(a)}{\sqrt{\lambda}} \geq b - a \geq \frac{\pi}{\sqrt{\lambda}}$$

oder

$$\arctan \frac{f(b)}{\sqrt{\lambda}} - \arctan \frac{f(a)}{\sqrt{\lambda}} \geq \pi.$$

Dies ist aber unmöglich, da die Differenz zweier Arkustangens-Werte kleiner als π ist.

Aufgabe 1085. Ein abgesprochenes Abstimmungsspiel. Zwölf Personen sitzen auf zwölf nummerierten Stühlen im Kreis. Aus einer Kollektion von zwölf roten und zwölf blauen Hüten wird nun jeder Person ein Hut aufgesetzt, und zwar so, dass jede Person die Farbe aller Hüte mit Ausnahme des eigenen erkennt. Darauf findet unter den zwölf Personen eine geheime Abstimmung statt, bei der zwischen "rot" und "blau" zu wählen ist. Das Ergebnis soll ausgeglichen sein: Werden die Stimmen aller Personen berücksichtigt, so sollen sechs auf "rot" und sechs auf "blau" fallen; werden nur die Stimmen der Personen mit roten Hüten berücksichtigt, so darf auf die eine Farbe höchstens eine Stimme mehr fallen als auf die andere.

Wie können sich die zwölf vor dem Aufsetzen der Hüte verabreden, damit ein solches Ergebnis bei jeder Verteilung der Farben zustande kommt?

Ernst Specker, Zürich, CH

Auswertung der eingesandten Lösungen. Zwei Leser und eine Leserin haben sich dieser Aufgabe angenommen. Die korrekten Lösungen stammen von Sibylle Schwarz (Jena, D) und Paul Streckeisen (Zürich, CH).

Paul Streckeisen formuliert den Algorithmus wie folgt: Jede Person P_i , $i \in \{1, \dots, 12\}$, betrachtet die folgenden Mengen:

H'_i = Menge der Hüte mit einer geraden Nummer, die kleiner als i ist.

H''_i = Menge der Hüte mit einer ungeraden Nummer, die grösser als i ist.

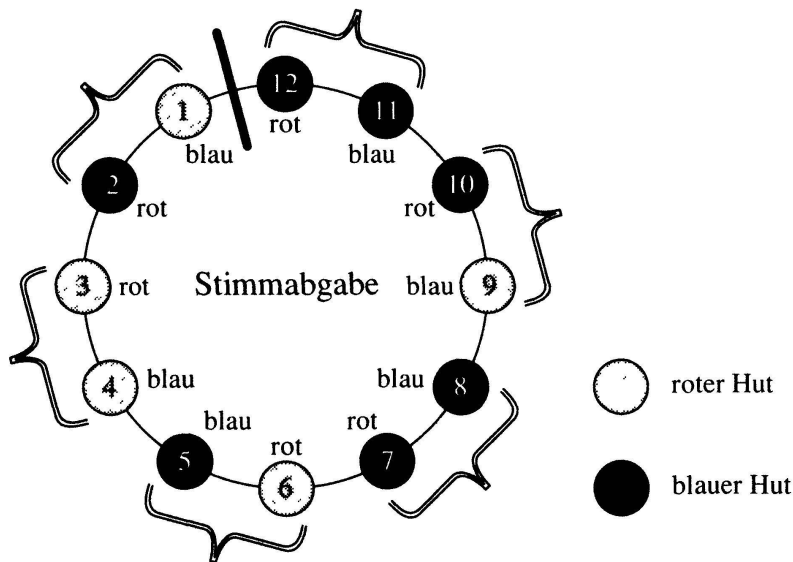
$H_i = H'_i \cup H''_i$.

Da H_i in jedem Fall aus 5 Hüten besteht, treten die Hüte mit der einen Farbe in gerader Anzahl, die andere in ungerader Anzahl auf.

Verabredung: Ist i gerade (ungerade), so wählt die Person P_i diejenige Farbe, die in H_i eine gerade (ungerade) Anzahl Male auftritt.

Ist i ungerade, so gilt $H_i = H_{i+1}$. Somit bilden P_i und P_{i+1} stets ein Paar und geben verschiedene Stimmen ab. Die Zahl der Rot-Stimmen ist somit gleich der Zahl der Blau-Stimmen. Mit einer Fallunterscheidung zeigt Paul Streckeisen schliesslich, dass unter den Personen mit roten Hüten sich die Rot-Stimmen und Blau-Stimmen bei aufsteigender Nummer regelmässig abwechseln. Damit sind auch die Stimmen dieser Personen ausgeglichen.

Die folgende Figur zeigt ein Beispiel einer Verteilung der Hüte und die zugehörige Stimme jeder Person.



Die hier beschriebene Verabredung hat der Aufgabensteller *Ernst Specker* formal notiert: Setzt man $x_i = 1$, wenn P_i einen roten Hut trägt und $x_i = -1$, wenn P_i einen blauen Hut trägt und gibt $f_i(x_1, \dots, x_{12}) = 1$ an, dass P_i "rot" stimmt und $f_i(x_1, \dots, x_{12}) = -1$, dass P_i "blau" stimmt, so definiert man die Verabredung f mit $k \in \{1, \dots, 6\}$ und $x_0 = x_{13} = 1$ wie folgt:

$$f_{2k-1}(x_1, \dots, x_{12}) = -f_{2k}(x_1, \dots, x_{12}) = \prod_{1 \leq h \leq k} x_{2h-2} \cdot \prod_{k \leq h \leq 6} x_{2h+1} \cdot$$

Erstaunlich ist, dass bei dieser Berechnung der Stimme nicht einmal die Hälfte aller verfügbaren Argumente x_1, \dots, x_{12} benützt werden.

Zum Schluss geben wir die vollständige Lösung von *Sibylle Schwarz* wieder. Obwohl ihr Algorithmus ganz anders aussieht als der oben beschriebene und obwohl er auch alle verfügbaren Argumente verwendet, ist das Resultat das gleiche.

Wir setzen $c_i = 1$ falls der Hut der Person P_i rot ist, andernfalls sei $c_i = 0$.

Verabredung: Die Person P_i berechnet

$$A_i = i + \sum_{j \neq i} c_j \cdot j \quad , \quad B_j = \sum_{j < i} c_j \quad , \quad W_i = A_i + B_i$$

und wählt "blau" falls $W_i \equiv 1 \pmod{2}$, sonst "rot".

Das bedeutet anschaulich:

Addiere die Platznummern aller roten Hüte, die du siehst, zu deiner Platznummer und zu der Anzahl der roten Hüte mit kleinerer Platznummer. Wähle "blau", wenn diese Summe ungerade ist, sonst "rot".

Beweis. Wir bezeichnen $R = \sum_j c_j \cdot j$.

Faktum 1. Wenn $c_i = 1$, dann $A_i = R$, sonst $A_i = R + i$.

Grund: Sei $c_i = 1$. Dann ist $A_i = i + \sum_{j \neq i} c_j \cdot j = \sum_j c_j \cdot j = R$.

Andernfalls ist $A_i = i + \sum_{j \neq i} c_j \cdot j = i + \sum_j c_j \cdot j = i + R$.

Faktum 2. Die Stimmen der Personen mit roten Hüten fallen streng abwechselnd aus. Das bedeutet: Wenn $c_i = 1$ und $k = \min\{j \mid j > i \wedge c_j = 1\}$, dann $W_k \equiv W_i + 1 \pmod{2}$.

Grund: $W_k - W_i = (A_k - A_i) + (B_k - B_i) = R - R + B_k - B_i = \sum_{j < k} c_j - \sum_{j < i} c_j = \sum_{i \leq j < k} c_j = 1$.

Faktum 3. Die Stimmen der Personen mit blauen Hüten fallen streng abwechselnd aus. Das bedeutet: Wenn $c_i = 0$ und $k = \min\{j \mid j > i \wedge c_j = 0\}$, dann $W_k \equiv W_i + 1 \pmod{2}$.

Grund: $W_k - W_i = (A_k - A_i) + (B_k - B_i) = (R + k) - (R + i) + \sum_{i \leq j < k} c_j = (k - i) + (k - i - 1) \equiv 1 \pmod{2}$.

Faktum 4. Die erste Person mit rotem Hut stimmt anders als die erste Person mit blauem Hut. Das bedeutet: Sei $i = \min\{j \mid c_j = 1\}$ und $k = \min\{j \mid c_j = 0\}$. Dann gilt $W_k \equiv W_i + 1 \pmod{2}$.

Grund: $W_k - W_i = (A_k - A_i) + (B_k - B_i) = R + k - R + ((k - 1) - 0) \equiv 1 \pmod{2}$.

Aus diesen vier Fakten folgt die behauptete Stimmenverteilung.

Aufgabe 1086 (Die einfache dritte Aufgabe). In einem weit verbreiteten Lehrbuch über Geometrie lesen wir als Legende zur einer Abbildung (siehe unten) folgenden Text: "Die Figur zeigt Masten einer Strassenbeleuchtung. Sie sind in Wirklichkeit gleich hoch und in gleichen Abständen gesetzt. Auf dem Bild hat jeder Mast nur $2/3$ der Höhe des vorangehenden."

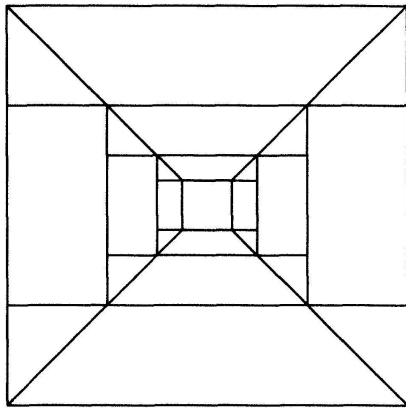
Wie kam diese Abbildung zustande?

Peter Gallin, Bauma, CH

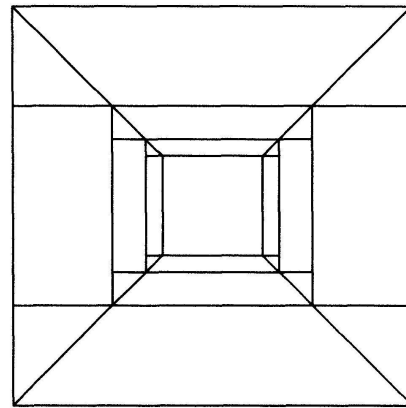
Auswertung der eingesandten Lösungen. Es sind nur zwei Reaktionen auf diese Aufgabe eingetroffen: Hans Egli (Zürich, CH) und Thomas Minder (Münchwilen, CH).

Hans Egli schreibt: "Ich nehme an, der Zeichner der Figur habe den zweiten Strahlensatz verwendet. Für eine perspektivische Darstellung müsste natürlich statt einer geometrischen eine harmonische Folge gezeichnet werden."

Der Gymnasiast *Thomas Minder* hat in einem Schulbuch ein weiteres Beispiel für eine fehlerhafte Anleitung zur Herstellung perspektivischer Bilder gefunden und seine korrekte Version daneben gestellt: Im linken Bild haben die in der Tiefe gestaffelten Quadrate die Seitenlängen 1, 1/2, 1/4, 1/8, während im rechten Bild die korrekten Verhältnisse 1, 1/2, 1/3, 1/4 verwendet sind.

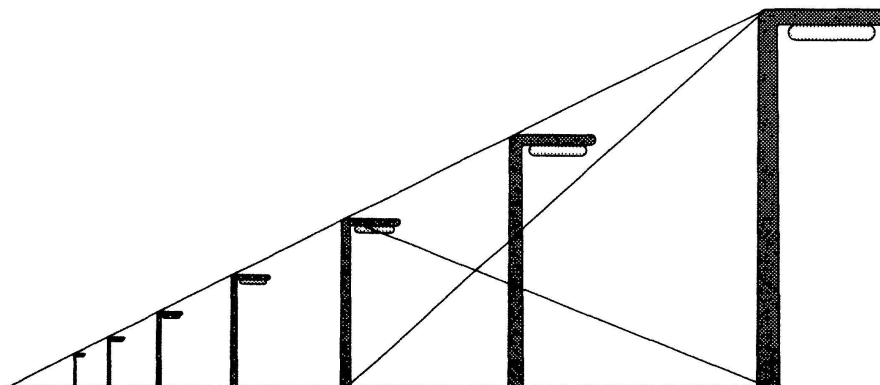


Aus dem Lehrbuch

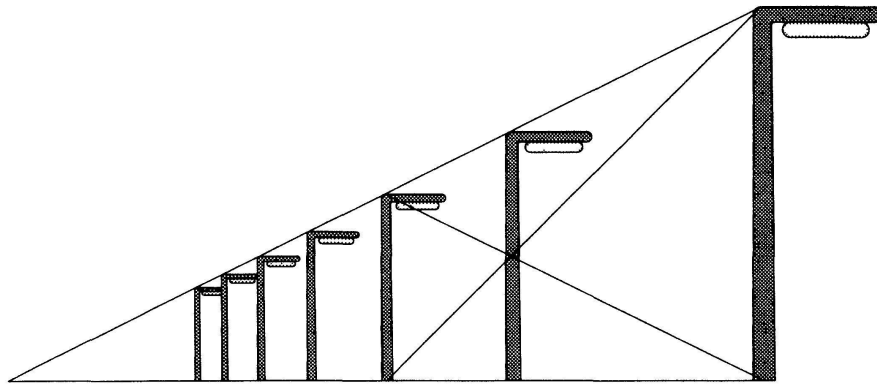


Von Thomas Minder

Anmerkung. Bei einer perspektivischen Abbildung geht man davon aus, dass die Strahlen zwischen einem festen Augpunkt und den abzubildenden Raumpunkten mit einer Bildebene durchstossen werden. Aus dem zweiten Strahlensatz ergibt sich: Liegen zwei gleich lange Strecken in zwei zur Bildebene parallelen Ebenen, von denen die fernere im Vergleich zur näheren den λ -fachen Abstand zum Augpunkt hat, so erscheint das Bild der ferneren Strecke im Vergleich zum Bild der näheren mit dem Faktor $1/\lambda$ verkürzt. Das hat zur Folge, dass die Länge des Bildes einer mittleren Strassenlampe das harmonische Mittel der Längen der beiden benachbarten Lampen sein muss. Diese Eigenschaft wird mit der sogenannten "Diagonalprobe" von Leon Battista Alberti [1] geometrisch überprüft. Die folgende Figur zeigt, wie die Abbildung aus dem in der Aufgabenstellung erwähnten Lehrbuch korrigiert werden muss. Anstelle der Längen 1, 2/3, $(2/3)^2$, ... verwendet man 2/2, 2/3, 2/4, 2/5, ... Man beachte, dass dann die Zwischenräume zwischen den Lampen nicht ähnlich zueinander sind.



Geometrische Progression ergibt eine falsche Perspektive



Harmonische Progression ergibt eine korrekte Perspektive

Aus der Eigenschaft des harmonischen Mittels folgt, dass die Längen x_n ($n \in \mathbb{N}$) der Bilder von Strassenlampen, die entlang einer geraden Strasse in gleichen Abständen stehen, die folgende Rekursionsformel erfüllen müssen:

$$x_{n+1} = \frac{x_n x_{n-1}}{2x_{n-1} - x_n}.$$

Setzt man $x_1 = 1$ und $x_2 = p/q$ mit $p < q$ und $p, q \in \mathbb{N}$, so ergibt sich mit Induktion:

$$x_{n+1} = \frac{p}{n(q-p) + p}.$$

Das bedeutet, dass die korrekten Längen aus äquidistanten Stützstellen unter einer Hyperbel und nicht unter einer Exponentialkurve gebildet werden.

[1] Eberhard Schröder. *Dürer, Kunst und Geometrie*. Basel: Birkhäuser, 1980.