Die vierte Dimension

Autor(en): **Okonek, Christian**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **50 (1995)**

PDF erstellt am: **11.08.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-46346

El. Math. *50* (1995)
0013-6018/95/030107-09$1.50 + 0.20/0

Die vierte Dimension

Christian Okonek

Christian Okonek wurde 1952 in Göttingen geboren und hat dort von 1973 bis 1978 Mathematik studiert. Hier erhielt er 1980 das Doktorat und 1982 die Habilitation in Mathematik. Als Heisenberg-Stipendiat war er zu mehreren Aufenthalten an der University of Berkeley, dem Mittag-Leffler Institut in Stockholm, und dem Max-Planck-Institut in Bonn. Von 1989 bis 1992 war er Professor für Mathematik an der Universität Bonn und folgte 1992 einem Ruf auf ein Ordinariat für Mathematik an der Universität Zürich. Sein Arbeitsgebiet ist die komplexe Geometrie und ihre Verbindung zur Topologie.

Der vorliegende Beitrag basiert auf dem Manuskript meiner Antrittsrede, die ich am 25. April 1994 vor einem nicht-mathematischen Publikum an der Universität Zürich gehalten habe. Als Thema meines Vortrages habe ich mir ein Gebiet gewählt, auf dem in den letzten 10–15 Jahren eine Reihe überraschender Durchbrüche und eine Fülle spektakulärer Ergebnisse erzielt worden sind: Die vierte Dimension.

Mathematisch ausgedrückt handelt es sich hierbei um die Klassifikation differenzierbarer Strukturen auf Mannigfaltigkeiten der Dimension 4.

Bei Aussenstehenden erweckt es immer wieder Erstaunen, mit welcher Leichtigkeit die Mathematik jenseits aller Anschauung vier- und mehrdimensionale Räume behandelt. Eingeweihte haben sich daran gewöhnt, für sie ist dies zur Selbstverständlichkeit geworden. Sie haben andere Gründe, der Dimension vier besondere Beachtung zu schenken, zum Beispiel diesen: Der Raum $\mathbb{R}^n$ besitzt für $n \neq 4$ nur eine einzige differenzierbare Struktur, aber in $\mathbb{R}^4$ gibt es neben der üblichen noch andere — exotische — differenzierbare Strukturen. Dieses Resultat hat bei seinem Bekanntwerden vor einigen Jahren die Fachwelt völlig überrascht. Wie andere tiefe Resultate der Mathematik wurde es zum Anfangspunkt einer neuen mathematischen Entwicklung. Fragen, nach der Anzahl und der Klassifikation der verschiedenen differenzierbaren Strukturen in $\mathbb{R}^4$ und in anderen Mannigfaltigkeiten stellten sich und gaben Anlass zu intensiver Forschung, in die der Autor des vorliegenden Beitrages direkt involviert ist. — Beim Text handelt es sich um die überarbeitete Version des Manuskriptes der Antrittsrede von Christian Okonek an der Universität Zürich. *ust*

Warum ist nun gerade die Dimension 4 so besonders interessant? Es gibt hierfür sicher mancherlei verschiedene Gründe, wie etwa die Tatsache, dass die uns umgebende physikalische Welt ja (mindestens) 4-dimensional ist: Sie hat neben den drei Raumrichtungen auch noch eine vierte, zeitliche Dimension. Ein anderer Grund ist aber rein innermathematischer Natur: Die Geometrie in Dimension 4 ist nämlich in vielerlei Hinsicht völlig einzigartig; es gibt zahlreiche grundlegende Phänomene, in denen sich 4-dimensionale Mannigfaltigkeiten von denen in allen anderen Dimensionen ganz wesentlich unterscheiden.

Ich habe versucht, in meinem Vortrag einige dieser Phänomene zu erläutern und sie in einen grösseren Zusammenhang einzuordnen, um so die Einzigartigkeit der Dimension 4 herauszustellen. Dabei habe ich mich besonders bemüht, etwas von der Faszination zu vermitteln, die die vierte Dimension auf viele Mathematiker ausübt. Herrn Prof. U. Stammbach möchte ich an dieser Stelle herzlich für die Anregung zu dieser Publikation und für die Unterstützung bei ihrer Herstellung danken.

1 Differenzierbare Strukturen auf Mannigfaltigkeiten

Eines der fundamentalen Konzepte in der Geometrie ist der Mannigfaltigkeitsbegriff, der sich im letzten Jahrhundert, genauer, beginnend mit B. Riemanns Habilitationsvortrag 1854, entwickelt hat. Heute versteht man unter einer (topologischen) Mannigfaltigkeit der Dimension n einen topologischen Raum, der im Kleinen so aussieht wie eine offene Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ eines n-dimensionalen Zahlenraumes.

Einfache Beispiele sind die n-dimensionalen Einheitsphären

$$S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} | \; \|x\| = 1\},$$

oder allgemeiner Oberflächen von Körpern mit glattem Rand, wie etwa Tori T^n der Dimension n (siehe Figur 1).

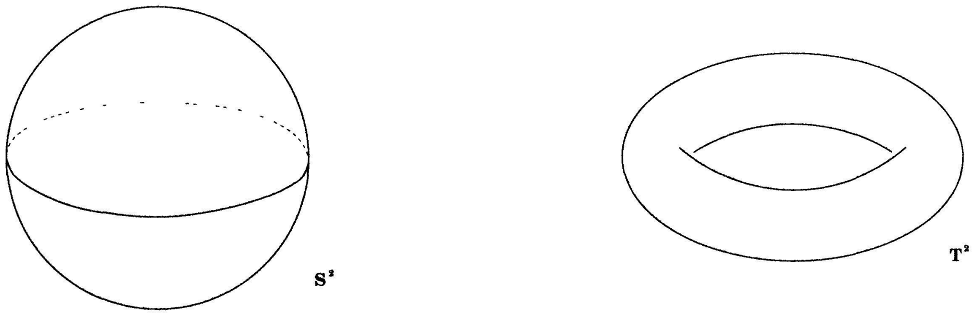

Fig. 1

Nach Definition besitzt jede Mannigfaltigkeit eine Überdeckung durch ein System offener Mengen $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$, so dass jede dieser Mengen U_α durch eine bijektive, in beiden Richtungen stetige, Abbbildung $h_\alpha : U_\alpha \to h_\alpha(U_\alpha) \subset \mathbb{R}^n$ mit einer offenen Teilmenge $h_\alpha(U_\alpha)$ im $\mathbb{R}^n$ identifiziert werden kann. Man nennt ein solches Paar (U_α, h_α) eine Karte, und bezeichnet die Abbildungen $h_\beta \circ h_\alpha^{-1} : h_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to h_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ als Kartenwechsel (siehe Figur 2).

Für viele natürliche Probleme ist nun wichtig, auf Mannigfaltigkeiten auch Analysis treiben zu können, d.h. man möchte einen sinnvollen Differenzierbarkeitsbegriff haben,

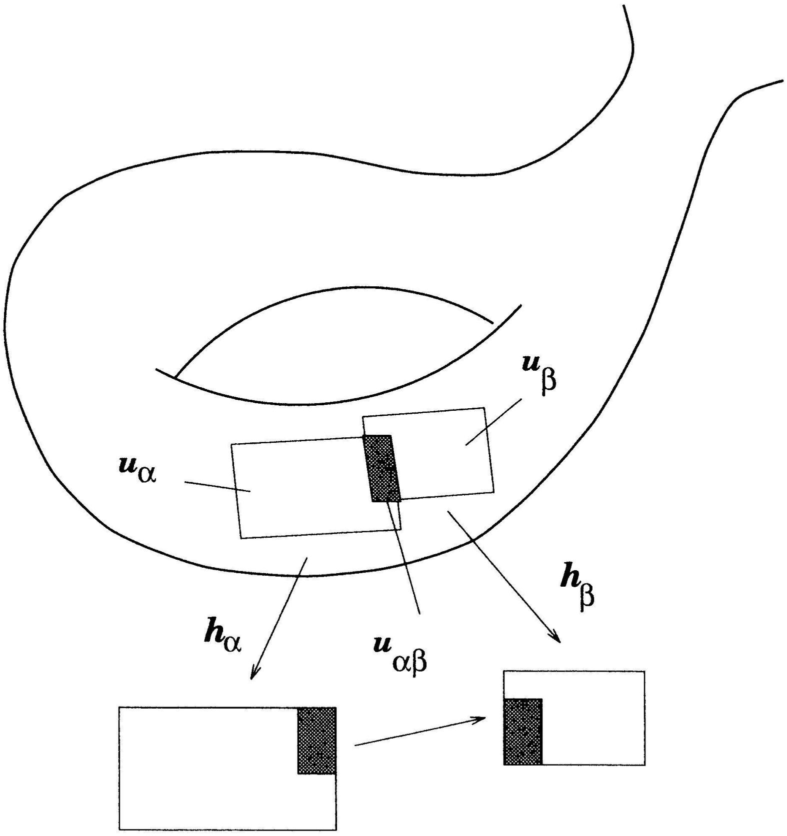

Fig. 2

der im Kleinen mit dem üblichen Begriff übereinstimmt. Es ist nicht schwer einzusehen, dass dies möglich ist, sobald alle Kartenwechsel (die ja Abbildungen zwischen offenen Mengen in Zahlenräumen sind) differenzierbar sind. Ist in dieser Weise ein Differenzierbarkeitsbegriff definiert, so sagt man, man habe auf der Mannigfaltigkeit eine differenzierbare Struktur erklärt. An dieser Stelle treten nun einige Probleme auf: Einerseits gibt es Mannigfaltigkeiten, auf denen keine differenzierbare Struktur eingeführt werden kann, andererseits gibt es auch Beispiele von Mannigfaltigkeiten mit mehr als einer differenzierbaren Struktur. Die Aufgabe der Differentialtopologie besteht darin, diese Phänome zu verstehen, d.h., alle differenzierbaren Mannigfaltigkeiten zu klassifizieren. Dieses Klassifikationsproblem zerlegt man üblicherweise in drei Teile:

Problem I: Klassifiziere alle topologischen Mannigfaltigkeiten der Dimension n.

Problem II: Welche topologischen Mannigfaltigkeiten besitzen eine differenzierbare Struktur?

Problem III: Klassifiziere die verschiedenen differenzierbaren Strukturen auf einer festen Mannigfaltigkeit.

Im 1-dimensionalen Fall ist die Antwort sehr einfach: die 1-dimensionalen Mannigfaltigkeiten sind Vereinigungen von Kreisen und Intervallen; sie haben alle eine eindeutig bestimmte differenzierbare Struktur. Im weiteren möchte ich voraussetzen, dass alle betrachteten Mannigfaltigkeiten zusammenhängend sind, dass sie orientiert werden können, und dass sie geschlossen, d.h. kompakt sind. Bereits im letzten Jahrhundert konnte man die 2-dimensionalen Mannigfaltigkeiten vollständig klassifizieren; sie entstehen alle durch eine einfache Summenbildung ($\sharp$) mit T^2 (siehe Figur 3).

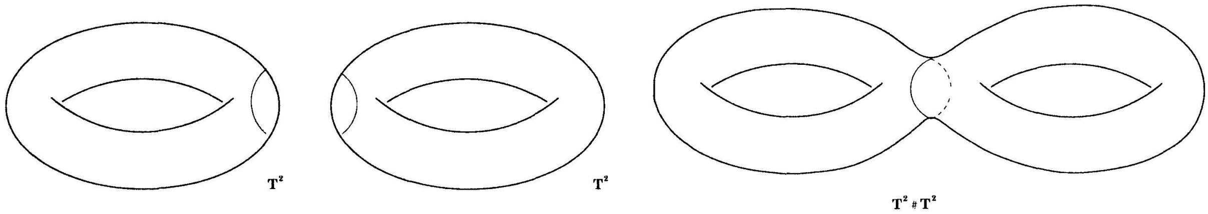

Fig. 3

Man entfernt kleine Kreisscheiben aus beiden Summanden und verbindet die entstandenen Randkreise durch einen Schlauch. Das Resultat dieser Konstruktion, die analog auch in höheren Dimensionen durchführbar ist, heisst zusammenhängende Summe der beiden ursprünglichen Komponenten. Im 2-dimensionalen Fall ist damit Problem I gelöst: Zu jedem $m \in \mathbb{N}$ gibt es — bis auf Äquivalenz — genau eine 2-dimensionale Mannigfaltigkeit, nämlich $S^2 \sharp mT^2$.

Schon in Dimension $n = 3$ ist Problem I bislang aber noch offen (und sehr schwierig). Zu den Problemen II und III gibt es einige, inzwischen klassische Resultate.

So weiss man seit etwa zwanzig Jahren, dass jede Mannigfaltigkeit der Dimension $n \leq 3$ eine eindeutig bestimmte differenzierbare Struktur besitzt. Auch für Mannigfaltigkeiten der Dimension $n \geq 5$ hat man die Probleme II und III recht gut verstanden. Durch Weiterentwicklung der fundamentalen Arbeiten von M. Kervaire und J. Milnor aus den 60er Jahren konnte man beweisen, dass eine feste Mannigfaltigkeit der Dimension $n \geq 5$ höchstens endlich viele verschiedene differenzierbare Strukturen besitzt.

Beispiel: Die folgende Tabelle enthält für jede Dimension $n \leq 7$ die Anzahl $A(n)$ der verschiedenen differenzierbaren Strukturen auf S^n.

n	1	2	3	4	5	6	7
$A(n)$	1	1	1	?	1	1	28

Ein konkretes Beispiel einer exotischen 7-Sphäre ist die Brieskorn-Sphäre Σ^7, die durch folgende Gleichungen im $\mathbb{C}^5$ definiert wird:

$$z_1^5 + z_2^3 + z_3^2 + z_4^2 + z_5^2 = 0, \quad |z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2 + |z_4|^2 + |z_5|^2 = 1.$$

Die geometrischen Techniken, mit denen diese höherdimensionale Klassifikation erzielt wurde, werden als "surgery" bezeichnet. Grob gesprochen versucht man, komplizierte Mannigfaltigkeiten durch einfache und kontrollierbare Operationen zu vereinfachen, bzw. sie umgekehrt aus einfachen Mannigfaltigkeiten aufzubauen. Ein wesentlicher Schlüssel für dieses Vorgehen ist die Gültigkeit des sogenannten h-Cobordismus Satzes, der es erlaubt, die Klassifikation differenzierbarer Strukturen auf Mannigfaltigkeiten der Dimension $n \geq 5$ auf Probleme in der Homotopietheorie zurückzuführen. Ein letztes Resultat über die Klassifikation differenzierbarer Strukturen in der Dimensionen $n \neq 4$ betrifft die nicht-kompakten Räume $\mathbb{R}^n$: Der $\mathbb{R}^n$ besitzt für jede Dimension $n \neq 4$ nur eine einzige differenzierbare Struktur, die Standardstruktur.

2 4-Mannigfaltigkeiten und quadratische Formen

Was weiss man nun über die drei Hauptprobleme in Dimension 4? Obwohl viele gute Mathematiker über diese Frage nachgedacht hatten, gab es — bis etwa 1980 — so gut wie keine systematischen Ergebnisse. Man versuchte im wesentlichen, die Surgery-Techniken, die ja in höheren Dimensionen zum Erfolg geführt hatten, auch in Dimension 4 einzusetzen [M]. Für differenzierbare 4-Mannigfaltigkeiten konnte das nicht gelingen, wie wir im nächsten Abschnitt sehen werden. Für topologische Mannigfaltigkeiten ist dies allerdings anders; die Quintessenz der Arbeiten von M. Freedman und der Ergänzungen durch F. Quinn ist gerade die Aussage, dass Surgery-Methoden auf topologische Mannigfaltigkeiten auch in Dimension 4 anwendbar sind.

Um ihr Resultat formulieren zu können sind einige Vorbereitungen nötig. Sei dazu X ab jetzt immer eine zusammenhängende geschlossene und orientierte Mannigfaltigkeit der Dimension 4. Wir setzen zur Vereinfachung zusätzlich voraus, dass X einfach-zusammenhängend ist, das heisst, dass jede geschlossene Kurve in X zu einem Punkt zusammenziehbar ist. In dieser Situation gibt es dann eine fundamentale Invariante, die X fast völlig bestimmt. Diese Invariante S_X, die sogenannte Schnittmatrix von X, ist eine ganzzahlige, symmetrische Matrix mit Determinante $\det S_X = \pm 1$.

Beispiel: Die Schnittmatrix von $X = S^2 \times S^2$ ist die 2×2-Matrix

$$S_X = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

die man auch mit H bezeichnet.

Genau genommen ist die Schnittmatrix einer 4-Mannigfaltigkeit X nur bis auf Äquivalenz (Konjugation mit invertierbaren Matrizen) bestimmt. Man sagt, eine ganzzahlige, symmetrische Matrix A sei vom Typ II, wenn alle Einträge auf der Diagonalen gerade Zahlen sind; ist dies nicht der Fall, so heisst die Matrix vom Typ I. Beispielsweise ist

$$H = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

eine Matrix von Typ II, während die Einheitsmatrizen I_n der Grösse n alle vom Typ I sind. Wir können nun das Klassifikationsresultat formulieren [F/Q].

Theorem: *Zu jeder ganzzahligen, symmetrischen Matrix A mit $\det A = \pm 1$ gibt es eine einfach-zusammenhängende 4-Mannigfaltigkeit X, deren Schnittmatrix S_X zu A äquivalent ist. X ist eindeutig bestimmt, wenn A vom Typ II ist. Ist A vom Typ I, so gibt es zwei verschiedene Mannigfaltigkeiten X_0 und X_1. Sie unterscheiden sich dadurch, dass $X_0 \times S^1$ eine differenzierbare Struktur besitzt, $X_1 \times S^1$ aber nicht.*

Die Bedeutung dieses Satzes liegt darin, dass er ein schwieriges topologisches Problem, die Klassifikation einfach-zusammenhängender 4-Mannigfaltigkeiten, in ein rein zahlentheoretisches Problem übersetzt, nämlich in die Aufgabe, ganzzahlige, symmetrische Matrizen mit Determinante ± 1 bis auf Konjugation zu klassifizieren.

Mit dieser Frage haben sich Zahlentheoretiker bereits seit dem vorletzten Jahrhundert beschäftigt. Sie haben gezeigt, das dieses Klassifikationsproblem in zwei völlig verschiedene Teilbereiche zerfällt, von denen der eine sehr einfach behandelt werden kann, während der andere sehr schwierig ist. Der einfache Teil ist die Klassifikation der indefiniten Matrizen; hier genügt es, drei einfach ablesbare Invarianten (Rang, Signatur und Typ) einer Matrix zu kennen. Viel komplizierter ist dagegen die Klassifikation der definiten Matrizen. Eine vollständige Beschreibung existiert nur für Matrizen der Grösse $n \leq 16$; darüberhinaus hat man im wesentlichen nur ein Endlichkeitsresultat, das auf Hermite und Eisenstein zurückgeht: *Für jede natürliche Zahl n gibt es nur endlich viele Äquivalenzklassen von definiten, ganzzahligen, symmetrischen $n \times n$-Matrizen der Grösse n.*

Beispiel: Es gibt nur eine Klasse von (negativ-)definiten, ganzzahligen, symmetrischen 8×8-Matrizen vom Typ II. Ein Repräsentant ist

$$E_8 = \begin{bmatrix} -2 & 1 & & & & & & \\ 1 & -2 & 1 & & & & & \\ & 1 & -2 & 1 & & & & \\ & & 1 & -2 & 1 & & & \\ & & & 1 & -2 & 1 & & 1 \\ & & & & 1 & -2 & 1 & \\ & & & & & 1 & -2 & \\ & & & & 1 & & & -2 \end{bmatrix}.$$

Bei dem Versuch einer vollständigen Klassifikation für grössere n stösst man sehr schnell an Grenzen; so gibt es beispielsweise bereits mehr als 10^{51} verschiedene Klassen definiter $n \times n$-Matrizen mit $n = 40$. Da jede dieser Klassen durch die Schnittmatrix einer einfach-zusammenhängenden topologischen 4-Mannigfaltigkeit repräsentierbar ist, kann man das oben beschriebene Problem I in Dimension 4 (auch im einfach-zusammenhängenden Fall) nur mit entsprechenden Einschränkungen als gelöst betrachten.

3 Donaldson Theorie, exotische Strukturen und algebraische Flächen

Die eben geschilderten Resultate erlauben es, das Problem II in folgender Weise umzuformulieren.

Problem II′: Welche Matrizen gehören zu 4-Mannigfaltigkeiten, die eine differenzierbare Struktur besitzen?

Es war bereits seit 1952 bekannt, dass nicht alle (ganzzahligen, symmetrischen) Matrizen (mit Determinante ± 1) als Schnittmatrizen einfach-zusammenhängender differenzierbarer 4-Mannigfaltigkeiten auftreten können. Dieses Resultat, das von dem russischen Mathematiker V. Rohlin bewiesen worden war, schloss zum Beispiel die Existenz einer einfach-zusammenhängenden differenzierbaren 4-Mannigfaltigkeit mit Schnittmatrix E_8 aus. Rohlin's Satz — und Folgerungen daraus — waren lange Zeit der einzige Hinweis darauf, dass 4-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeiten etwas besonderes sein müssten. Es dauerte allerdings 30 Jahre, bevor S. Donaldson im Rahmen seiner Dissertation der folgende spektakuläre Durchbruch gelang [D/K].

Theorem: *Wenn eine einfach-zusammenhängende 4-Mannigfaltigkeit X mit einer definiten Schnittmatrix S_X eine differenzierbare Struktur besitzt, so ist S_X äquivalent zur Einheitsmatrix.*

Das bedeutet, dass all diejenigen Matrizen, deren zahlentheoretische Klassifikation so schwierig ist, gar nicht auftreten als Schnittmatrizen differenzierbarer 4-Mannigfaltigkeiten. Beispielsweise kann die 4-Mannigfaltigkeit mit Schnittmatrix $E_8 \oplus E_8$ keine differenzierbare Struktur zulassen. Dies hat eine weitere überraschende Konsequenz.

Theorem: *Der $\mathbb{R}^4$ besitzt mehr als eine differenzierbare Struktur.*

Die Existenz exotischer C^∞-Strukturen auf dem $\mathbb{R}^4$ erhält man durch Kombination der Arbeiten von Freedman und Donaldson. Freedman hatte nämlich bemerkt, dass entweder $E_8 \oplus E_8$ als Schnittmatrix einer differenzierbaren 4-Mannigfaltigkeit vorkommen muss oder dass $\mathbb{R}^4$ eine differenzierbare Struktur besitzt, die nicht die Standardstruktur ist. Die erste Möglichkeit wird aber durch Donaldsons Satz ausgeschlossen. Heutzutage weiss man sogar, dass es Familien $(\tilde{\mathbb{R}}^4_t)_{t\in\mathbb{R}}$ exotischer C^∞-Strukturen auf dem $\mathbb{R}^4$ gibt, die von einem kontinuierlichen Parameter t abhängen. Die Resultate über die exotischen Strukturen auf dem $\mathbb{R}^4$ sind bislang reine Existenzsätze; von einer Klassifikation aller differenzierbarer Strukturen auf dem $\mathbb{R}^4$ scheint man noch weit entfernt zu sein.

Die von Donaldson entwickelte Theorie liefert aber nicht nur Aussagen über die Nicht-Glättbarkeit gewisser 4-Mannigfaltigkeiten. Durch Weiterentwicklung seiner Methoden gelang es Donaldson auch, einen Zugang zu dem oben beschriebenen Problem III, der Frage nach der Anzahl verschiedener differenzierbarer Strukturen auf einer gegebenen (geschlossenen, orientierten, einfach-zusammenhängenden) 4-Mannigfaltigkeit, zu finden.

Sei $\mathbb{P}^2$ die komplex-projektive Ebene; ihre Schnittmatrix $S_{\mathbb{P}^2}$ ist die Einheitsmatrix $[1]$ der Grösse 1. Wählt man auf der projektiven Ebene die zur kanonischen komplexen Orientierung entgegengesetzte Orientierung, so erhält man eine differenzierbare 4-Mannigfaltigkeit $\overline{\mathbb{P}}^2$ mit Schnittmatrix $[-1]$. Sei $\mathbb{P}^2 \sharp 9\overline{\mathbb{P}}^2$ die zusammenhängende Summe der projektiven Ebene mit 9 Exemplaren von $\overline{\mathbb{P}}^2$.

Theorem: *Die differenzierbare 4-Mannigfaltigkeit $\mathbb{P}^2 \sharp 9\overline{\mathbb{P}}^2$ besitzt eine zweite differenzierbare Struktur.*

Dieser Satz, der 1984 von Donaldson gefunden wurde, impliziert, dass die sogenannte h-Cobordismen-Vermutung für 4-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeiten falsch ist; mit anderen Worten, die höherdimensionalen Klassifikationstechniken lassen sich auf differenzierbare 4-Mannigfaltigkeiten nicht anwenden [D/K]. Dies war ein sensationelles Ergebnis, das allerdings noch die Möglichkeit offen liess, dass es auch in Dimension 4 nur endlich viele verschiedene differenzierbare Strukturen auf einer festen geschlossenen Mannigfaltigkeit geben würde, analog zur Situation in höheren Dimensionen. Aber auch hier ist die Dimension 4 völlig einzigartig. Durch Weiterentwicklung der Methoden von Donaldson gelang es A. Van de Ven und mir in einer gemeinsamen Arbeit folgende Aussage zu zeigen.

Theorem: *Auf der Mannigfaltigkeit $\mathbb{P}^2 \sharp 9\overline{\mathbb{P}}^2$ gibt es unendlich viele verschiedene C^∞-Strukturen.*

Dieses Resultat wurde, unabhängig von uns, auch von R. Friedman und J. Morgan bewiesen und in viele Richtungen ausgebaut. Das Bemerkenswerte hieran war die Tatsache, dass all die unendlich vielen differenzierbaren Strukturen ganz natürlich waren; sie waren alle induziert durch gewisse wohlbekannte algebraische Flächen, d.h. durch kompakte, komplexe Mannigfaltigkeiten der komplexen Dimension 2, die als Nullstellenmengen polynomialer Gleichungen in projektiven Räumen beschrieben werden können.

Nun kann man auch algebraische Flächen klassifizieren; man tut dies allerdings unter algebraischen Gesichtspunkten, d.h. man nimmt eine erste grobe Einteilung anhand einer wichtigen algebraischen Invariante vor, der sogenannten Kodaira-Dimension. Diese Kodaira-Dimension kann für algebraische Flächen die Werte $-\infty, 0, 1$ und 2 annehmen und ist ein Mass für die Grösse gewisser Bereiche algebraischer Funktionen. Van de Ven hatte nun bemerkt, dass algebraische Flächen mit unterschiedlichen Kodaira-Dimensionen in allen bekannten Fällen immer auch als differenzierbare Mannigfaltigkeiten verschieden waren, und hatte eine entsprechende Vermutung formuliert [V].

Vermutung (Van de Ven): *Die Kodaira-Dimension algebraischer Flächen ist eine differentialtopologische Invariante.*

Diese Vermutung, und gewisse Verfeinerungen, war in den letzten 10 Jahren das Leitproblem bei der Untersuchung der Differentialtopologie algebraischer Flächen [F/M].

Ich habe im April 1994 das Manuskript einer Arbeit von R. Friedman und Z. Qin erhalten, in der diese zentrale Vermutung bewiesen wird.

4 Methoden

Der Schlüssel für den Beweis des Klassifikationssatzes von Freedman und Quinn liegt in Freedman's Resultat über die topologische Trivialität sogenannter Casson-Henkel. Ich kann hierauf nicht näher eingehen, sondern möchte nur erwähnen, dass Freedman's Beweis wesentlich auf den von R. Bing in den 50er Jahren entwickelten Techniken der geometrischen Topologie beruht.

Die Methoden der Donaldson-Theorie sind völlig anderer Natur: Sie stammen ursprünglich aus der mathematischen Physik, genauer aus der Eichtheorie. Die Physiker interessierten sich bereits seit einiger Zeit für die Yang-Mills Gleichungen, ein System von partiellen Differentialgleichungen, die als Euler-Lagrange Gleichungen gewisser Variationsprobleme auftreten. Diese Variationsprobleme besitzen auf geschlossenen Mannigfaltigkeiten aus topologischen Gründen globale Minima, die sogenannten Instantonen. Die Menge aller Instantonen-Lösungen bildet nun einen Parameterraum, den Modulraum der Instantonen, dessen Untersuchung der Ausgangspunkt für die Donaldson Theorie ist. Im einfachsten Fall, dem Beweis über die Trivialität definiter Schnittmatrizen differenzierbarer 4-Mannigfaltigkeiten, gewinnt Donaldson aus einem geeigneten Instantonen-Modulraum eine 5-dimensionale Mannigfaltigkeit mit Rand, wobei eine Randkomponente die zugrundeliegende 4-Mannigfaltigkeit selbst ist, während alle anderen Randkomponenten Kopien von $\mathbb{P}^2$ sind. Aus dieser geometrischen Tatsache folgt die Trivialität der Schnittmatrix mit einem einfachen algebraischen Argument. Für die Aussagen zu Problem III ist es nötig, Invarianten zu konstruieren, die in der Lage sind, zwischen verschiedenen differenzierbaren Strukturen auf einer gegebenen Mannigfaltigkeit zu unterscheiden. Donaldson konstruiert solche Invarianten wieder mit Hilfe von Instantonen-Modulräumen, also aus Lösungsräumen partieller Differentialgleichungssysteme; seine

Invarianten haben im allgemeinen die Form ganzzahliger Polynome. Natürlich ist es äusserst schwierig, diese Donaldson-Polynome, die ja eichtheoretisch definiert sind, direkt zu berechnen. Hier kommt dann die algebraische Geometrie zur Hilfe: Wenn die betrachtete 4-Mannigfaltigkeit die Struktur einer algebraischen Fläche besitzt, dann lassen sich die Instantonen-Modulräume algebraisch interpretieren als Modulräume stabiler Vektorbündel. Allerdings beruht diese Interpretation auf einem weiteren tiefliegenden Resultat, der sogenannten Kobayashi-Hitchin-Korrespondenz [K]. Modulräume stabiler Vektorbündel wurden nun aus anderen Gründen seit den 60er Jahren von algebraischen Geometern intensiv studiert, so dass hier bereits viele Methoden zur Verfügung standen [O/S/S]. Auf diesem Weg über die algebraische Geometrie konnte Donaldson eine seiner Invarianten explizit berechnen, und so die Existenz einer exotischen C^∞-Struktur auf $\mathbb{P}^2 \sharp 9\overline{\mathbb{P}}^2$ beweisen. Auf dem gleichen Grundprinzip beruhen auch die meisten anderen Ergebnisse zur Differentialtopologie algebraischer Flächen [F/M].

In letzter Zeit ist es gelungen, auch 4-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeiten zu behandeln, die keine algebraischen Flächen sind. Diese Entwicklungen hängen eng zusammen mit der Konstruktion von relativen Invarianten für nicht-geschlossene Mannigfaltigkeiten, und mit der Untersuchung der Floer-Homologie [O]. Es gibt in dieser Richtung schon grosse Erfolge, wie etwa die Konstruktion von Gegenbeispielen zur Thom-Vermutung.

Literatur

[D/K] Donaldson, S., Kronheimer, P.: The Geometry of Four-Mannifolds. Clarendon Press, Oxford, 1990

[F/Q] Freedman, M., Quinn, F.: The topology of 4-manifolds. Princeton Math. Series **39**, Princeton Univ. Press, Princeton 1990

[F/M] Friedman, R., Morgan, J.: Smooth Four-Manifolds and Complex Surfaces. Springer Verlag, Berlin Heidelberg New York 1994

[K/S] Kirby, R., Siebenmann, L.: Foundational essays on topological manifolds, smoothings and triangulations. Ann. Math. Studies 88, Princeton Univ. Press, Princeton 1977

[K] Kobayashi, S.: Differential geometry of complex vector bundles. Iwanami Shoten and Princeton Univ. Press, Princeton, 1987

[M] Mandelbaum, R.: Four-Dimensional Topology: An Introduction. Bull. AMS. **2** (1), 1–159, 1980

[O] Okonek, Ch.: Instanton Invariants and Algebraic Surfaces. In: J. Cheeger, M. Gromov, C. Okonek, P. Pansu: Geometric Topology: Recent Developments, Montecatini Terme, 1990; eds.: P. de Bartolomeis, F. Tricerri. LNM **1504**, 138–186, Springer Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1991

[O/S/S] Okonek, Ch., Schneider, M., Spindler, H.: Vector Bundles on Complex Projective Spaces. Progress in Math. 3, Birkhäuser, Boston, 1980

[V] Van de Ven, A.: On the differentiable structure of certain algebraic surfaces. Sém. Bourbaki vol. 1985–86, Exposés 651–668, n° **667**, Juin 1986, Astérisque 145–146, 1987

Christian Okonek
Mathematisches Institut
Universität Zürich
Winterthurerstrasse 190
CH-8057 Zürich