# Infinite perfekte Dreieckszerlegungen auch für gleichseitige Dreiecke

Autor(en): **Kaassen, Bernhard**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **50 (1995)**

PDF erstellt am: **15.09.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-46347

**Nutzungsbedingungen**
Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

**Haftungsausschluss**
Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

**http://www.e-periodica.ch**

El. Math. *50* (1995) 0013-6018/95/030116-06$1.50 + 0.20/0
© 1995 Birkhäuser Verlag, Basel

# Infinite perfekte Dreieckszerlegungen auch für gleichseitige Dreiecke

Bernhard Klaaßen

Bernhard Klaaßen studierte Mathematik und Informatik in München und Bonn. Zur Zeit ist er wissenschaftlicher Mitarbeiter bei der Gesellschaft für Mathematik und Datenverarbeitung (GMD) in St. Augustin, wo er kürzlich seine Dissertation zu einem Thema aus dem Bereich Schaltkreissimulation fertiggestellt hat.

## 1 Vorgeschichte

Die Bezeichnung "perfekte Zerlegung" stammt aus einer klassischen Arbeit von Brooks *et al.* [Bro40], in der die Zerlegung von Rechtecken in paarweise inkongruente Quadrate untersucht wurde und der Begriff *perfectly squared square* für solche Objekte geprägt wurde, wie man sie beispielsweise auf dem Deckblatt des *Journal for Combinatorial Logic* betrachten kann.

Später untersuchte W.T. Tutte (einer der Mitautoren von [Bro40]) die analoge Fragestellung für Dreieckszerlegungen (siehe [Tut48], [Bro75]). Dieses Problem erwies sich als etwas hartnäckiger, denn es zeigte sich, daß die Zerlegung eines konvexen Polygons in paarweise inkongruente gleichseitige Dreiecke nicht möglich ist, wenn man von diesen nur endlich viele zuläßt. Eine solche "lokal finite" Zerlegung (d.h. in jeder Umgebung jedes Punktes liegen nur endlich viele Elemente der Zerlegung) ist auch für die euklidische Ebene ausgeschlossen [Sch83].

Die Frage nach der Existenz einer Zerlegung eines Polygons in paarweise nichtkongruente Quadrate oder gleichseitige Dreiecke hat schon öfter das Interesse von Mathematikern auf sich gezogen (siehe die am Ende des vorliegenden Beitrages angegebene Literatur). Schon 1948 hat z.B. W.T. Tutte nachgewiesen, daß es nicht möglich ist, ein gleichseitiges Dreieck in *endlich* viele nichtkongruente gleichseitige Dreiecke zu zerlegen. Ob Zerlegungen mit *unendlich* vielen Teildreiecken existieren, war bis anhin eine offene Frage. Natürlich werden unendliche Zerlegungen (mindestens) eine Singularität aufweisen müssen: Es gibt Punkte, in deren Umgebung sich die Teildreiecke häufen. In der vorliegenden Arbeit konstruiert Bernhard Klaaßen eine derartige Zerlegung mit *drei* Singularitäten. Eine geringe Modifikation liefert schließlich auch eine Zerlegung der ganzen Ebene in paarweise nichtkongruente gleichseitige Dreiecke, bei der nur *eine* Singularität auftritt. *ust*

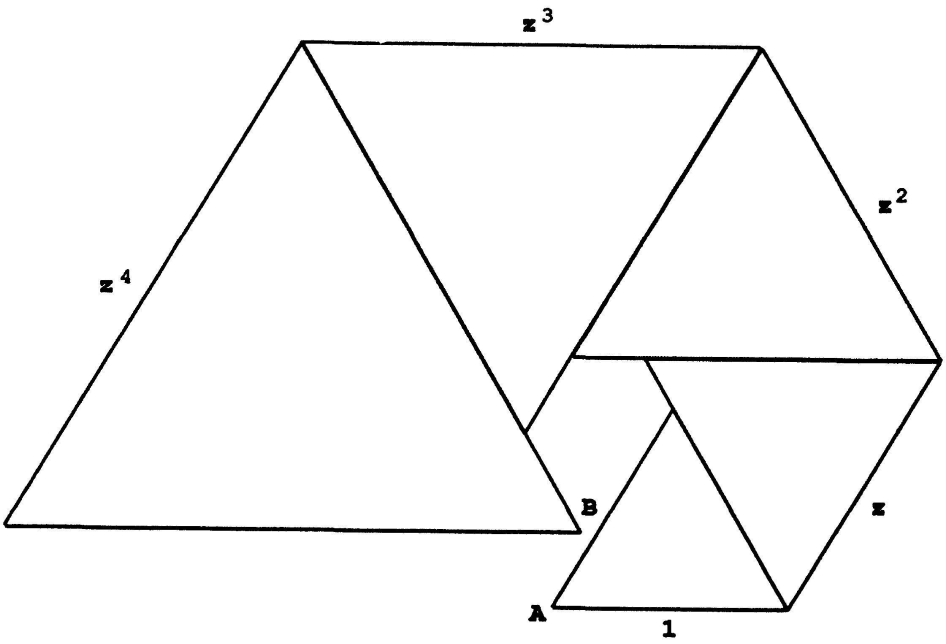


Abb. 1

Bei nichtgleichseitigen Dreiecken wurde die Frage nach perfekten Zerlegungen in [Buc81] und [Kai91] (unabhängig voneinander) vollständig beantwortet.

Aber sowohl im Standardwerk über Zerlegungen [Grü87] als auch in einem neueren Artikel zu diesem Thema [Tuz91] wurde als offenes Problem formuliert: Gibt es für die euklidische Ebene oder ein gleichseitiges Dreieck eine Zerlegung in abzählbar viele — paarweise inkongruente — gleichseitige Dreiecke, wenn endlich viele Punkte erlaubt sind, an denen die Zerlegung nicht mehr lokal finit ist?

Bei genauerer Betrachtung muß man hier unterscheiden, ob diese singulären Punkte zum Rand eines Teildreiecks gehören, oder keinem Teildreieck zugeordnet werden können. (In [Grü87] sind Beispiele für beide Arten von Singularitäten angegeben.) Bei den folgenden infiniten Zerlegungen handelt es sich stets um den zweiten Typ.

## 2 Dreieckszerlegung der Ebene mit einer Singularität

In diesem Abschnitt soll eine Zerlegung der euklidischen Ebene in paarweise inkongruente gleichseitige Dreiecke mit einem singulären Punkt vorgestellt werden. Man betrachte dazu die Abbildung 1.

Ausgehend vom Dreieck mit der Kantenlänge 1 sind die gegen den Uhrzeigersinn angeordneten Dreiecke jeweils um den Faktor $z$ vergrößert. $z > 1$ soll nun so gewählt werden, daß das fünfte Dreieck mit seiner Ecke $B$ wieder das erste Dreieck im Punkt $A$ berührt. Daß dies möglich ist, zeigen die folgenden Gleichungen für den Weg von $A$ nach $B$:

$y$-Koordinate:

$$\frac{1}{2}\sqrt{3}(z + z^2 - z^4) = 0 \Leftrightarrow 0 = z^3 - z - 1 =: p_1(z) \qquad (1)$$

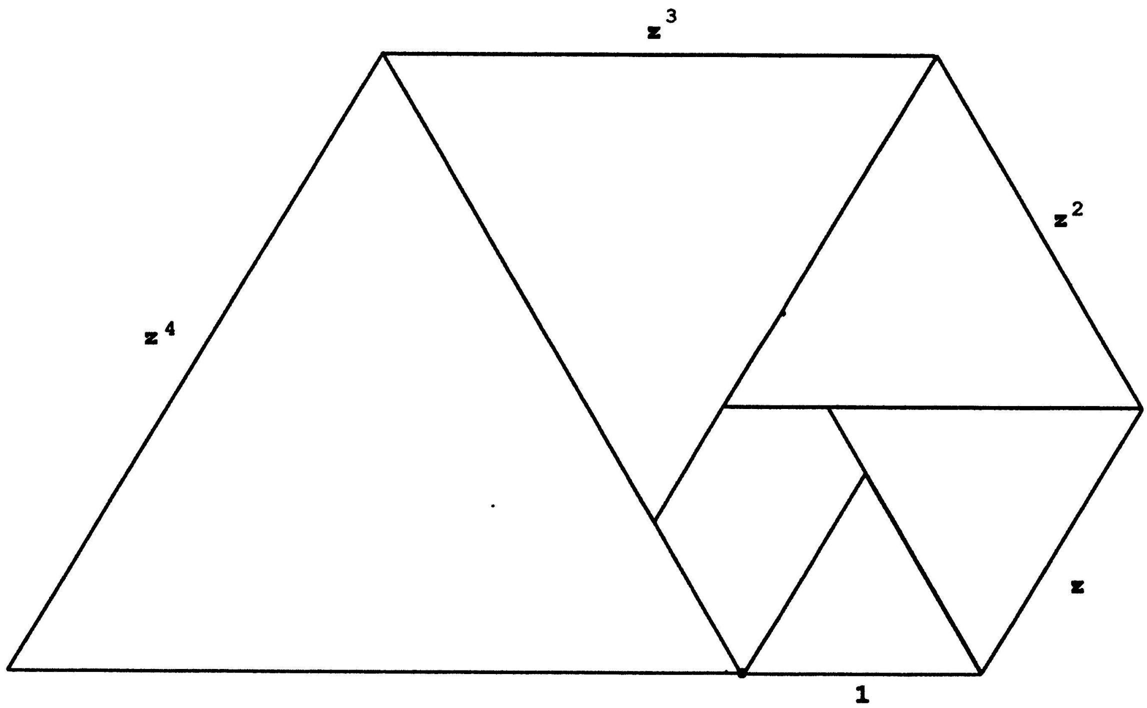


Abb. 2

$x$-Koordinate:

$$1+\frac{z}{2}-\frac{z^2}{2}-z^3+\frac{z^4}{2}=0 \Leftrightarrow 0=z^4-2z^3-z^2+z+2=: p_2(z) \tag{2}$$

Durch Polynomdivision zeigt sich, daß $p_1$ Teiler von $p_2$ ist, weshalb

$$z_0=\left(\frac{1+\sqrt{23/27}}{2}\right)^{1/3}+\left(\frac{1-\sqrt{23/27}}{2}\right)^{1/3},$$

die positive Nullstelle von $p_1$, beide Gleichungen erfüllt und sich das in Abbildung 2 gezeigte Bild ergibt.

Multipliziert man $p_1$ mit $z^2-z+1$, so erhält man

$$z^5-z^4-1=0 \Leftrightarrow \frac{1}{z}=z^4-z^3 \tag{3}$$

Aus (3) folgt, daß das von den 5 Dreiecken in Abbildung 2 umspannte Fünfeck dem äußeren Fünfeck ähnlich ist (mit einem Vergrößerungsfaktor $z_0^5$). Also läßt sich die Figur nach innen und außen rekursiv fortsetzen (siehe Abbildung 3):

Wir können diesen Abschnitt zusammenfassen zu

**Satz 1:** *Die euklidische Ebene läßt sich in abzählbar viele, paarweise inkongruente, gleichseitige Dreiecke zerlegen, wenn ein singulärer Punkt zugelassen ist.*

*Bemerkung:* Diese Zerlegung ist analog auch mit einem beliebigen nichtgleichseitigen Dreieck durchführbar: Man normiere die längste Seite auf 1 und beginne wie in Abbildung 2 mit fünf sukzessive vergrößerten Dreiecken (Faktor $z_0$). Man erhält so ebenfalls einen spiralartigen Aufbau von Dreiecken. Allerdings tritt die Ähnlichkeit zwischen innerem und äußerem Fünfeck hier erst nach Hinzufügen eines sechsten Dreiecks ein (Faktor $z_0^6$).

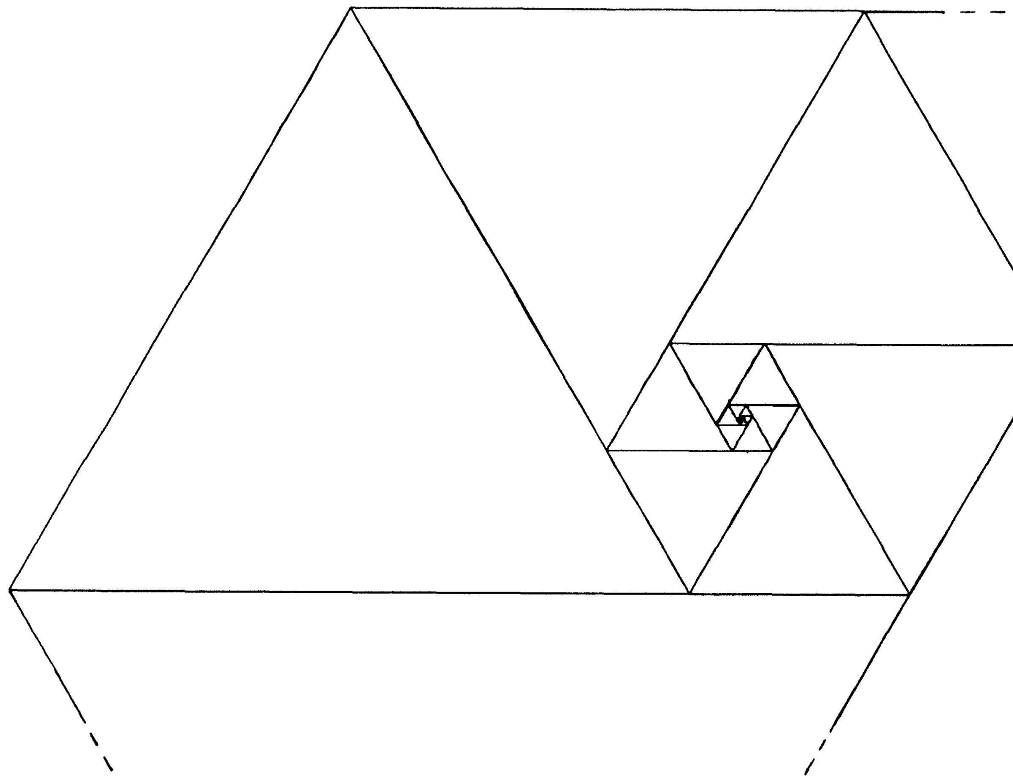

Abb. 3

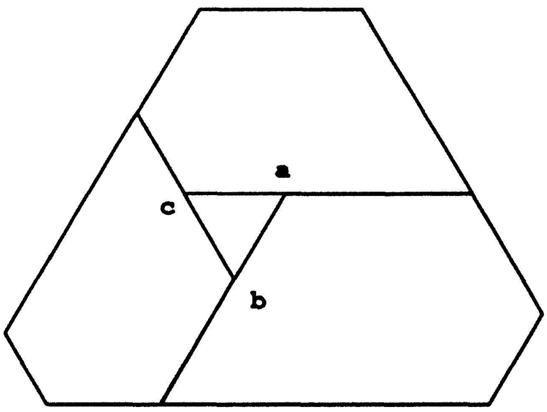


Fig. 4.1

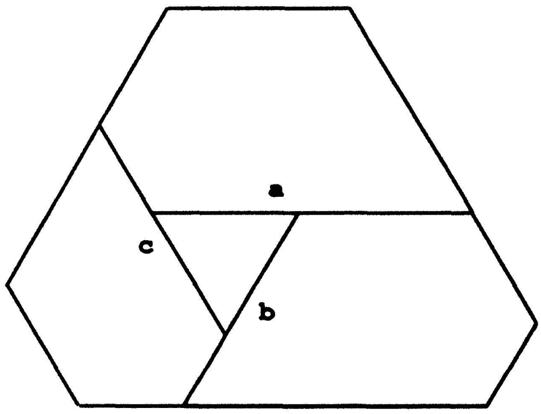


Fig. 4.2

## 3 Infinite Zerlegung des gleichseitigen Dreiecks

Wie in [Tut48] gezeigt wurde, ist die Zerlegung eines gleichseitigen Dreiecks in endlich viele inkongruente gleichseitige Dreiecke nicht möglich. Abbildung 2 zeigte ein Beispiel für ein infinit zerlegbares konvexes Fünfeck mit einer Singularität. Diese Figur soll nun zur Zerlegung des gleichseitigen Dreiecks verwendet werden.

Dazu soll zunächst ein unsymmetrisches Sechseck (mit 120°-Winkeln) aus unterschiedlich großen Fünfecken (jeweils ähnlich zum Umriß der Figur in Abbildung 2) konstruiert werden, das anschließend zum Dreieck ergänzt werden kann. Gruppiert man drei solcher Fünfecke um ein Dreieck, so erhält man eine Reihe von symmetrischen Fällen, die für perfekte Zerlegungen uninteressant sind sowie zwei unsymmetrische Sechsecke, wobei Spiegelungen nicht mitgerechnet sind (siehe Abbildungen 4.1 und 4.2).

Beginnen wir mit Abbildung 4.1: Das innere Dreieck normieren wir der Einfachheit halber auf die Kantenlänge 1. Die jeweils an das Dreieck angrenzenden Seiten der Fünfecke seien $a$, $b$ bzw. $c$. Damit sind alle übrigen Kanten durch Potenzen von $z_0$ auszudrücken. Wir ermitteln nun $a$, $b$, $c$ durch drei Gleichungen, die das Aneinandergrenzen der Fünfecke beschreiben:

$$\left| \begin{aligned} a - 1 &= \frac{b}{z_0} \\ b - 1 &= \frac{c}{z_0} \\ c - 1 &= \frac{a}{z_0^4} \end{aligned} \right|$$

Das lineare Gleichungssystem ist eindeutig lösbar und ergibt (durch Anwendung der Cramerschen Regel):

$$a = \frac{1 + z_0^{-2} + z_0^{-1}}{1 - z_0^{-6}}$$

$$b = \frac{1 + z_0^{-5} + z_0^{-1}}{1 - z_0^{-6}}$$

$$c = \frac{1 + z_0^{-5} + z_0^{-4}}{1 - z_0^{-6}}$$

(Wir können wegen (1) stets die Identität $z_0^3 = z_0 + 1$ bzw. $1/z_0 = z_0^2 - 1$ verwenden.)

Da die Verhältnisse $a/b$, $b/c$, $a/c$ nicht als ganzzahlige Potenzen von $z_0$ darstellbar sind (man kann dies einzeln nachrechnen), sind die Dreiecke innerhalb der drei Fünfecke alle paarweise inkongruent. Da weiterhin auch $a$, $b$, $c$ selbst keine Potenzen von $z_0$ sind, kann keines der Dreiecke in den Fünfecken die Seitenlänge 1 haben.

Schließlich sieht man durch einfache Rechnung, daß die langen Seiten der Sechsecke paarweise verschieden und größer als alle inneren Dreiecksseiten sind. Also läßt sich das bisher Gesagte zusammenfassen zum folgenden

**Satz 2:** *Abbildung 5 zeigt eine Zerlegung des gleichseitigen Dreiecks in abzählbar viele, paarweise inkongruente gleichseitige Dreiecke mit genau drei singulären Punkten.*

Die Existenz einer solchen infiniten Zerlegung mit endlich vielen Singularitäten war nach Kenntnis des Verfassers bisher noch als offene Frage betrachtet worden. Darüber hinaus ergeben sich jedoch in diesem Zusammenhang einige weiterführende Fragen.

**Problem 1:** Gibt es infinite Dreieckszerlegungen dieser Art mit weniger als drei Singularitäten? (Vermutung: nein)

**Problem 2:** Gibt es infinite Dreieckszerlegungen dieser Art mit Singularitäten, die auf dem Rand eines der Teildreiecke liegen? Dann wäre die Vereinigung aller Teildreiecke identisch mit deren konvexer Hülle. (Vermutung: nein)

Daß Abbildung 5 nicht die einzige Dreieckszerlegung mit drei Singularitäten ist, zeigt die obige Abbildung 4.2. Diese Anordnung der Fünfecke führt (ganz analog zu Abbildung 4.1) auf eine weitere Zerlegung dieser Art. Ob dies die einzigen Fälle mit genau drei Singularitäten sind, bleibt ebenfalls eine offene Frage.

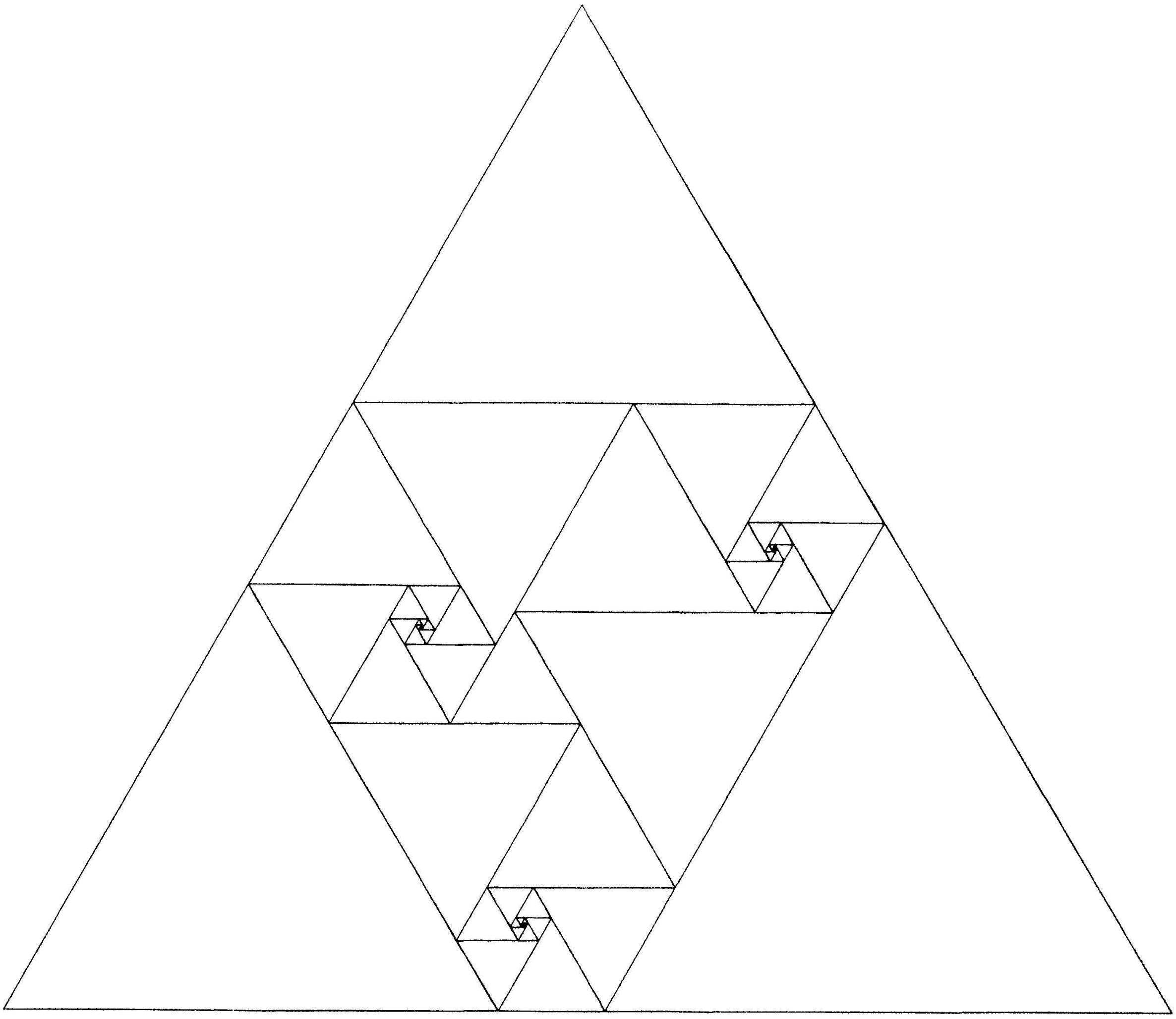

Abb. 5

## Literatur:


[Bro40] R.L. Brooks, C.A.B. Smith, A.H. Stone, W.T. Tutte, "The Dissection of Rectangles into Squares", Duke Math. J., **7**, 1940, S. 312–340.

[Bro75] R.L. Brooks, C.A.B. Smith, A.H. Stone, W.T. Tutte, "Leaky Electricity and Triangulated Triangles", Philips Res. Repts, **30**, 1975, S. 205–219.

[Buc81] E. Buchman, "The impossibility of tiling a convex region with unequal triangles", Amer. Math. Monthly, **88**, 1981, S. 748–753.

[Grü87] B. Grünbaum, G.C. Shephard, "Tilings and Patterns", Freeman and Co., New York, 1987

[Kai91] H. Kaiser, "Perfekte Dreieckszerlegungen", El. Math., **46**, 4, 1991, S. 106–111.

[Sche83] K. Scherer, "The impossibility of a tessalation of the plane into equilateral triangles whose side-lengths are mutually different, one of them being minimal", El. Math., **38**, 1, 1983, S.1–4.

[Tut48] W.T. Tutte, "The dissection of equilateral triangles into equilateral triangles", Proc. Cambridge Philos. Soc., **44** (4), 1948, S. 463–482.

[Tuz91] Z. Tuza, "Dissection into equilateral triangles", El. Math., **46**, 6, 1991, S. 153–158.



Bernhard Klaaßen
Gesellschaft für Mathematik und Datenverarbeitung (GMD)
Schloß Birlinghoven
D-53754 St. Augustin