Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Band: 50 (1995)

Artikel: Zur Reihe der Primzahlreziproken
Autor: Treiber, Dietmar
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-46350

El. Math. *50* (1995)

0013-6018/95/040164-03$1.50 + 0.20/0

Zur Reihe der Primzahlreziproken

Dietmar Treiber

Dietmar Treiber wurde 1943 geboren. Er studierte an der Universität Köln, wo er 1971 über p-adische Analysis promovierte. Er unterrichtet Mathematik und Informatik an einem Gymnasium und interessiert sich für Elementarmathematik und Didaktik der Mathematik.

Ziel dieser Note ist ein elementarer Beweis von

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\sum\limits_{p\le N} \frac{1}{p}}{\ln\ln N} = 1.$$

Dieser Grenzwert ergibt sich unmittelbar aus den beiden Abschätzungen, die wir im folgenden für die Reihe der Primzahlreziproken herleiten. In der Analytischen Zahlentheorie

Im Jahre 1737 hat Leonard Euler das folgende Resultat veröffentlicht:
Summa seriei reciprocae numerorum primorum

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{11}+\frac{1}{13}+\text{etc.}$$

est infinite magna, infinities tamen minor quam summa seriei harmonicae

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\text{etc.}$$

Atque illius summa est huius summae quasi logarithmus.

(Siehe Theorema 19 in *Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae* 9 (1737), p. 160–188; *Opera omnia* (1) XIV, p. 216–244.) Euler sagt also hier, dass die Reihe der Primzahlreziproken divergiert und dass die Partialsummen wie der Logarithmus der Partialsummen der harmonischen Reihe wachsen, also wie $\log\log n$. Dieses Resultat und seine Präzisierungen stehen am Anfang von vielen weiteren tiefliegenden Sätzen über die Primzahlverteilung, die im Laufe der Zeit entdeckt wurden. Dietmar Treiber konzentriert sich in seinem Beitrag auf das Eulersche Resultat und gibt dafür einen ganz elementaren Beweis. *ust* wird eine bessere Aussage über das asymptotische Verhalten dieser Reihe bewiesen (vgl. [1] oder [6]), freilich mit nichtelementaren Mitteln.

Die Divergenz der Reihe $\sum 1/p$ hat erstmals Leonhard Euler 1737 [3; 4] nachgewiesen. Weitere elementare Beweise für die Divergenz dieser Reihe findet man in [2] und [5].

Satz 1 *Für alle* $N \in \mathbb{N}$ *mit* $N \geq 2$ *gilt*

$$\sum_{p \leq N} \frac{1}{p} \geq \ln \ln N - \frac{1}{2}.$$

Beweis Sei $N \in \mathbb{N}$ vorgegeben. Offenbar gilt

$$\prod_{p \leq N} \left(1 + \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \cdots\right) \geq \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \geq \ln N.$$

Wenn man nun die Summenformel für die geometrische Reihe anwendet und logarithmiert, so ergibt sich

$$\sum_{p \leq N} -\ln\left(1 - \frac{1}{p}\right) \geq \ln \ln N.$$

Weiter hat man für jede Primzahl p

$$-\ln\left(1 - \frac{1}{p}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{np^n} \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{p^n} = \frac{1}{p} + \frac{1}{2} \frac{1}{p(p-1)}.$$

Insgesamt folgt

$$\ln \ln N \leq \sum_{p \leq N} \frac{1}{p} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} \leq \sum_{p \leq N} \frac{1}{p} + \frac{1}{2}.$$

Satz 2 *Für alle* $N \in \mathbb{N}$ *mit* $N \geq e^e$ *gilt die Ungleichung*

$$\sum_{p \leq N} \frac{1}{p} \leq \ln \ln N + 2 \cdot \ln \ln \ln N + 2 \cdot \ln 5 + 2.$$

Beweis Sei $N \in \mathbb{N}$ mit $N \geq e^e$ vorgegeben. Wir setzen $s := \sum_{p \leq N} 1/p$. Nach dem Polynomischen Satz gilt für alle $k \in \mathbb{N}$

$$\frac{s^k}{k!} \leq \sum_{n=2}^{N^k} \frac{1}{n},$$

woraus sich ergibt

$$\frac{s^k}{k!} \leq \ln(N^k) = k \ln N.$$

Nun gilt, wie man leicht durch vollständige Induktion bestätigt, für alle $k \in \mathbb{N}$

$$k! \leq \frac{k^{k+1}}{e^{k-1}}.$$

Daher ergibt sich für alle $k \in \mathbb{N}$

$$\frac{s^k e^{k-1}}{k^k} \leq k^2 \ln N.$$

Wir setzen nun $k := [s]$ (dabei bezeichnet $[x]$ für eine reelle Zahl x die grösste ganze Zahl $\leq x$) und erhalten

$$e^{s-2} \leq s^2 \ln N,$$

woraus sich durch Logarithmieren ergibt

$$s \leq 2 \ \ln(s) + \ln\ln N + 2.$$

Trivialerweise ist $s \leq 1/2 + 1/3 + \cdots + 1/N \leq \ln N$. Setzt man dies rechts in die letzte Formel ein und berücksichtigt $\ln\ln N \geq 1$, so erhält man $s \leq 5 \cdot \ln\ln N$. Setzt man nun diesen Term wiederum rechts in die letzte Formel ein, so ergibt sich die Behauptung von Satz 2.

Literatur

[1] T.M. Apostol: Introduction to analytic number theory, Berlin, Heidelberg, New York 1976, S. 89.

[2] L.E. Dickson: History of the theory of numbers, vol. I, Chelsea, New York, 1952, S. 413.

[3] L. Euler: Variae observationes circa series infinitas. Commentarii Academiae Scientiarium Imperialis Petropolitanae, 9 (1737) 160–188. [Opera omnia (1), 14, 216–244].

[4] L. Euler: Einleitung in die Analysis des Unendlichen, Reprint, Berlin, Heidelberg, New York 1983, S. 226–234.

[5] C. van den Eynden: Proofs that $\sum 1/p$ diverges. Amer. Math. Monthly 87 (1980) 394–397.

[6] G.H. Hardy und E.M. Wright: Einführung in die Zahlentheorie, München 1958, S. 399.

Dietmar Treiber
Libellenpfad 5
D 40764 Langenfeld