Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 51 (1996)

Rubrik: Bücher und Computersoftware

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 11.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

El. Math. *51* (1996)

0013-6018/96/020085-04$1.50 + 0.20/0
© 1996 Birkhäuser Verlag, Basel

Bücher und Computersoftware

R.B. Banks: Growth and Diffusion Phenomena. 455 Seiten, Fr. 78.–. Springer-Verlag 1994; ISBN 3-540-55507-2.

Le but de ce livre est la confrontation de modèles d'évolution temporelle avec des données expérimentales. L'auteur ne pénètre pas dans les problèmes de modélisation des phénomènes abordés mais porte au contraire l'accent sur les aspects descriptifs des modèles, c'est-à-dire leur capacité à rendre compte quantitativement des données observées.

L'ouvrage est très original de par la variété des modèles et des exemples choisis et réunit de façon très heureuse une énorme quantité d'informations dispersées dans la litérature scientifique. L'abondante bibliographie qu'il contient en devient d'ailleurs d'autant plus précieuse.

La majeure partie du texte présente des modèles classiques (exponentiel, logistique, Gompertz, Weibull etc...) ainsi que certaines généralisations en permettant par exemple à certains paramètres de dépendre du temps ou en introduisant un délai. Une section finale est consacrée à des problèmes liant une évolution temporelle à une diffusion spatiale.

Les exemples proposés proviennent de domaines très divers (évolution de populations humaines ou animales, innovation technologique, économie etc...). Le style du texte est direct et clair et la mathématique est certainement accessible aux étudiants en sciences naturelles et sociales. L'enseignant de mathématiques appliquées y trouvera également une source très valable d'exemples stimulants et très originaux.

J.-P. Gabriel, Fribourg

J. Roberts: Lure of the Integers. xvii + 310 pages, $ 28,50. The Mathematical Association of America, 1992; ISBN 0-88385-502-X.

Cet ouvrage est, en quelque sorte, les *Pensées de Pascal de la théorie des nombres*. En effet, Joe Roberts a rassemblé, sous la forme d'un ouvrage véritablement attrayant, les notes jetées, depuis le début de sa carrière, sur des petits bouts de papier à propos de certains nombres entiers. Les lecteurs d'Elementary Number Theory [1] y retrouveront la fraîcheur et la clarté du style simple et vivant de l'auteur. De structure assez exceptionnelle, mais pas sans prédécesseurs (cf. [2], [3]), ce livre constitue un assez vaste recueil de curiosités numériques; il offre ainsi une ample moisson d'informations variées sur d'innombrables entiers naturels.

Sauf cas exceptionnels, les propriétés et les particularités mentionnées par l'auteur ne sont pas assorties de leurs démonstrations. En revanche, les références détaillées données systématiquement à la fin de chacun des quelque 190 articles composant ce livre en font un instrument de travail très précieux. Tout amateur de théorie des nombres, ou plus simplement de récréations arithmétiques, pourra sans aucun doute y satisfaire sa curiosité, tandis que l'animateur d'un atelier informatique y découvrira une source quasi inépuisable de thèmes de travaux personnels à proposer aux participants.

Bien entendu, une telle compilation ne saurait se résumer; il semble opportun de mentionner seulement quelques exemples, dont le choix trahit tout naturellement une grande part d'arbitraire.

Une distinction entre les dimensions 2 et 3: un carré peut se décomposer en un nombre fini de carrés distincts – au moins 21 carrés sont nécessaires selon A. J. W. Duijestijn, qui a produit une telle décomposition en 1978 – alors qu'au contraire, un cube ne peut se décomposer en un nombre fini de cubes distincts (pp. 2, 3 et 144–146).

Parmi les 18 articles consacrés à l'entier 5: évidemment le nombre des polyèdres réguliers (du tétraèdre à l'icosaèdre) (p. 72), mais aussi l'unique nombre premier qui soit à la fois somme et différence de deux nombres premiers (p. 52), le théorème de Lamé (1844) sur le nombre maximal de divisions nécessaires à la recherche du pgcd de deux entiers par l'algorithme d'Euclide (p. 68), la dimension de la sphère unité de volume maximal (pp. 70–72).

Dans le système RSA de codage de messages à clé révélée, il y a au moins 9 mots inchangés par la codification, quels que soient les deux nombres premiers distincts p et q utilisés à cet effet (pp. 102, 103).

Toute suite de n entiers consécutifs contient au moins un élément qui soit premier avec tous les autres lorsque $n < 17$; il n'en va plus de même pour $n \geq 17$ (pp. 128–131).

Quel est le plus grand entier qui soit divisible par chacun des entiers ne dépassant pas sa racine carrée ? (p. 162). De même, avec la racine cinquième (p. 277).

Le produit des r premiers nombres premiers se décompose parfois en un produit de deux entiers consécutifs; par exemple, pour $r = 7$, $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 = 714 \cdot 715$. C'est aussi le cas pour $r = 1, 2, 3$ et 4, mais on a pu constater que ce n'était plus le cas pour $r \geq 3049$ (Nelson, Penney, Pomerance, 1974) (p. 250).

Quelle est la puissance la plus élevée de l'entier n qui divise encore $n!$? Lorsque n est premier, c'est évidemment l'exposant unité, mais pour certains nombres n cet exposant peut être curieusement assez élevé. Par exemple: $12^5 \mid 12!$, tandis que $720^{178} \mid 720!$ (pp. 251–252).

Bien sûr, on rencontre aussi les nombres déjà familiers de Kaprekar, 495 pour les entiers de trois chiffres et 6174 pour les entiers de quatre chiffres (pp. 239-241), sans oublier 1729, le fameux numéro minéralogique du taxi emprunté par Hardy lors d'une visite à Ramanujan, hospitalisé à Londres en 1917 (pp. 263, 264).

Il est aussi question du plus petit entier devenant son 99-tuple lorsqu'on encadre son expression décimale par deux chiffres 1 (p. 291).

En supprimant successivement le chiffre de droite, à partir du nombre premier 3137, on obtient une suite ne contenant encore que des nombres premiers: 313, 31 et 3. Quel est le plus grand nombre premier originaire d'une telle suite? (pp. 292, 293).

Pierre Bolli, Le Vaud

[1] Roberts, J.: Elementary Number Theory – A problem oriented approach. The MIT Press, Cambridge (Mass.), 1978.

[2] Wells, D.: The Penguin Dictionary of Curious and Interesting Numbers. Penguin Books, London, 1987.

[3] Le Lionnais, F.: Les nombres remarquables. A.S.I. 1407, Hermann, Paris, 1983.

A.M. Rockett, P. Szüsz: Continued Fractions. 188 pages, hard cover CHF 80.–, soft cover CHF 38.–. World Scientific, Singapore, 1992; ISBN 981-02-1047-7, ISBN 981-02-1052-3.

Absentes des programmes d'enseignement depuis bien longtemps, les fractions continues constituent néanmoins un sujet assez exemplaire de l'activité mathématique: l'origine en est très simple et, même si les débuts peuvent parfois sembler anodins, les développements ultérieurs peuvent déboucher assez rapidement sur des applications concrètes intéressantes et variées tandis que s'ouvrent de nouvelles et profondes perspectives théoriques.

A peine voilées dans les oeuvres de nos géniaux précurseurs grecs (n'apparaissent-elles pas en filigrane dans l'algorithme d'Euclide?), voire chez Fibonacci – Léonard de Pise (1170–1240), les fractions continues surgirent finalement au grand jour à Bologne, dans l'*Algebra* de Bombelli (1526–1572) et furent sciemment utilisées par Cataldi (1548–1626), en tant que *fractions de fractions*, dans le traitement de certaines racines carrées.

Sans doute intrigué par le curieux développement de $4/\pi$ que découvrit Lord William Brouncker (1620–1684), John Wallis (1616–1703) donna leur nom aux fractions continues et en présenta le premier exposé systématique dans son *Arithmetica infinitorum* de 1656. Une publication posthume atteste que Christian Huygens (1629–1695) maîtrisait déjà fort bien la détermination des réduites successives; dans sa *Descriptio automati planetarii* (publiée en 1698), afin de simuler le mouvement de Saturne, il remplaça le rapport 77708431/2640858 par la fraction approchée 206/7, beaucoup plus facile à réaliser mécaniquement, par exemple au moyen du train d'engrenages 103/20 et 120/21.

A partir de 1737, Léonard Euler (1707–1783) utilisa systématiquement les développements en fractions continues, que sa virtuosité algébrique lui permettait de transformer facilement en séries infinies et vice-versa. Le chapitre 18 de son *Introductio in Analysin Infinitorum* (publiée à Lausanne en 1748) leur est entièrement

consacré. A côté des séries infinies et des produits infinis, qu'il manipulait avec tant de bonheur, il considéra tout naturellement les fractions continues comme un troisième type d'expressions infinies:

Denn obwohl die Theorie dieser Brüche noch wenig ausgebildet ist, so unterliegt es doch keinem Zweifel, dass man dereinst in der Analysis des Unendlichen einen sehr ausgedehnten Gebrauch davon machen wird. Die Proben, die ich bereits öfter davon gegeben habe, machen die Erfüllung dieser Erwartung in hohem Grade wahrscheinlich. ([1], p. 293)

Parmi les promoteurs des fractions continues, on rencontre encore bien d'autres grands personnages: Joseph Louis Lagrange (1736–1813) interpréta en leurs termes la nature de certains nombres irrationnels; Evariste Galois (1811–1832) leur consacra son tout premier mémoire, tandis que Joseph Liouville (1809–1882) s'en servit pour construire explicitement des exemples de nombres transcendants.

Plus près de nous, à l'âge des ordinateurs, une méthode de factorisation des très grands nombres entiers, particulièrement efficace et se référant directement aux fractions continues, a été développée par J. Brillhart et M. Morrison (1975), selon une idée originale émise en 1931 déjà par D. H. Lehmer et R. E. Powers.

Si la plupart des traités de théorie des nombres réservent un chapitre plus ou moins important aux fractions continues ([2], [3], [4], [5], [6], [7]), ils n'en retiennent généralement que les éléments nécessaires aux applications traditionnelles du domaine considéré: équation de Pell, approximations diophantiennes. Il faut donc saluer la parution d'un ouvrage séparé, exclusivement consacré aux fractions continues qui, sans avoir ni l'ampleur ni l'ambition du classique traité d'Oskar Perron [8], offre néanmoins une excellente présentation d'ensemble de cette matière un peu particulière. Les qualités de sa rédaction situent le livre de Rockett et Szüsz immédiatement aux côtés du petit bijou [9] d'Alexandre Khintchine (1894–1959), aux multiples traductions et souvent réédité depuis 1935.

Le premier chapitre – *Introduction* – présente les notations et prépare rapidement le lecteur aux acquis fondamentaux: aux nombres rationnels les fractions continues finies, et aux nombres irrationnels les fractions continues illimitées. Le parti que l'on peut déjà tirer des fractions continues s'éclaire dans l'étude de la suite des nombres de Fibonacci. Le chapitre se conclut par l'établissement détaillé du développement du nombre e en fractions continues.

Le second chapitre – *The Law of Best Approximation* – introduit le lecteur, avec simplicité et clarté, à toute la problématique des approximations diophantiennes. On sait que l'ensemble des nombres rationnels est dense dans l'ensemble des nombres réels; cela signifie notamment que pour tout nombre irrationnel t on pourra toujours trouver une fraction p/q qui l'approche d'autant qu'on le désire. Toutefois, se résultat s'obtient souvent au prix d'un dénominateur trop grand. Les fractions continues permettent de découvrir les *meilleures approximations*, c'est-à-dire des fractions approchant le nombre t avec la précision souhaitée mais cependant nanties d'un dénominateur q aussi petit que possible. Ainsi, $3{,}14 = 157/50$ approche π à mieux que 0,005 près, alors que la fameuse fraction 22/7, que nous connaissons tous depuis notre plus tendre enfance, est encore plus proche de π, et cela en dépit d'un dénominateur nettement inférieur! Or 3,14 est une approximation décimale de π, tandis que $22/7$ est une *réduite* de son développement en fraction continue. D'ailleurs rien n'empêche le lecteur intéressé de comparer abondamment, avec le truchement de l'ordinateur, les prévisions théoriques et les résultats numériques; le logiciel Mathematica se prête particulièrement bien à cette activité.

Le troisième chapitre – *Periodic continued fractions* – établit et développe le lien entre la périodicité d'une fraction continue et les solutions réelles d'équations du second degré. C'est ainsi que le nombre d'or $g = (1+\sqrt{5})/2$, qui est la solution positive de l'équation quadratique $x^2 - x - 1 = 0$, c'est-à-dire $x = 1 + 1/x$, correspond à la fraction continue périodique dont tous les quotients partiels sont égaux à l'unité. Ce chapitre prépare, entre autres, à la résolution de l'équation de Pell $x^2 - d \cdot y^2 = N$ qui, outre son rôle historique – le problème des boeufs d'Archimède, les malicieuses questions posées par Fermat à certains de ses contemporains, etc. – participe également au processus de factorisation de Brillhart et Morrison (cf. [7], pp. 191–199).

Le quatrième chapitre – *Applications* – a fort judicieusement reçu un ample développement de 78 pages; il offre un éventail varié et instructif d'exemples d'utilisation des fractions continues, dont il paraît utile de dévoiler la liste complète des paragraphes: 1. *Gear ratio problems*, 2. *Pell's equation*, 3. *Fermat's theorem on the sum of two squares*, 4. *Hall's theorem*, 5. *A theorem of Hurwitz*, 6. *The Lagrange and Markov spectra*, 7. *Asymmetric approximations and Segre's theorem*, 8. *Approximation by non-convergents*, 9. *Inhomogeneus approximation*, 10. *Szekeres' empty parallelogram theorem.*

Les deux derniers chapitres – *Metrical theory* et *Applications to metrical diophantine approximation* – étudient d'autres familles de nombres réels que celles résultant assez directement des méthodes du chapitre 2 (nombres

algébriques, nombres transcendants). Par exemple: *l'ensemble des nombres réels de l'intervalle* $[0, 1)$ *dont les quotients partiels (des développements en fractions continues) sont bornés est de mesure nulle* (p. 138), le théorème de Gauss-Kusmin (pp. 151–155) ou le théorème de Khintchine (pp. 160–163). Recourant au langage probabiliste et à des éléments de la théorie de la mesure de Lebesgue, ces chapitres sont un peu plus exigeants et s'adressent, en principe, à des lecteurs plus avertis.

D'une manière générale, cet ouvrage est rédigé dans un style clair et concis. A chaque étape, le lecteur est mené rapidement au but envisagé, grâce à une judicieuse économie des moyens. Il y a évidemment un prix à payer: les efforts de réflexion personnelle qu'exige sa lecture ne sont pas négligeables. Mais, comme l'assurait déjà Louis Kollros dans la préface de sa *Géométrie descriptive* (1918, p. III), ce sont eux qui rendent le travail vraiment utile. On peut même penser que cette activité compense ici, dans une certaine mesure, l'absence des exercices que l'on pourrait notamment trouver, si cela devait s'avérer nécessaire, dans les références [2], [3], [4], [6] ou [7].

Chaque chapitre se termine par de précieuses notes, qui étayent les références et qui permettent de situer encore mieux les questions discutées, soit dans le contexte de leur matière, soit dans la perspective de leur développement historique. Cet ouvrage contient également une bibliographie assez substantielle (livres et articles de revues), un index détaillé et, chose bien appréciable, une liste très précise des symboles utilisés tout au long de l'exposé.

En alliant la concision à la clarté, les auteurs ont su produire un livre vraiment incitatif, riche et intéressant, sachant amplement récompenser les efforts du lecteur attentif et persévérant.

Pierre Bolli, Le Vaud

[1] Euler, L.: Einleitung in die Analysis des Unendlichen, Reprint. Springer-Verlag, Berlin, 1983.

[2] LeVeque, W.J.: Fundamentals of Number theory. Addison-Wesley, Reading (Mass.), 1977.

[3] Burton, D.M.: Elementary Number Theory, Revised Printing. Allyn and Bacon, Boston, 1980.

[4] Eynden, C.V.: Elementary Number Theory. Random House / Birkhäuser, New York, 1987.

[5] Bundschuh, P.: Einführung in die Zahlentheorie. Springer-Verlag, Berlin, 1988.

[6] Niven, I., Zuckerman, H. S., Montgomery, H. L.: An Introduction to the Theory of Numbers. 5e édition. John Wiley, New York, 1991.

[7] Giblin, P.: Primes and Programming. Cambridge University Press, Cambridge, 1993.

[8] Perron, O.: Die Lehre von den Kettenbrüchen. 3e édition. Teubner, Stuttgart, 1954.

[9] Khintchine, A.: Kettenbrüche. Teubner, Leipzig, 1956.

S.A. Levin (ed.): Frontiers in Mathematical Biology. 633 Seiten, 94.50 sFr. Springer 1994; ISBN 3-540-58466-8.

La parution du volume des "Lecture Notes in Biomathematics" de Springer signifie malheueusement la fin de cette série. Pour marquer cet événement, l'éditeur a eu l'heureuse initiative de rassembler une importante collection d'articles destinés à faire le point sur l'état actuel des biomathématiques et sur leurs perspectives de développement. La diversité des sujets abordés est tout-á-fait remarquable, preuve en est la liste des titres des paragraphes qui composent l'ouvrage: *Frontiers in cell and molecular biology, in organismal biology, in evolutionary biology, in population ecology, in community and ecosystem ecology, in applied biology* et finalement *Mathematical challenges.*

Nous aimerions souligner que malgré cette diversité de thèmes, le livre présente une grande unité de style. Les aspects techniques ont été évacués au profit d'une discussion "spéculative et philosophique" des problématiques envisagées. Ce choix permettra à un trés vaste auditoire de profiter de la lecture de cet ouvrage.

J.-P- Gabriel, Fribourg

Typesetting & Layout: *mathScreen online, CH-4123 Allschwil*