Elementare Abschätzungen für das kleinste gemeinsame Vielfache

Autor(en): **Bil, Robert / Blessenohl, Dieter**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **51 (1996)**

PDF erstellt am: **12.07.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-46964

El. Math. *51* (1996)

0013-6018/96/020117-08$1.50 + 0.20/0

Elementare Abschätzungen für das kleinste gemeinsame Vielfache

Robert Bil und Dieter Blessenohl

Robert Bil wurde 1945 in Radom/Polen geboren. Er studierte von 1964 bis 1968 an der Hochschule der Kriegsmarine in Gdynia (Gdingen) und von 1970 bis 1974 an der Universität in Gdansk (Danzig). Anschließend arbeitete er als Lehrbeauftragter an der Hochschule der Kriegsmarine. Seit 1984 lebt Robert Bil in Kiel. Seine Gesundheit erlaubt ihm nicht, weiter aktiv zu arbeiten. Privat interessiert er sich für analytische Zahlentheorie, der er seine freie Zeit widmet.

Dieter Blessenohl wurde 1938 in Westfalen geboren. Er studierte in Freiburg und Kiel, promovierte 1967 und habilitierte sich 1977 in Kiel für das Fach Mathematik. Seit 1989 Akademischer Rat wurde er 1991 zum außerplanmäßigen Professor ernannt. Dieter Blessenohl veröffentlichte Aufsätze in den Gebieten Gruppentheorie, Körpertheorie und – seit einigen Jahren – algebraische Kombinatorik. Sein besonderes Interesse gilt zur Zeit der Darstellungstheorie der symmetrischen Gruppen, der Theorie der freien Liealgebren und kombinatorischen Problemen, die damit zusammenhängen.

Es gibt in der Zahlentheorie viele Probleme, die sich auf einfachste Weise und ohne grosse mathematische Vorbereitungen erklären lassen. Ihre mathematische Behandlung stellt sich dann allerdings oft als ausserordentlich schwierig heraus; das Fermat-Problem ist in dieser Beziehung keine Ausnahme. – Robert Bil und Dieter Blessenohl beschäftigen sich im vorliegenden Beitrag mit einem derartigen 'einfachen' zahlentheoretischen Problem:

Man schätze die Folge ab, deren n*-ter Term durch das kleinste gemeinsame Vielfache der Zahlen* $1, 2, 3, \dots, n$ *gegeben ist.*

Das kleinste gemeinsame Vielfache kann leicht angegeben werden, wenn die Primfaktorzerlegung der einzelnen Zahlen bekannt ist. Die gestellte Frage ist also eng mit dem schwierigen Problem der Primzahlverteilung verbunden, und es ist aus diesem Grund nicht zu erwarten, dass sie eine einfache Antwort zulässt. Trotz dieser schlechten Prognose gelingt es den beiden Autoren im vorliegenden Beitrag, mit ganz elementaren Mitteln eine Abschätzung für das Wachstum der Folge anzugeben. Als Korollar erhalten sie daraus eine Verschärfung des Bertrandschen Postulates über die Primzahlverteilung. *ust*

Einleitung

Für $x \in \mathbb{R}$ bezeichnen wir wie üblich mit $[x]$ den ganzen Teil von x, also $[x] := \max\{z \in \mathbb{Z} \mid z \leq x\}$. Wir definieren

$$V(x) := \begin{cases} \text{kgV von } 1, 2, \ldots, [x] & \text{für } x \geq 1, \\ 1 & \text{für } x < 1. \end{cases}$$

Die Funktion V spielt eine wichtige Rolle bei den elementaren Methoden zur Untersuchung der Primzahlverteilung. Dies hat seinen Grund darin (siehe [5], [6]), daß der Primzahlsatz

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\pi(n)}{n/\log n} = 1 \qquad \text{äquivalent ist zu} \qquad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{V(n)} = e.$$

In der Literatur findet man häufig die Abschätzung $2^n < V(n) < 4^n$ für $n \geq 7$. Felgner([2]) hat gezeigt, daß

$$(2.2)^{n+1} < V(n) < 3^n \quad \text{für} \quad n \geq 13$$

gilt. Er stützte sich dabei auf Abschätzungen für geeignete Multinomialkoeffizienten. Diese bringen wir ins Spiel durch die Formel

$$n! = \prod_{k=1}^{\infty} V\left(\frac{n}{k}\right)$$

und zeigen

$$(2.51)^{n+1} < V(n) < (2.95)^n \quad \text{für} \quad n \geq 41.$$

Hieraus kann man leicht ableiten, daß für alle $n \geq 25$ eine Primzahl p existiert mit

$$n < p < \frac{6}{5}n.$$

Das Bertrandsche Postulat (bewiesen von Tschebyscheff 1852) besagt bekanntlich, daß es zu jeder natürlichen Zahl $n \geq 2$ eine Primzahl p mit $n < p < 2n$ gibt.

Elementare Abschätzung des $\mathrm{kgV}(1, 2, \ldots, n)$

Wir beginnen mit einer unseren Zwecken angepaßten Version der Stirlingschen Formel und zeigen zunächst die folgende Aussage:

1 $$\frac{1}{12n(n+1)} < \left(n - \frac{1}{2}\right) \log \frac{n}{n-1} - 1 < \frac{1}{12(n-1)n} \qquad (n \in \mathbb{N}, n \geq 2)$$

Beweis. Für $t \in \mathbb{R}$, $t > 1$ setzen wir

$$\ell(t) := \frac{1}{6t(t+1)(2t-1)} + \frac{2}{2t-1} - \log \frac{t}{t-1}$$

$$\text{und} \qquad r(t) := \frac{1}{6(t-1)t(2t-1)} + \frac{2}{2t-1} - \log \frac{t}{t-1}.$$

Offenbar ist $\lim_{t\to\infty} r(t) = 0 = \lim_{t\to\infty} \ell(t)$. Außerdem ist

$$\ell(2) = \frac{1}{108} + \frac{2}{3} - \log 2 < 0 \qquad \text{und} \qquad r(2) = \frac{1}{36} + \frac{2}{3} - \log 2 > 0.$$

Man rechnet leicht nach, daß $\ell'(t) > 0$, $r'(t) < 0$ ist für $t \in \mathbb{R}$, $t \geq 2$. Zusammen ergibt das $\ell(t) < 0$, $r(t) > 0$ für $t \in \mathbb{R}$, $t \geq 2$ und damit die Behauptung. $\square$

2 Die Folge $\left(\binom{2n}{n}\sqrt{n}2^{-2n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ist streng monoton wachsend und konvergiert gegen $\pi^{-\frac{1}{2}}$.

Beweis. Wir setzen $x_n := \binom{2n}{n}\sqrt{n}2^{-2n}$. Dann ist

$$x_{n+1} = x_n \frac{2n+1}{2n+2}\sqrt{1+\frac{1}{n}} = x_n\sqrt{1+\frac{1}{4n(n+1)}} > x_n.$$

Weiter folgt daraus

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_1\left(\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{4k(k+1)}\right)\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\left(\prod_{k=1}^{n}\frac{(2k+1)^2}{2k(2k+2)}\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{2n+1}{n+1}\prod_{k=1}^{n}\frac{(2k-1)^2}{(2k)^2}(2n+1)\right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Mit der Wallisschen Produktdarstellung für $\frac{\pi}{2}$ folgt die Behauptung. □

3 Stirlingsche Formel Es gibt eine Folge $(h(n))_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$\frac{1}{12(n+1)} < h(n) < \frac{1}{12n}, \qquad \text{so daß für alle } n \geq 1 \text{ gilt} \qquad n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n e^{h(n)}.$$

Beweis. Für $n = 1$ ist die Behauptung leicht zu zeigen. Sei also $n > 1$. Wir setzen $z_1 := -1$ und

$$z_k := \left(k-\frac{1}{2}\right)\log\frac{k}{k-1} - 1$$

für $k \in \mathbb{N}$, $k > 1$. Wegen **1** ist $\sum_{k\geq 1} z_k$ konvergent. Sei $z^* := \sum_{k=1}^{\infty} z_k$ der Grenzwert dieser Reihe und $h(n) := z^* - \sum_{k=1}^{n} z_k$. Aus **1** folgt

4 $$\frac{1}{12(n+1)} < h(n) < \frac{1}{12n}.$$

Weiter ist

$$z^* - h(n) = -1 + \sum_{k=2}^{n}\left((k-\frac{1}{2})\log\frac{k}{k-1} - 1\right) = -n - \log n! + \left(n+\frac{1}{2}\right)\log n,$$

und also

5 $$n! = n^{n+\frac{1}{2}}e^{-(n+z^*)+h(n)}.$$

Daraus folgt

$$\binom{2n}{n}\sqrt{n}2^{-2n} = \sqrt{2}e^{z^*-2h(n)+h(2n)}.$$

Wegen **2** und **4** ergibt das $\sqrt{2}e^{z^*} = \pi^{-\frac{1}{2}}$ und daher $z^* = -\frac{1}{2}\log 2\pi$. Mit **5** folgt nun die Behauptung. □

Die folgende Identität, die den Zusammenhang zwischen $n!$ und $V(n)$ herstellt, findet sich z.B. bei Winogradow [7], Apostol [1], Golomb [3].

6
$$n! = \prod_{k=1}^{\infty} V\left(\frac{n}{k}\right) \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Beweis. Für $n \in \mathbb{N}$ sei $U(n) := \begin{cases} p, & \text{wenn } n \text{ Potenz der Primzahl } p \text{ ist,} \\ 1 & \text{sonst.} \end{cases}$

Dann ist $n = \prod_{k|n} U(\frac{n}{k})$ und $V(x) = V([x]) = \prod_{k=1}^{[x]} U(k)$. Nun folgt:

$$n! = \prod_{\ell=1}^{n}\prod_{k|\ell} U\left(\frac{\ell}{k}\right) = \prod_{k=1}^{n}\prod_{\ell=1}^{[\frac{n}{k}]} U\left(\frac{\ell k}{k}\right) = \prod_{k=1}^{n} V\left(\left[\frac{n}{k}\right]\right) = \prod_{k=1}^{\infty} V\left(\frac{n}{k}\right). \qquad \square$$

7 Für alle $n \geq 41$ ist $(2.51)^{n+1} < V(n)$.

Beweis. Wir setzen

$$f(n) := \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\frac{1}{12(n+1)}}, \qquad g(n) := \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\frac{1}{12n}}.$$

Nach **3** ist dann $f(n) < n! < g(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Nun folgt für alle $m \in \mathbb{N}$:

$$\frac{(30m)!m!}{(15m)!(10m)!(6m)!} \geq \frac{f(30m)f(m)}{g(15m)g(10m)g(6m)} > (60\pi m)^{-\frac{1}{2}}(2^{14}3^9 5^5)^m.$$

Wegen **6** ist andererseits

$$\begin{aligned}\frac{(30m)!m!}{(15m)!(10m)!(6m)!} &= \prod_{k=1}^{\infty} \frac{V(\frac{30m}{k})V(\frac{30m}{30k})}{V(\frac{30m}{2k})V(\frac{30m}{3k})V(\frac{30m}{5k})} \\ &= V(30m)\prod_{k=1}^{\infty} \frac{\prod_{i=-1}^{28} V(\frac{30m}{30k-i})V(\frac{30m}{30k})}{\prod_{i=0}^{14} V(\frac{30m}{30k-2i})\prod_{i=0}^{9} V(\frac{30m}{30k-3i})\prod_{i=0}^{5} V(\frac{30m}{30k-5i})} \\ &= V(30m)S(m).\end{aligned}$$

Setzt man $v_i := V(\frac{30m}{30k-i})$, so ist nach geeignetem Kürzen

$$S(m) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{v_{-1}}{v_0}\cdot\frac{v_1}{v_6}\cdot\frac{v_7}{v_{10}}\cdot\frac{v_{11}}{v_{12}}\cdot\frac{v_{13}}{v_{15}}\cdot\frac{v_{17}}{v_{18}}\cdot\frac{v_{19}}{v_{20}}\cdot\frac{v_{23}}{v_{24}}.$$

Da in dieser Darstellung von $S(m)$ jeder Faktor ≤ 1 ist, erhält man schließlich

$$\left((60\pi m)^{-\frac{1}{60m}} 2^{\frac{7}{15}} 3^{\frac{3}{10}} 5^{\frac{1}{6}}\right)^{30m} < V(30m)\,.$$

Ist $n \in \mathbb{N}$ und $30m \leq n < 30(m+1)$ mit $m \geq 1115$, so ist

$$(2.51)^{n+1} \leq (2.51)^{30(m+1)} < ((60\pi m)^{-\frac{1}{60m}} 2^{\frac{7}{15}} 3^{\frac{3}{10}} 5^{\frac{1}{6}})^{30m} < V(30m) \leq V(n).$$

Für $41 \leq n \leq 30 \cdot 1115 - 1 = 33449$ ist die Behauptung des Satzes durch Rechnung zu überprüfen. □

8 Korollar Für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x \geq 41$ ist $(2.51)^x < V(x)$.

Beweis. $(2.51)^x < (2.51)^{[x]+1} < V([x]) = V(x)$. □

9 Satz Für alle $x \in \mathbb{R}^+$ ist $V(x) < (2.95)^x$.

Beweis. Für alle $m \in \mathbb{N}$ gilt nach **6**:

$$\begin{aligned}
&\frac{(42m)!}{(21m)!(14m)!(6m)!m!} \\
&= \frac{V(42m)}{V(m)} \prod_{k=1}^{\infty} \frac{V(\frac{42m}{k+1})}{V(\frac{42m}{2k})V(\frac{42m}{3k})V(\frac{42m}{7k})V(\frac{42m}{42k+42})} \\
&= \frac{V(42m)}{V(m)} \prod_{k=1}^{\infty} \frac{\prod_{i=-1}^{40} V(\frac{42m}{42k-i})}{\prod_{i=0}^{20} V(\frac{42m}{42k-2i}) \prod_{i=0}^{13} V(\frac{42m}{42k-3i}) \prod_{i=0}^{5} V(\frac{42m}{42k-7i}) V(\frac{42m}{42k+42})} \\
&= \frac{V(42m)}{V(m)} T(m).
\end{aligned}$$

Setzen wir zur Abkürzung $w_i := V(\frac{42m}{42k-i})$, so ist nach geeignetem Kürzen

$$T(m) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{w_{-1}}{w_{-42}} \frac{w_1}{w_0} \frac{w_5}{w_0} \frac{w_{11}}{w_6} \frac{w_{13}}{w_{12}} \frac{w_{17}}{w_{14}} \frac{w_{19}}{w_{18}} \frac{w_{23}}{w_{21}} \frac{w_{25}}{w_{24}} \frac{w_{29}}{w_{28}} \frac{w_{31}}{w_{30}} \frac{w_{37}}{w_{36}}\,.$$

Da in dieser Darstellung von $T(m)$ jeder Faktor ≥ 1 ist, folgt mit **3** — g und f wie im Beweis von **7** —

$$\begin{aligned}
V(42m) &\leq V(m) \cdot \frac{g(42m)}{f(21m)f(14m)f(6m)f(m)} \leq V(m)\left(336\pi^3 m^3\right)^{-\frac{1}{2}} \left(2^{\frac{11}{21}} 3^{\frac{5}{14}} 7^{\frac{1}{6}}\right)^{42m} \\
&< V(m)\left(2^{\frac{11}{21}} 3^{\frac{5}{14}} 7^{\frac{1}{6}}\right)^{42m}.
\end{aligned}$$

Für $k \geq 448$ ist $\left(2^{\frac{11}{21}} 3^{\frac{5}{14}} 7^{\frac{1}{6}}\right)^{42(k+1)} < (3.03)^{41k}$. Für $1 \leq n \leq 42 \cdot 448 = 18816$ prüft man durch Rechnung nach, daß

$$V(n) < (3.03)^n \tag{10}$$

ist. Ist **10** für ein $k \geq 448$ und alle $n \leq 42k$ bewiesen, so folgt weiter

$$\begin{aligned} V(42k+1) &\leq V(42k+2) \leq \ldots \leq V(42(k+1)) \\ &< V(k+1)\left(2^{\frac{11}{21}}3^{\frac{5}{14}}7^{\frac{1}{6}}\right)^{42(k+1)} \\ &< (3.03)^{k+1}(3.03)^{41k} \\ &= (3.03)^{42k+1} \leq (3.03)^{42k+2} \leq \cdots . \end{aligned}$$

Vollständige Induktion liefert nun, daß **10** für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x \geq 1$ ist weiter

11 $$V(x) = V([x]) < (3.03)^{[x]} \leq (3.03)^{x}.$$

Andererseits ist für alle $m \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \frac{(30m)!m!}{(15m)!(10m)!(6m)!} &\leq \frac{g(30m)g(m)}{f(15m)f(10m)f(6m)} \\ &= (2^{14}3^{9}5^{5})^{m}(60\pi m)^{-\frac{1}{2}}e^{\frac{1}{12}\left(\frac{1}{30m}+\frac{1}{m}-\frac{1}{15m+1}-\frac{1}{10m+1}-\frac{1}{6m+1}\right)} \\ &< \left(2^{\frac{7}{15}}3^{\frac{3}{10}}5^{\frac{1}{6}}\right)^{30m} . \end{aligned}$$

Sind $S(m)$ und v_i wie im Beweis von **7**, so gilt

$$\begin{aligned} \frac{(30m)!m!}{(15m)!(10m)!(6m)!} &= V(30m)S(m) \\ &= \frac{V(30m)V(\frac{30m}{7})}{V(\frac{30m}{6})V(\frac{30m}{10})}\prod_{k=1}^{\infty}\frac{v_{-7}}{V_{-10}}\cdot\frac{v_{-1}}{v_{-6}}\cdot\frac{v_{1}}{v_{0}}\cdot\frac{v_{7}}{v_{6}}\cdot\frac{v_{11}}{v_{10}}\cdot\frac{v_{13}}{v_{12}}\cdot\frac{v_{17}}{v_{15}}\cdot\frac{v_{19}}{v_{18}} \\ &\geq \frac{V(30m)V(\frac{30m}{7})}{V(\frac{30m}{6})V(\frac{30m}{10})}. \end{aligned}$$

Für $m \geq 10$ folgt nun mit **11** und **8**

$$\begin{aligned} V(30m) &< \left(2^{\frac{7}{15}}3^{\frac{3}{10}}5^{\frac{1}{6}}\right)^{30m}\cdot\frac{V(\frac{30m}{6})V(\frac{30m}{10})}{V(\frac{30m}{7})} < \left(2^{\frac{7}{15}}3^{\frac{3}{10}}5^{\frac{1}{6}}(3.03)^{\frac{4}{15}}(2.51)^{-\frac{1}{7}}\right)^{30m} \\ &< (2.961)^{30m}. \end{aligned}$$

Für $m \geq 358$ und $30m \leq n < 30(m+1)$ ist

12 $$V(n) \leq V(30(m+1)) < (2.961)^{30(m+1)} < (2.97)^{30m} \leq (2.97)^{n}.$$

Für $1 \leq n \leq 19110 = 30 \cdot 637$ prüft man die Behauptung in **9** durch Rechnung nach. Insbesondere gilt **12** dann für alle $n \in \mathbb{N}$ und wegen

$$V(x) = V([x]) < (2.97)^{[x]} \leq (2.97)^{x}$$

schließlich auch für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x \geq 1$. Wie vorher folgt nun für $m \geq 10$

$$V(30m) < \left(2^{\frac{7}{15}} 3^{\frac{3}{10}} 5^{\frac{1}{6}} (2.97)^{\frac{4}{15}} (2.51)^{-\frac{1}{7}}\right)^{30m} < (2.945)^{30m}.$$

Für $m \geq 637$ und $30m \leq n < 30(m+1)$ ist

$$V(n) \leq V(30(m+1)) < (2.945)^{30(m+1)} < (2.95)^{30m} \leq (2.95)^n.$$

Wie oben folgt $V(x) < (2.95)^x$ für $x \in \mathbb{R},\ x \geq 1$. Für $0 < x \leq 1$ ist die Behauptung klar. Damit ist **9** bewiesen. □

Mit anderen Methoden haben Rosser und Schoenfeld ([4], Theorem 12) gezeigt, daß für alle $x \in \mathbb{R}^+$ sogar

$$V(x) < (2.826)^x \qquad \text{gilt.}$$

13 Korollar Zu jeder natürlichen Zahl $n \geq 25$ gibt es eine Primzahl p mit $n < p < 1.2n$.

Beweis. Für alle $x, y \in \mathbb{R}^+$ ist

14
$$V(xy) \leq V(x)V(y) \prod_{p \leq xy} p.$$

Ist nämlich p eine Primzahl und $p^k \leq x < p^{k+1}$, $p^\ell \leq y < p^{\ell+1}$, so ist $p^{k+\ell} \leq xy < p^{k+\ell+2}$, woraus **14** leicht folgt. Für $0 < x < y$ setzen wir $P(x; y) := \prod_{x<p\leq y} p$. Für $x \geq 41$ erhält man mit **8** und **9**

$$(2.51)^x < V(x) \leq V(\sqrt{x})V(\sqrt{x})P(1;x) < (2.95)^{2\sqrt{x}}P(1;x).$$

Für $x \geq 27081$ ist

$$(2.97)^{\frac{x}{12}}(2.95)^{2\sqrt{x}} < (2.51)^x,$$

zusammen also

$$(2.97)^{\frac{x}{12}} < P(1;x).$$

Ist $n \in \mathbb{N}$ mit $27081 \leq 1.2n$, so folgt wegen $P(1;x) \leq V(x)$ mit **9**

$$P(n; 1.2n) = \frac{P(1; 1.2n)}{P(1;n)} > \frac{(2.97)^n}{(2.95)^n} > 1.$$

Für $1 \leq n < \frac{27081}{1.2}$ ist die Behauptung in **13** leicht mit einer Primzahltabelle zu überprüfen. Beachtet man noch, daß $1.2n$ niemals eine Primzahl ist, so ist **13** bewiesen. □

Der naheliegende Versuch, die oben vorgeführte Methode auf $\frac{(6n)!}{(3n)!(2n)!n!}$ anzuwenden, führt auf die folgenden beiden Probleme:

$$\text{Ist} \quad (n!)^{-1} \prod_{k=1}^{\infty} V\left(\frac{6n}{6k-1}\right) \leq \binom{2n}{n}^{\frac{1}{3}} \quad \text{für } n \geq 1?$$

$$\text{Ist} \quad (n!)^{-2} \prod_{k=1}^{\infty} V\left(\frac{6n}{6k-1}\right) V\left(\frac{6n}{6k+1}\right) \geq 1 \quad \text{für } n \geq 1000?$$

Positive Antworten auf diese Fragen würden zu besseren Abschätzungen als den in **7** und **9** angegebenen führen.

Literatur

[1] T.M. Apostol, Introduction to analytic number theory, New York, Heidelberg, Berlin 1976.

[2] U. Felgner, Estimates for the sequence of primes, El. Math. 46 (1991), 17–25.

[3] S.W. Golomb, An identity for $\binom{2n}{n}$, Amer. Math. Monthly 99 (1992), 746–748.

[4] J.B. Rosser und L. Schoenfeld, Approximate formulas for some functions of prime numbers, Illinois J. Math. 6 (1962), 64–94.

[5] W. Sierpinski, Elementary theory of numbers, Amsterdam, New York, Oxford 1988.

[6] E. Trost, Primzahlen, Basel 1968.

[7] I.M. Winogradow, Elemente der Zahlentheorie, München 1956.

Robert Bil
Ellerbeker Weg 7
D-24147 Kiel

Dieter Blessenohl
Mathematisches Seminar der
Christian-Albrechts-Universität
Ludewig-Meyn-Straße 4
D-24098 Kiel