Aufgaben

El. Math. 51 (1996)

0013-6018/96/020125-06$1.50 + 0.20/0

Aufgaben

Neue Aufgaben

Lösungen sind erbeten bis zum 10. Februar 1997 an:

- Peter Gallin, Tüfenbach 176, CH-8494 Bauma

  oder

- Hans Walser, Gerlikonerstrasse 29, CH-8500 Frauenfeld

Aufgabe 1111: Es sei n eine natürliche Zahl und $[a]$ der ganzzahlige Teil einer reellen Zahl a. Für die unendliche Reihe

$$s_n := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{[k/n]}}{k+1}$$

gilt dann beginnend mit $n = 1$:

$$\begin{aligned} s_1 &= \ln 2\,, \\ s_2 &= \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\ln 2\,, \\ s_3 &= \frac{2\pi}{3\sqrt{3}} + \frac{1}{3}\ln 2\,, \\ s_4 &= \frac{\pi}{8}(1 + 2\sqrt{2}) + \frac{1}{4}\ln 2\,. \end{aligned}$$

Wie lautet s_n allgemein? Man versuche, für s_n einen geschlossenen Ausdruck anzugeben.

Friedhelm Götze, Jena, D

Aufgabe 1112: Man beweise, dass

$$\begin{aligned} &(a) \quad 1^1 \cdot 2^2 \cdot \ldots \cdot n^n \ge \mathrm{e}^{\frac{n(n-1)}{2}}\,, \\ &(b) \quad 2^2 \cdot 4^4 \cdot \ldots \cdot (2n)^{2n} \ge \mathrm{e}^{n^2}\,, \\ &(c) \quad 1^1 \cdot 3^3 \cdot \ldots \cdot (2n-1)^{2n-1} \ge \mathrm{e}^{n(n-1)}\,. \end{aligned}$$

Zdravko F. Starc, Vršac, YU

Aufgabe 1113 (Die einfache dritte Aufgabe):
My pocket calculator says $\pi^2 = 9.8696044$. Prove, from first principles, that $\pi^2 < 10$.

O.E. Lanford III, Zürich, CH (oral communication)

Lösungen zu den Aufgaben in Heft 3, 1995

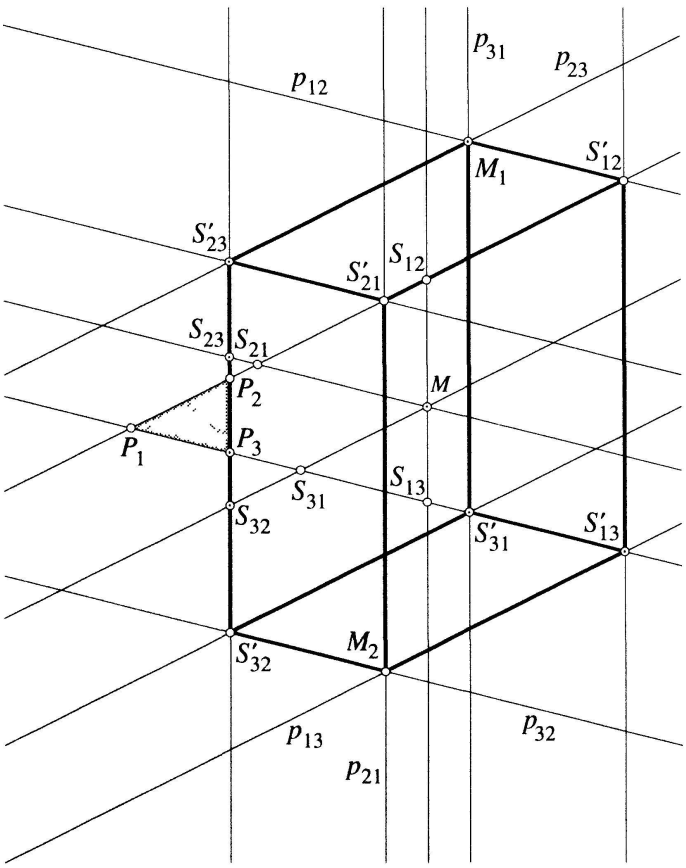
Aufgabe 1099. Es seien P_1, P_2, P_3 drei nichtkollineare Punkte und M ein Punkt in ihrer Ebene. Für $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$ seien die sechs Punkte S_{ij} als Schnittpunkte von P_iP_j mit der Parallelen zu P_jP_k durch M festgelegt. Die sechs Punkte S'_{ij} sind sodann durch

$$\overrightarrow{P_jS'_{ij}} = 2 \cdot \overrightarrow{P_jS_{ij}}$$

und die sechs Geraden p_{ij} durch $S'_{ij} \in p_{ij} \parallel P_iP_k$ bestimmt. Man beweise: Es existieren eindeutig bestimmte Punkte M_1, M_2 mit $M_1 \in p_{12}, p_{23}, p_{31}$ und $M_2 \in p_{21}, p_{13}, p_{32}$. Ausserdem ist M der Mittelpunkt von M_1M_2.

Herbert Gülicher, Münster, D

Auswertung der eingesandten Lösungen. Es sind 5 Lösungen eingetroffen, und zwar von G. Bercea (München, D), Klaus-Dieter Drews (Rostock, D), Walther Janous (Innsbruck, A), Detlef Kaese (Düsseldorf, D) und Dieter Koller (Zürich, CH). Alle Einsender verwenden Vektoren oder sogar baryzentrische Koordinaten, um die geforderten Eigenschaften rechnerisch nachzuweisen. Bevor wir die kürzeste Lösung vorstellen – sie stammt von *Klaus-Dieter Drews* und deckt sich fast vollständig mit der Lösung von *Walther Janous* –, wollen wir die in der Aufgabenstellung beschriebene Situation mit einer Figur veranschaulichen. Dabei zeigt es sich, dass die Aufgabe dank einer räumlichen Interpretation auch ohne jede Rechnung synthetisch gelöst werden kann.



Synthetische Lösung. Sind einmal die Parallelen zu den drei Seiten des Dreiecks $P_1P_2P_3$ durch M gezeichnet, so entstehen durch die Verdopplungsbedingung weitere Parallelen $S'_{ij}S'_{ik}$, welche punktsymmetrisch zu den Geraden P_jP_k bezüglich M liegen. Daher liegen die Punkte S'_{ji} und S'_{ki} auch punktsymmetrisch bezüglich M. Von den sechs Geraden p_{ij} liegen daher ebenfalls je zwei – nämlich p_{ji} und p_{ki} – punktsymmetrisch bezüglich M und ergänzen die sechs Punkte S'_{ij} durch die Punkte M_1 und M_2 zu einer Parallelprojektion eines Parallelflachs mit Mittelpunkt M.

Analytische Lösung. Mit P_1 als Ursprung ist durch die linear unabhängigen Vektoren $\overrightarrow{P_1P_2}$,$\overrightarrow{P_1P_3}$ ein (x, y)-Parallelkoordinatensystem bestimmt. Für Punkte (x, y) auf Parallelen zu P_1P_2, P_2P_3 bzw. P_3P_1 gilt y = konst., $x + y$ = konst. bzw. x = konst., insbesondere $y = 0$, $x + y = 1$, bzw. $x = 0$ auf den Geraden P_1P_2, P_2P_3 bzw. P_3P_1 selbst. Wir identifizieren Punkte mit ihren Ortsvektoren bezüglich P_1 und erhalten mit dem gegebenen Punkt $M = (\mu, \nu)$:

$$
\begin{array}{ll}
S_{12} = (\mu + \nu, 0) & S'_{12} = 2[(\mu + \nu, 0) - (1, 0)] + (1, 0) = (2\mu + 2\nu - 1, 0) \ , \\
& p_{12} : \ x = 2\mu + 2\nu - 1 \ ; \\
S_{23} = (\mu, 1 - \mu) & S'_{23} = 2[(\mu, 1 - \mu) - (0, 1)] + (0, 1) = (2\mu, 1 - 2\mu) \ , \\
& p_{23} : \ y = 1 - 2\mu \ ; \\
S_{31} = (0, \nu) & S'_{31} = 2(0, \nu) = (0, 2\nu) \ , \\
& p_{31} : \ x + y = 2\nu \ .
\end{array}
$$

Der eindeutig bestimmte Schnittpunkt von p_{12}, p_{23} und p_{31} ist

$$M_1 = (2\mu + 2\nu - 1, 1 - 2\mu) \ .$$

Zur Bestimmung von M_2 vertauschen x und y ihre Rollen, somit im gegebenen Punkt M auch μ und ν. Demnach muss bezüglich des ursprünglichen (x, y)-Systems

$$M_2 = (1 - 2\nu, 2\nu + 2\mu - 1)$$

sein, und es folgt

$$\frac{M_1 + M_2}{2} = M \ .$$

Aufgabe 1100. Inverse von rekursiv aufgebauten Dreiecksmatrizen.

Die beiden Pascalmatrizen

$$
\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 3 & 3 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 4 & 6 & 4 & 1
\end{pmatrix}
\quad \text{und} \quad
\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & +1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & +1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & +1 & -2 & +1 & 0 & 0 \\
0 & -1 & +3 & -3 & +1 & 0 \\
0 & +1 & -4 & +6 & -4 & +1
\end{pmatrix}
$$

sind zueinander invers. Dasselbe gilt auch für die beiden Stirlingmatrizen erster und zweiter Art

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & 6 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 15 & 25 & 10 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & +2 & -3 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & +11 & -6 & +1 & 0 \\ 0 & +24 & -50 & +35 & -10 & +1 \end{pmatrix} .$$

Man beweise die folgende Verallgemeinerung:

Es sei n eine natürliche Zahl und $f(j)$ eine reelle Folge mit $0 \leq j \leq n$. Ist die untere Dreiecksmatrix A durch die Rekursion

$$A_{i+1,j} := A_{i,j-1} + f(j) \cdot A_{i,j} \quad \text{für} \quad 1 \leq j \leq i \leq n$$

mit den Randbedingungen $A_{i,0} := 0$ für $1 \leq i \leq n$ und $A_{i,i} := 1$ für $0 \leq i \leq n$ gegeben, so ist deren Inverse U durch die Rekursion

$$U_{i+1,j} := U_{i,j-1} - f(i) \cdot U_{i,j} \quad \text{für} \quad 1 \leq j \leq i \leq n$$

mit den Randbedingungen $U_{i,0} := 0$ für $1 \leq i \leq n$ und $U_{i,i} := 1$ für $0 \leq i \leq n$ bestimmt.

Hinweis: Für $f(j) = 1$ ergeben sich die Pascal- und für $f(j) = j$ die Stirlingmatrizen.

Robert Brawer, Solothurn, CH

Auswertung der eingesandten Lösungen. Es sind 10 Lösungen eingetroffen: Jany C. Binz (Bolligen, CH), Klaus-Dieter Drews (Rostock, D), Harald Fripertinger (Graz, A), Friedhelm Götze (Jena, D), F. Grupp (Schweinfurt, D), Walther Janous (Innsbruck, A), Detlef Kaese (Düsseldorf, D), H.-J. Seiffert (Berlin, D), Michael Vowe (Therwil, CH), Roland Wyss (Flumenthal, CH). Im folgenden die Lösung nach *Jany C. Binz*:

Da $U = A^{-1}$ wie A eine untere Dreiecksmatrix ist, gilt $U_{i,j} = 0$ für $i < j$. $AU = UA = I$ schreiben wir mit Hilfe des Kroneckersymbols ausführlich als

$$\sum_{k \geq 0} A_{i,k} U_{k,j} = \sum_{k \geq 0} U_{i,k} A_{k,j} = \delta_{i,j} .$$

Für $i = j$ folgt daraus $U_{i,i} = 1$ $(i \geq 0)$. Für $i \geq 1$, $j = 0$ wird $\sum_{k \geq 0} U_{i,k} A_{k,0} = 0$ und daher $U_{i,0} = 0$ $(i \geq 1)$. Damit sind die Randwerte gesichert. Für $j = i$ wird $\delta_{i+1,i} = A_{i+1,i} + U_{i+1,i} = 0$, also $U_{i+1,i} = -A_{i+1,i}$ für alle i. Daraus folgt

$$U_{i+1,i} = -\left[A_{i,i-1} + f(i) A_{i,i}\right] = U_{i,i-1} - f(i) U_{i,i} ;$$

die behauptete Rekursion gilt somit für $j = i$. Für festes j sei jetzt die Gültigkeit der Rekursion $U_{i+1,j} := U_{i,j-1} - f(i) \cdot U_{i,j}$ für alle i mit $j \leq i \leq r$ induktiv vorausgesetzt. Aus $\delta_{r+2,j} = \sum_{k=j}^{r+2} A_{r+2,k} U_{k,j} = 0$ erhält man

$$\begin{aligned}
-U_{r+2,j} &= \sum_{k=j}^{r+1} A_{r+2,k} U_{k,j} \\
&= \sum_{k=j}^{r+1} \left[A_{r+1,k-1} + f(k) A_{r+1,k}\right] U_{k,j} \\
&= A_{r+1,j-1} + \sum_{k=j}^{r} A_{r+1,k} \left[U_{k+1,j} + f(k) U_{k,j}\right] + f(r+1) U_{r+1,j} \, .
\end{aligned}$$

Unter Verwendung der induktiven Prämisse wird daraus

$$\begin{aligned}
-U_{r+2,j} &= A_{r+1,j-1} + \sum_{k=j}^{r} A_{r+1,k} U_{k,j-1} + f(r+1) U_{r+1,j} \\
&= \sum_{k=j-1}^{r+1} A_{r+1,k} U_{k,j-1} - U_{r+1,j-1} + f(r+1) U_{r+1,j} \\
&= \delta_{r+1,j-1} - U_{r+1,j-1} + f(r+1) U_{r+1,j}
\end{aligned}$$

und schliesslich

$$U_{r+2,j} = U_{r+1,j-1} - f(r+1) U_{r+1,j} \, .$$

Die Rekursion ist also auch für $i = r + 1$ und damit für alle $i \geq j$ gesichert; weil sie für alle $j \geq 1$ verankert ist, gilt sie für alle i, j mit $1 \leq j \leq i$. Der hier für unendliche Matrizen A und U geführte Beweis zieht automatisch die Gültigkeit für alle natürlichen n nach sich.

Aufgabe 1101 (Die einfache dritte Aufgabe). Ein homogener Quader mit den Kantenlängen a, b und c liegt mit dem Rechteck aus den Seiten a und c auf einer horizontalen Ebene. Von der einen aufliegenden Kante c aus wird ein Quader mit den Kantenlängen λa, λb und c herausgeschnitten. Wie gross darf λ $(0 < \lambda < 1)$ höchstens sein, damit der Restkörper nicht umkippt?

Rolf Rose, Magglingen, CH

Auswertung der eingesandten Lösungen. Es sind 13 Zuschriften eingetroffen: G. Bercea (München, D), Klaus-Dieter Drews (Rostock, D), Harald Fripertinger (Graz, A), Friedhelm Götze (Jena, D) (2 Lösungen), Bratislav Iričanin (Belgrad, YU), Walther Janous (Innsbruck, A), Detlef Kaese (Düsseldorf, D), Joachim Klose (Bonn, D), Dieter Koller (Zürich, CH), Wolfgang Moldenhauer (Erfurt, D), Gunther Stein (Darmstadt, D), Michael Vowe und Ronald Wiedemann (Therwil bzw. Birsfelden, CH), Peter Zimmermann (Glarus, CH). Die Aufgabe ist fast gleichzeitig in der *Praxis der Mathematik 37, Heft 3/1995* erschienen, da der Autor seine Aufgabe bei beiden Zeitschriften eingereicht hat.

Sämtliche Lösungen untersuchen die Lage des Schwerpunktes; dabei genügt es, das zweidimensionale Problem in der "Deckfläche" zu lösen. Im folgenden die Lösung nach *Klaus-Dieter Drews*: Die vom vorderen unteren Eckpunkt des Quaders ausgehenden Kanten mit den Längen a, c und b mögen ein kartesisches x, y, z-Koordinatensystem bestimmen. Im homogenen Restkörper gewinnt man Aussagen über die x-Koordinaten von Schwerpunkten aus der Betrachtung von Flächen in der x, z-Ebene. Dabei besteht für festes λ die Restfläche aus einem unteren sowie einem oberen Rechteck der Masse (des Inhalts) m_u beziehungsweise m_o, mit den Schwerpunkten bei den x-Werten s_u beziehungsweise s_o; Schwerpunktkoordinate der Gesamtfläche sei s.

Mit diesen Bezeichnungen gilt: $m_u = (1-\lambda)a \cdot \lambda b$, $m_o = a \cdot (1-\lambda)b$, und

$$s_u = \frac{\lambda a + a}{2}\,, \quad s_o = \frac{a}{2}\,,$$

$$\frac{s - s_o}{s_u - s} = \frac{m_u}{m_o}\,,$$

das heisst $(m_u + m_o)s = m_u s_u + m_o s_o$ oder $(\lambda + 1)s = \lambda s_u + s_o$.

Der Restkörper steht für $\lambda a \le s$, bei maximalem λ ist $s = \lambda a$, so dass aus der vorhergehenden Gleichung

$$(\lambda + 1)\lambda = \frac{(\lambda + 1)}{2}\lambda + \frac{1}{2}$$

folgt, woraus sich $\lambda = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ als Maximalwert ergibt. Der herausgeschnittene Quader kann also bis zu den grösseren goldenen Abschnitten der Kanten a und b reichen.