

# Metrische Geometrie

Autor(en): **Colbois, Bruno**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **51 (1996)**

PDF erstellt am: **08.08.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-46965>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

---

---

## Metrische Geometrie

---

---

Bruno Colbois

Bruno Colbois wurde in Troyes (Frankreich) geboren, kam aber bald nach Lausanne, wo er Schule und Universität besuchte. Er doktorierte 1987 bei Peter Buser. Nach einem Aufenthalt an der Universität Bonn wurde er 1992 Assistenzprofessor an der ETHZ. Seit 1994 ist er Professor an der Université de Savoie in Chambéry. Sein Forschungsgebiet ist die Riemannsche Geometrie, insbesondere die Spektraltheorie des Laplace-Operators auf Mannigfaltigkeiten. In seiner Freizeit liebt er es, Wanderungen zu unternehmen und die Natur zu beobachten.

### Einleitung

Eines der Ziele der Raumgeometrie ist es, Flächen im dreidimensionalen Raum zu beschreiben. So ausgesprochen bedarf dieses Ziel natürlich der Präzisierung, denn es ist von vorneherein nicht klar, was als eine "Fläche" im dreidimensionalen Raum zu betrachten und was genau mit dem Wort "beschreiben" gemeint ist.

Wenden wir uns zuerst dem Wort "beschreiben" zu. Dies meint zuerst einmal eine mathematische Beschreibung der Fläche. Aber natürlich auch wesentlich mehr: die uns intuitiv geläufigen Eigenschaften der Fläche sollen aus der Beschreibung abgeleitet werden können. So soll zum Beispiel daraus ersichtlich sein, dass eine Sphäre überall gleich

**Fortschritte in der Mathematik haben ihren Ursprung in vielen Fällen in einer neuen Sicht auf alte Fragestellungen. Ein neuer Ansatz, eine neue Idee führen zu neuen Techniken, die dann oft nicht nur Licht auf das alte Problem werfen, sondern auch über den angestammten Bereich hinaus fruchtbar werden. Ein illustratives Beispiel für diese Tatsache, das aus einer Entwicklung jüngsten Datums stammt, behandelt Bruno Colbois im vorliegenden Beitrag. Es geht darum, den intuitiven geometrischen Begriff der kürzesten Verbindung mathematisch mit einem andern Ansatz anzugehen, als dies historisch, vor fast 200 Jahren, in der Differentialgeometrie geschehen ist. Die hier dargestellten Ideen haben bereits in vielen Gebieten der Mathematik Anwendungen gefunden; sie haben zu vielerlei neuen Resultaten geführt und neue, unerwartete Verbindungen zwischen verschiedenen mathematischen Gebieten offengelegt. – Beim Beitrag handelt es sich um eine Ausarbeitung eines Vortrages, den Bruno Colbois im Wintersemester 94/95 im Rahmen des Seminars über Mathematik, Informatik und Unterricht an der ETH Zürich gehalten hat. *ust***

gekrümmt ist, während die Krümmung eines Ellipsoides von Ort zu Ort variiert (siehe Figur 1), und ähnliches. Zu diesem Zweck müssen selbstverständlich alle diese intuitiv geläufigen Eigenschaften mathematisch formalisiert werden.

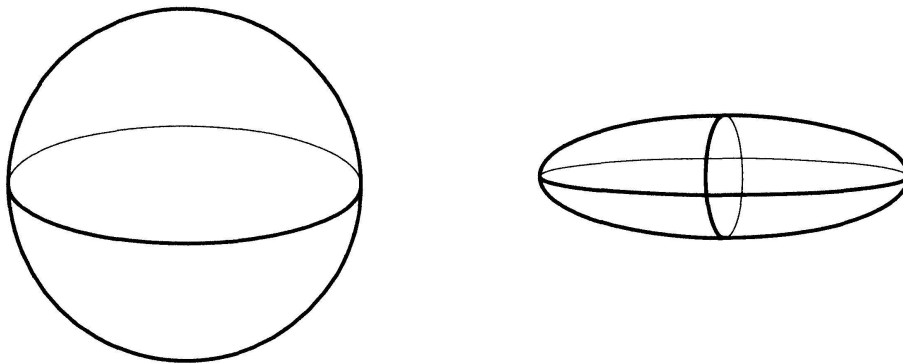


Fig. 1 Sphäre und Ellipsoid

Diesen Vorgang wollen wir im vorliegenden Text am Beispiel des Begriffs der *Geodäte* näher betrachten. Intuitiv versteht man unter einer Geodäte eine Kurve auf der Fläche, welche die *kürzeste Verbindung zwischen zwei gegebenen Punkten der Fläche* herstellt. Jedermann, der schon die “Strecke” Zürich–New York geflogen ist, weiss, dass der Flug über Island führt: Die kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten auf der Erdoberfläche verläuft auf einem Grosskreis. Die Grosskreisstücke sind in diesem Sinn die Geodäten der Kugeloberfläche.

Die Geometrie hat nach dem, was wir oben gesagt haben, als erstes die Aufgabe, den Begriff der Geodäte zu formalisieren, also aus der intuitiven eine mathematische Definition zu machen. Es ist anschliessend nachzuweisen, dass die Definition vernünftig ist, insbesondere soll zum Beispiel die Existenz von Geodäten in den interessierenden Fällen mathematisch bewiesen werden können. Und schliesslich soll die Definition weitere Resultate möglich machen; so sollen daraus allgemeine Sätze über Geodäten hergeleitet werden können, zum Beispiel über die Existenz von geschlossenen Geodäten oder über die Existenz einer auf der Fläche dichten Geodäte, oder andere.

Beim Bemühen, den Begriff der Geodäte aus der intuitiven Vorstellung der kürzesten Verbindung zu entwickeln, zeigen sich sehr rasch Schwierigkeiten. Eine erste besteht darin, dass die Definition der Länge einer Kurve auf der Fläche bereits vorausgesetzt wird. Eine zweite wird durch die folgende Tatsache illustriert (siehe Figur 2): Das Grosskreisstück  $P_1P_2P_3$  auf der Sphäre liefert zwar zu je zwei seiner Punkte, die genügend nahe beieinander liegen, die kürzeste Verbindung, es ist aber selbst nicht die kürzeste Verbindung zwischen  $P_1$  und  $P_3$ . Es gehen somit in diese Art der Definition Eigenschaften des globalen Aussehens der Fläche ein, die im allgemeinen nur schwer zu durchschauen sind.

Die Geometrie hat hier die Wahl: Sie kann versuchen, den durch die Intuition nahegelegten Begriff der Geodäte als kürzeste Verbindung genauer zu fassen, bis eine mathematisch befriedigende Formalisierung erreicht ist, oder sie kann versuchen, einen völlig anderen Standpunkt einzunehmen und andere, vielleicht schwächere Eigenschaften der kürzesten

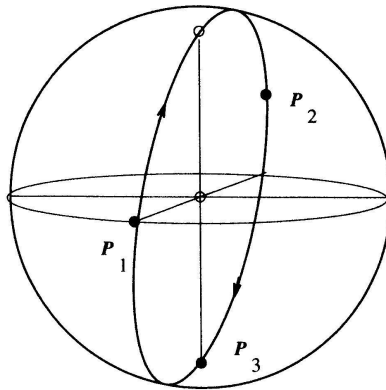


Fig. 2 Das Grosskreisstück  $P_1P_2P_3$  liefert lokal die kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten, etwa zwischen  $P_1$  und  $P_2$  und zwischen  $P_2$  und  $P_3$ , aber es bildet nicht die kürzeste Verbindung zwischen  $P_1$  und  $P_3$ .

Verbindungen zur Definition heranzuziehen. Der zweite Weg wurde historisch von der Differentialgeometrie beschritten, der erste Weg entspricht der metrischen Geometrie. Hier wollen wir uns zuerst kurz das Vorgehen in der Differentialgeometrie in Erinnerung rufen und uns dann anschliessend mit den Ideen der metrischen Geometrie beschäftigen.

### Der Weg der Differentialgeometrie

In der Ebene  $\mathbb{R}^2$  ist die kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten die Gerade. Unter den parametrisierten Kurven  $c(t)$  kann die Gerade durch  $c''(t) \equiv 0$  charakterisiert werden. In der Ebene können wir auf diese Weise das rein geometrische Konzept der kürzesten Verbindung zwischen zwei Punkten analytisch fassen.

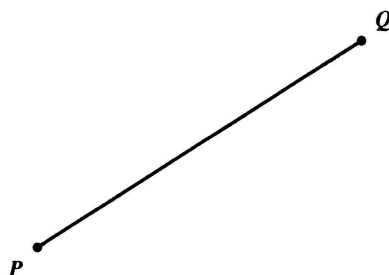


Fig. 3 In der Ebene ist die kürzeste Verbindung durch die Gerade gegeben.

In der Differentialgeometrie zieht man dies zur Definition einer Geodäte auf einer Fläche heran: Man definiert eine Geodäte im differentialgeometrischen Sinn als eine (parametrisierte) Kurve  $c(t)$  so, dass die "zweite Ableitung" verschwindet, wobei wir jetzt natürlich die "zweite Ableitung" zu interpretieren haben. Am einfachsten dürfte dies mechanisch zu veranschaulichen sein: Die Geodäte entspricht der Bahn eines Massenpunktes auf der Fläche, auf den keine tangential zur Fläche wirkenden Kräfte ausgeübt werden (sondern höchstens solche, die senkrecht zur Fläche wirken). Diese Idee hat kaum mehr etwas mit der ursprünglichen geometrischen Idee gemeinsam, ausser natürlich der Tatsache, dass sie im Spezialfall der Ebene die kürzeste Verbindung liefert. Trotzdem führt sie in der Differentialgeometrie zu einem grundlegenden Begriff, welcher den Weg zu interessanten und wichtigen Resultaten öffnet.



Die so getroffene Definition benötigt den Begriff der Ableitung auf der Fläche. Dies impliziert natürlich, dass als Flächen für diese Theorie nur solche zugelassen werden können, auf denen Differentialrechnung getrieben werden kann. Dies sind die zweidimensionalen differenzierbaren Untermannigfaltigkeiten des dreidimensionalen Raumes. Grob gesprochen sind das diejenigen Flächen, die eine Überdeckung durch Umgebungen  $U_\alpha$  zulassen, wobei jedes  $U_\alpha$  injektives Bild einer offenen Menge in  $\mathbb{R}^2$  unter einer  $C^\infty$ -Abbildung  $h_\alpha$  ist (siehe Figur 4; vergleiche auch [DC], Definition 1, p. 43).

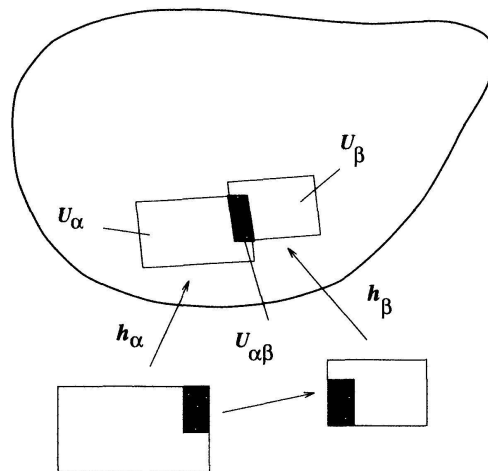


Fig. 4 Zur Definition einer 2-dimensionalen Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^3$

Beispiele von Flächen dieser Art sind Ebene, Sphäre, Zylinder, usw. Natürlich gibt es neben diesen viele andere Gebilde, die in der Umgangssprache ebenfalls als Flächen angesprochen, hier aber ausgeschlossen werden. In der Figur 5 sind einige derartige Beispiele skizziert.

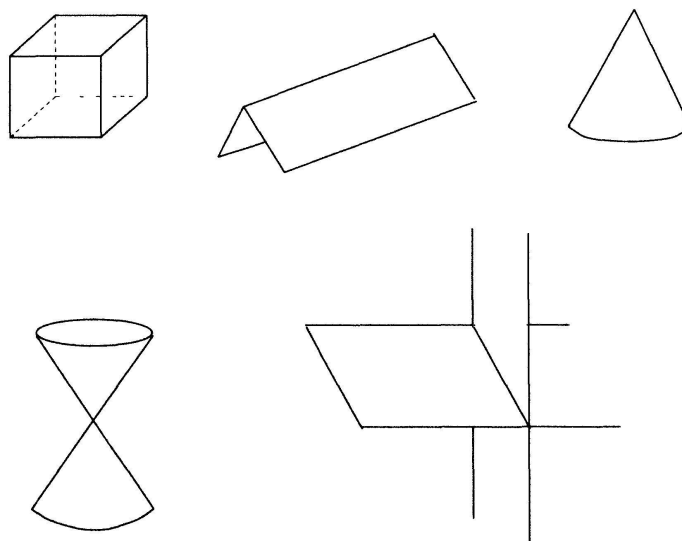


Fig. 5 Einige "Flächen", die keine 2-dimensionalen Mannigfaltigkeiten sind: die "Flächen" in der oberen Reihe sind nicht glatt genug, die "Flächen" in der unteren Reihe lassen keine Überdeckung durch Umgebungen zu, die offenen Mengen des  $\mathbb{R}^2$  entsprechen.

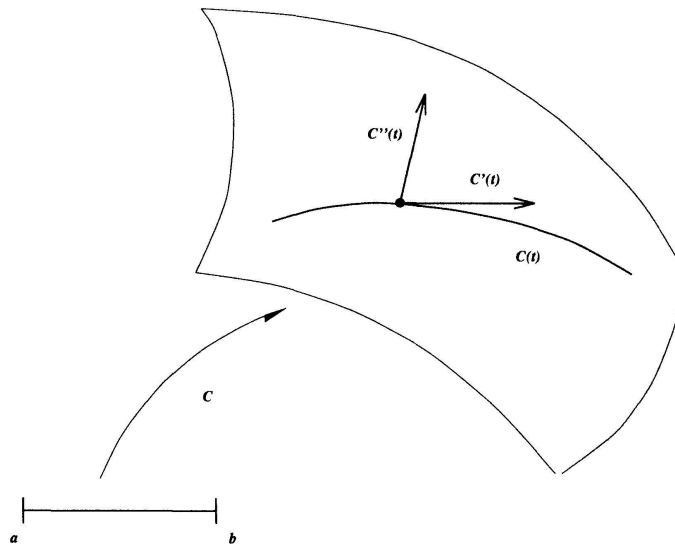


Fig. 6 Zur Definition einer Geodäten auf einer 2-dimensionalen Mannigfaltigkeit

Differentialgeometrisch wird eine Geodäte auf der Fläche  $S$  als eine Kurve  $c(t)$  definiert, deren zweite Ableitung  $c''(t)$  senkrecht zur Fläche ist (siehe Figur 6; vergleiche auch [DC], Definition 8, p. 187).

Ist die Fläche lokal durch eine Parametrisierung gegeben, so führt diese Geodätenbedingung auf eine gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung (siehe [DC], Proposition 5, p. 195). Die bekannten Existenz- und Eindeigkeitssätze für derartige Differentialgleichungen liefern dann sofort den ersten Teil des folgenden Satzes; der zweite Teil liegt etwas tiefer, für einen Beweis vergleiche man [DC], Proposition 4, p. 227.

**Satz** (i) *Durch die Vorgabe der Werte von  $c(t_0)$  und  $c'(t_0)$  wird eindeutig eine Geodäte bestimmt.*

(ii) *Lokal ist eine Geodäte die kürzeste Verbindung zwischen je zwei ihrer Punkte.*

Man beachte, dass in diesem Satz nichts über die Existenz einer Geodäte zwischen zwei gegebenen Punkten ausgesagt wird. In der Tat lassen sich leicht Beispiele angeben, wo zwischen zwei gegebenen Punkten keine Geodäte in unserem Sinn existiert. Ein entsprechendes Beispiel ist in Figur 7 skizziert.

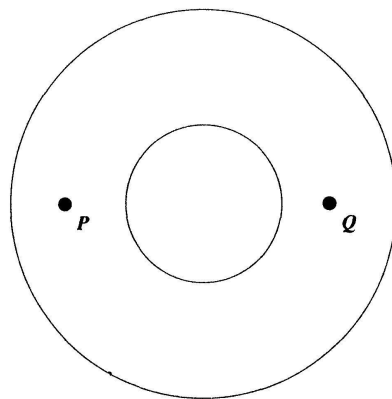


Fig. 7 Im Ring ohne Rand gibt es zwischen  $P$  und  $Q$  keine kürzeste Verbindung.

Unser Satz zeigt, dass die analytische Definition einer Geodäten auf einer differenzierbaren 2-dimensionalen Mannigfaltigkeit  $S$  unserer intuitiven Erwartung entgegenkommt, auch wenn diese Definition anfänglich sehr weit hergeholt schien: Geodäten sind, wenn nicht global, so doch wenigstens lokal wirklich kürzeste Verbindungen, und durch jeden Punkt von  $S$  gibt es in jeder Richtung genau eine Geodäte. Die befriedigende differentialgeometrische Theorie der Geodäten wurde allerdings durch die Beschränkung auf differenzierbare 2-dimensionale Mannigfaltigkeiten erkaufte. Dies führte dazu, dass viele in der Anschauung durchaus als Flächen bezeichnete Gebilde von der Betrachtung ausgeschlossen werden mussten.

### Der Weg der metrischen Geometrie

Wir kehren jetzt zu diesen komplizierteren, vorher nicht näher betrachteten Flächen zurück. Wir versuchen, auch in diesen allgemeineren Situationen vom intuitiven Begriff der kürzesten Verbindung ausgehend zu einem mathematisch einwandfreien und nützlichen Begriff der Geodäte zu gelangen. Es ist dabei von vorneherein klar, dass wir in unserem Raum Längen messen müssen. Wir legen deshalb unseren Überlegungen einen metrischen Raum  $X$  mit Abstandsfunktion  $d$  zugrunde.

Es sei  $c : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow (X, d)$  eine stetige Kurve in  $X$ . Wir können die Länge dieser Kurve nicht wie üblich durch das Integral  $L(c) = \int_a^b |c'(t)| dt$  geben, da ohne differenzierbare Struktur im Raum  $X$  die Ableitung  $c'(t)$  nicht definiert werden kann. Wir setzen deshalb allgemeiner fest:

**Definition:** Die Länge  $L(c)$  der Kurve  $c : [a, b] \rightarrow (X, d)$  ist definiert durch

$$L(c) = \sup \left( \sum_{k=1}^n d(c(t_k), c(t_{k-1})) \right),$$

wobei das Supremum über alle Zerlegungen

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = b$$

des Intervalles  $[a, b]$  zu nehmen ist.

Falls in  $X$  eine differenzierbare Struktur vorhanden ist und die Kurve  $c$  glatt ist, so liefert diese neue Definition der Bogenlänge denselben Wert wie die übliche, oben erwähnte Definition.

Mit Hilfe dieses neuen allgemeineren Begriffes der Länge einer Kurve kann man eine Pseudo-Abstandsfunktion  $d_L$  definieren: Für je zwei Punkte  $P, Q \in X$  setzt man

$$d_L(P, Q) = \inf(d_L(c)),$$

wobei das Infimum über alle stetigen Kurven  $c : [a, b] \rightarrow (X, d)$  mit  $c(a) = P$  und  $c(b) = Q$  zu nehmen ist.

Mit dieser Festsetzung kann es vorkommen, dass der Wert  $d_L(P, Q)$  unendlich wird, oder dass er null ist, auch wenn  $P$  und  $Q$  verschieden sind. Es ist also  $d_L$  nicht notwendigerweise eine Abstandsfunktion. Deshalb sind die Fälle, wo  $d_L$  tatsächlich eine

Abstandsfunktion ist, natürlich besonders interessant. Falls die so erhaltene Abstandsmessung sogar mit der ursprünglichen Metrik übereinstimmt, falls also  $d_L = d$  gilt, so nennen wir  $(X, d)$  einen *Längenraum*. Beizufügen ist hier, dass  $(X, d_L)$  ein Längenraum ist, wenn immer  $d_L$  eine Abstandsfunktion ist; es gilt nämlich  $(d_L)_L = d_L$ .

Die Sphäre  $S^2$ , aufgefasst als metrischer Raum, in dem der Abstand zwischen zwei Punkten durch die Länge der verbindenden Sehne gegeben ist, ist kein Längenraum. Definiert man hingegen den Abstand zweier Punkte auf  $S^2$  durch den von ihnen gebildeten Zentriwinkel, so erhält man einen Längenraum. Es gilt (siehe Figur 8)  $d_L(P_1, P_2) = \pi$  und  $d_L(P_1, P_3) = \pi/2$ , wo  $P_1$  den Nordpol,  $P_2$  den Südpol und  $P_3$  einen Punkt auf dem Äquator bezeichnet.

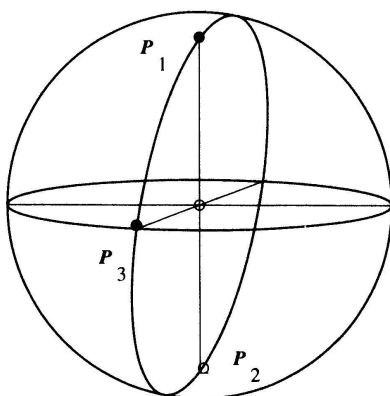


Fig. 8 Die Sphäre mit der durch den Zentriwinkel gegebenen Metrik ist ein Längenraum.

Alle Flächen, die in der Differentialgeometrie studiert werden, also die zweidimensionalen Untermannigfaltigkeiten des  $\mathbb{R}^3$ , sind auch Längenräume im hier definierten Sinn. Aber der Begriff des Längenraumes ist umfassender; so sind alle in Figur 5 skizzierten Beispiele ebenfalls Längenräume.

Bevor wir uns nun den Geodäten zuwenden, bemerken wir noch, dass Kurven in Längenräumen eine ausgezeichnete Parametrisierung besitzen: sie entspricht der Parametrisierung durch die Bogenlänge in differenzierbaren Mannigfaltigkeiten. Ist  $\tilde{c} : [a, b] \rightarrow (X, d)$  eine stetige Kurve im Längenraum  $(X, d)$ , so lässt sich diese durch eine Parametrisierung  $c : [0, L] \rightarrow (X, d)$  beschreiben, so dass für alle  $t \in [0, L]$  gilt  $L(c|_{[0,t]}) = t$ .

Indem wir uns eng an die intuitive Definition einer Geodäten als einer kürzesten Verbindung halten, definieren wir jetzt:

**Definition:** Es sei  $(X, d)$  ein Längenraum. Eine Kurve  $c : [0, L] \rightarrow (X, d)$  heisst eine *minimale Geodäte* im metrischen Sinn, wenn für alle  $t_1, t_2 \in [0, L]$  gilt  $d(c(t_1), c(t_2)) = d_L(c(t_1), c(t_2)) = |t_2 - t_1|$ . Eine *Geodäte* im metrischen Sinn in  $(X, d)$  ist eine Kurve  $c : [0, L] \rightarrow (X, d)$ , die lokal eine minimale Geodäte ist.

Eine Kurve  $c : [0, L] \rightarrow (X, d)$  ist also eine minimale Geodäte (Geodäte), wenn die Abbildung  $c$  eine Isometrie (lokale Isometrie) ist (siehe z.B. [CDP], p. 4). Anzumerken ist hier, dass nach dieser Definition der Begriff der Geodäte ihre Parametrisierung miteinschliesst.

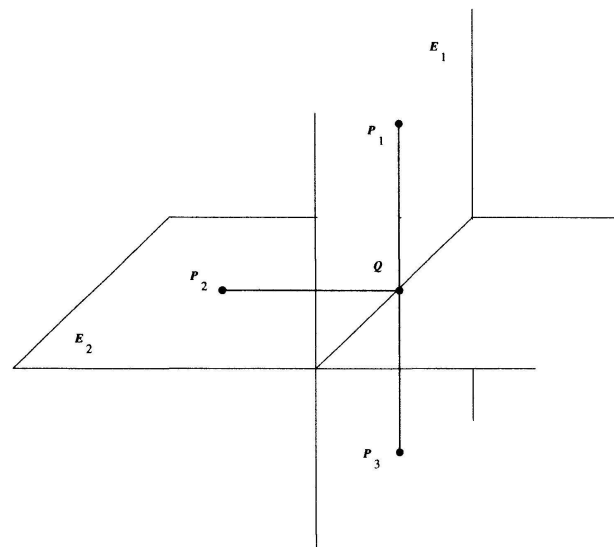


Fig. 9 Zwei senkrecht zueinander stehende Ebenen als Längenraum

Wir betrachten zur Illustration das Beispiel zweier senkrecht zueinander stehenden Ebenen. Es sei  $P_1$  ein Punkt auf der (vertikalen) Ebene  $E_1$  und  $P_2$  ein Punkt auf der (horizontalen) Ebene  $E_2$ .

Die Geodäte zwischen den Punkten  $P_1$  und  $P_2$  entspricht offensichtlich der Geraden zwischen  $P_1$  und  $P_3$ , wo  $P_3$  aus  $P_2$  erhalten wird, indem die Ebene  $E_2$  um die Schnittgerade nach unten geklappt wird. Wir betrachten zusätzlich noch den Spezialfall (siehe Figur 9), wo  $P_1$  und  $P_3$  symmetrisch zur Schnittgeraden der beiden Ebenen zu liegen kommen. Wir bezeichnen in diesem Fall mit  $Q$  den Schnittpunkt der Geraden  $P_1P_3$  mit der Schnittgeraden der beiden Ebenen. Dann sind  $P_1QP_2$  und  $P_1QP_3$  beides Geodäten. Sie stimmen zwischen  $P_1$  und  $Q$  überein, sind aber global verschieden. Dies ist ein drastischer Unterschied zum Sachverhalt, wie wir ihn oben in der differentialgeometrischen Teil beschrieben haben; dort ist das globale Verhalten der Geodäten vollständig durch die lokalen Eigenschaften, also durch  $c(t_0)$  und  $c'(t_0)$ , festgelegt.

Einen anderen wesentlichen Unterschied illustriert das folgende Beispiel, das uns von Herrn Prof. K. Voss mitgeteilt wurde (siehe Figur 10). Wir betrachten zwei symmetrisch zueinander liegende Parallelkreise auf der Sphäre und kleben die Nord- und die Süd-Kalotte längs der isometrischen Parallelkreise zusammen. Damit entsteht — wie man beweisen kann — ein Längenraum, der zwar zu einer Sphäre homöomorph ist, aber keine Fläche im Sinn der Differentialgeometrie ist. Der gemeinsame Parallelkreis ist eine Singularität der Metrik, wie man etwa aus folgender Überlegung entnehmen kann. Sind  $P$  und  $Q$  zwei verschiedene, beliebig nahe beieinander liegende Punkte auf dem gemeinsamen Parallelkreis, so gibt es *zwei* Geodäten, die  $P$  und  $Q$  verbinden, nämlich die beiden Grosskreise durch  $P$  und  $Q$  auf der Nord- und auf der Süd-Kalotte. Auf einer Fläche im differentialgeometrischen Sinn gibt es hingegen immer nur *eine* Geodäte, die zwei Punkte miteinander verbindet, wenn diese Punkte genügend nahe beieinander liegen.

Es bleibt hier nachzuweisen, dass mit der getroffenen allgemeinen Definition der Geodäte mathematisch gearbeitet werden kann und dass mit ihr Fortschritte erzielt werden können. Zu diesem Zweck erwähnen wir zuerst ein grundlegendes Resultat und kom-

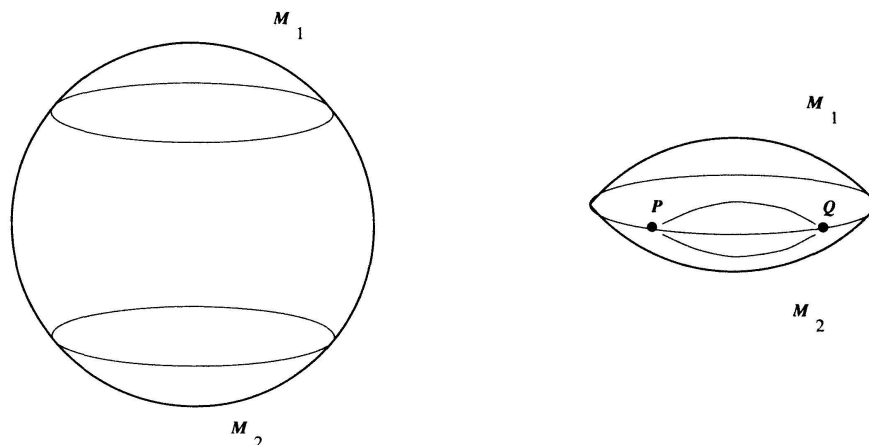


Fig. 10 Zwei zusammengeklebte Kugelkalotten als Längenraum

men anschliessend auf einige neuere mathematische Entwicklungen zu sprechen, wo die Ideen der metrischen Geometrie eine grosse Rolle gespielt haben.

Beim erwähnten grundlegenden Resultat geht es um die Existenz von Geodäten. Sie lässt sich in unserem Rahmen unter allgemeinen Bedingungen mathematisch beweisen. Dies ist im wesentlichen der Inhalt des Satzes von Hopf-Rinow.

**Satz (Hopf-Rinow)** *Es sei  $(X, d)$  ein Längenraum, der vollständig und lokal kompakt ist. Dann gibt es zu zwei Punkten  $P, Q \in (X, d)$  eine  $P$  und  $Q$  verbindende minimale Geodäte (der Länge  $d(P, Q)$ ).*

*Beweis* Um das Wesentliche des Beweises besser hervortreten zu lassen, setzen wir  $(X, d)$  als kompakt (und nicht nur als lokal kompakt) voraus. Da  $(X, d)$  ein Längenraum ist, gibt es zu jeder natürlichen Zahl  $n \geq 1$  eine stetige Kurve  $c_n : [0, 1] \rightarrow (X, d)$  mit  $c_n(0) = P, c_n(1) = Q$  und  $L(c_n) \leq d(P, Q) + 1/n$ . Wir parametrisieren ausserdem  $c_n$  so, dass  $d(c_n(t), c_n(t')) \leq L(c_n)|t - t'|$  gilt für alle  $t, t' \in [0, 1]$ . Dies bedeutet, dass die  $c_n$  eine Familie von gleichgradig stetigen Abbildungen bilden. Nach dem Satz von Ascoli-Arzelà (siehe [Bu], p. 8-9) gibt es dann eine Teilfolge  $c_{n_k}$ , die für die sup-Norm gegen eine Kurve  $c : [0, 1] \rightarrow (X, d)$  konvergiert. Benutzt man jetzt das untenstehende Lemma, so folgt direkt  $L(c) \leq d(P, Q)$ , also  $L(c) = d(P, Q)$ , und  $c$  muss dann, wie behauptet, eine minimale Geodäte sein.

**Lemma** *Es gilt  $L(c) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} L(c_{n_k})$ .*

*Beweis* Es sei

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = 1$$

eine Zerlegung des Intervalles  $[0, 1]$ . Aus der Definition der Kurve  $c$  als Limes der Kurven  $c_n$  (wir betrachten nur die gegen  $c$  konvergierende Teilfolge) folgt die Abschätzung

$$\sum_{i=1}^N d(c(t_i), c(t_{i-1})) \leq 2N\varepsilon(n) + \sum_{i=1}^N d(c_n(t_i), c_n(t_{i-1})),$$

wobei  $\varepsilon(n) \rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$ . Da laut Definition die Ungleichung

$$L(c_n) \geq \sum_{i=1}^N d(c_n(t_i), c_n(t_{i-1}))$$

gilt, erhalten wir

$$L(c) \leq L(c_n) + 2N\varepsilon(n) .$$

Für  $n \rightarrow \infty$  folgt damit

$$L(c) \leq d(P, Q) = \liminf L(c_n) .$$

Dies war zu beweisen.

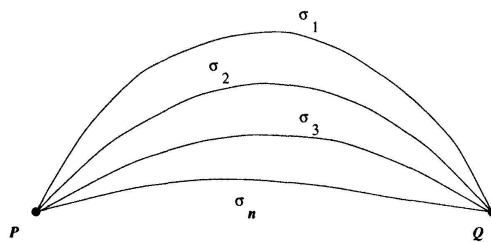


Fig. 11 Zum Satz von Hopf-Rinow

Im Satz von Hopf-Rinow kann die Voraussetzung ‘lokal kompakt’ nicht weggelassen werden. Um dies einzusehen, betrachten wir den Raum  $X$ , der aus zwei Punkten  $P, Q$  besteht und aus unendlich vielen Kurven  $\sigma_n, n = 1, 2, \dots$ , die  $P$  und  $Q$  miteinander verbinden und die Länge  $1 + 1/n$  besitzen (siehe Figur 11). Nach unseren Definitionen ist der Abstand  $d(P, Q)$  gleich 1; Es gibt aber keine minimale Geodäte zwischen  $P$  und  $Q$  der Länge 1. In der Tat ist  $X$  nicht lokal kompakt.

## Schlussbemerkungen

Wir schliessen mit einigen allgemeinen Bemerkungen. Wir haben an einem ganz speziellen und einfachen Beispiel zu zeigen versucht, wie die Einführung von Längenräumen zu einer neuen allgemeineren und fruchtbaren Sichtweise führen kann. Natürlich ist der hier angesprochene Grund, mit dem Begriff des Längenraumes zu arbeiten, nicht der einzige; es gibt andere, und vom mathematischen Standpunkt aus auch wesentlich wichtigere Gründe dafür. Denn nicht nur den Begriff der Geodäten kann man im Rahmen der Längenräume neu fassen, sondern es lassen sich auf ähnliche Weise auch andere wichtige differentialgeometrische Begriffe übertragen. Dies gilt insbesondere für den zentralen Begriff der (Gauss'schen) Krümmung. Die zwei folgenden Beispiele mögen erahnen lassen, wie gross die Spannweite der Anwendungen ist, die mit der an sich einfachen Idee des Längenraumes verbunden sind. Auf die mathematischen Einzelheiten können wir hier nicht eingehen.

(A) *Eine Gruppe, genauer: den Cayley-Graphen der Gruppe, kann man als einen Längenraum verstehen* (siehe z.B. [CDP], §4). Es sei  $G$  eine Gruppe und  $S$  eine Menge von

Elementen aus  $G$ , welche  $G$  erzeugt. Für das folgende ist es bequem vorauszusetzen, dass  $S$  mit jedem Element  $x$  auch das Inverse  $x^{-1}$  enthält. Einem derartigen Paar  $(G, S)$  ist der sogenannte Cayley-Graph  $\Gamma$  zugeordnet. Die Knoten von  $\Gamma$  sind die Elemente der Gruppe  $G$ . Zwei Elemente  $x, y \in G$  sind genau dann durch eine Kante verbunden, wenn ein  $s \in S$  existiert mit  $xs = y$ . In der Figur 12 sind die Cayley-Graphen von zwei Gruppen skizziert, nämlich von der (additiv geschriebenen) Gruppe  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  mit  $S := \{(1, 0), (-1, 0), (0, 1), (0, -1)\}$ , und von der (multiplikativ geschriebenen) freien Gruppe  $F_2$  auf  $a, b$  und  $S := \{a, b, a^{-1}, b^{-1}\}$ .

Wenn man voraussetzt, dass jede Kante des Cayley-Graphen  $\Gamma$  zum reellen Einheitsintervall  $[0, 1]$  isometrisch ist, so wird  $\Gamma$  zu einem Längenraum im Sinne unserer Definition. Der Abstand zweier Knoten  $x$  und  $y$  im Längenraum  $\Gamma$  ist gegeben durch die minimale Anzahl Kanten, die im Graphen  $\Gamma$  zu durchlaufen sind, um von  $x$  nach  $y$  zu gelangen.

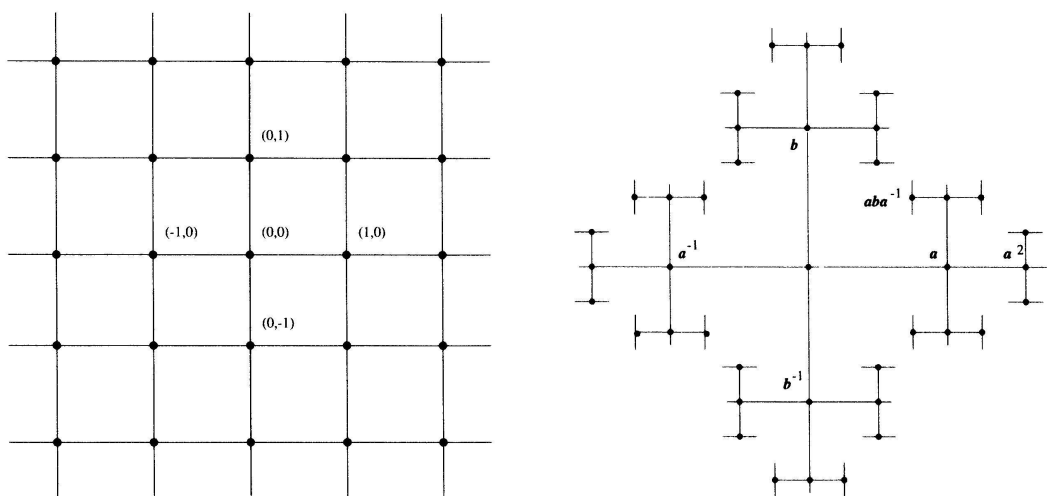


Fig. 12 Die Cayley-Graphen von  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  und von  $F_2 = F(a, b)$

Es liegt auf der Hand, dass nun Eigenschaften dieses Längenraumes als Eigenschaften der Gruppe interpretiert werden können und umgekehrt. Dieser Zusammenhang hat sich in den letzten Jahren als äusserst fruchtbar erwiesen. Unter anderem ist daraus die Theorie der sogenannten hyperbolischen Gruppen erwachsen. Zur Definition dieser Gruppen zieht man "Krümmungs"-Eigenschaften des Cayley-Graphen heran, die bei Riemannschen Mannigfaltigkeiten der nichtpositiven Gausschen-Krümmung entsprechen. In der Geometrie treten solche Gruppen in natürlicher Weise als Fundamentalgruppen von kompakten Riemannschen Mannigfaltigkeiten negativer Krümmung auf. In der Algebra ergeben sich weitere Beispiele, die sich innerhalb der kombinatorischen Gruppentheorie durch andersartige Eigenschaften charakterisieren lassen, welche ihrerseits ganz unerwartete Konsequenzen haben. Sowohl in der Geometrie wie auch in der kombinatorischen Gruppentheorie führte der Ansatz, den Cayley-Graphen als Längenraum aufzufassen, zu einer ganz neuen Sichtweise und lieferte eine Menge neuer Erkenntnisse. Für Näheres verweisen wir auf die Literatur [CDP], [GH], [GHV], insbesondere auf die Einleitung von [GH].

(B) Die Längenräume treten oft in natürlicher Weise als Limes Riemannscher Mannigfaltigkeiten auf (siehe [P], [GLP]). Zu diesem Zweck führt man auf der Menge der



kompakten Mannigfaltigkeiten eine Topologie ein, indem man sie einbettet in den Raum der kompakten metrischen Räume. Der Raum der kompakten Mannigfaltigkeiten ist nicht vollständig; zu seiner Vervollständigung kann man wie üblich Cauchy-Folgen heranziehen. Als Limes derartiger Folgen treten unter gewissen, hier natürlich nicht näher beschriebenen Bedingungen, Längensräume auf. Wir illustrieren diesen Vorgang in der Figur 13.

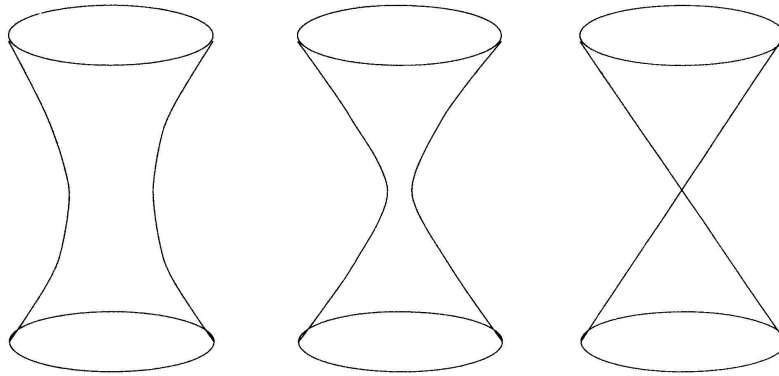


Fig. 13 Der Längensraum "Doppelkegel" als Limes von 2-dimensionalen Mannigfaltigkeiten

In diesem Sinn beinhaltet das Studium eines Längensraums gleich das Studium einer ganzen Folge von Riemannschen Mannigfaltigkeiten. Eigenschaften des Längensraumes liefern in diesem Fall auch Informationen über die zugehörigen Riemannschen Mannigfaltigkeiten. Dieses Vorgehen wurde vor kurzem verwendet, um sogenannte Kollapsmannigfaltigkeiten zu untersuchen (siehe [Fu]).

### Literatur

- [Bu] H. Busemann: The Geometry of Geodesics. Academic Press, 1955.
- [CDP] M. Coornaert, T. Delzant, A. Papadopoulos: Géométrie et théorie des groupes. Springer Lecture Notes 1441, 1990.
- [DC] M.P. Do Carmo: Differentialgeometrie von Kurven und Flächen. Vieweg Studium 1992.
- [Fu] K. Fukaya: Hausdorff Convergence of Riemannian Manifolds and its Applications. Advanced Studies in Pure Mathematics, 18-(I), (1990), p. 143-238.
- [GH] E. Ghys, P. de la Harpe (eds): Sur les groupes hyperboliques, d'après Mikhael Gromov. Birkhäuser 1990.
- [GHV] E. Ghys, A. Haefliger, A. Verjovsky (eds): Group Theory from a Geometrical Viewpoint. World Scientific, 1991.
- [GLP] M. Gromov, S. Lafontaine, P. Pansu: Structures métriques pour les variétés riemanniennes. Cedric/Fernand Nathan, 1981.
- [P] P. Petersen: Gromov-Hausdorff Convergence of Metric Spaces. Proc. Symp. in Pure Mathematics 54 (1993), part 3.

Bruno Colbois  
 Laboratoire de Mathématiques  
 Université de Savoie  
 F 73376 Le Bourget-du-Lac Cedex  
 France