Eine Zählformel für Dreiecke

Autor(en): **Wellstein, Hartmut**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **52 (1997)**

PDF erstellt am: **17.09.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-2670

Elem. Math. 52 (1997) 169 – 172
0013-6018/97/040169-4 $ 1.50+0.20/0

Elemente der Mathematik

Eine Zählformel für Dreiecke

Hartmut Wellstein

Hartmut Wellstein, geboren 1940, promovierte in Würzburg über Funktionentheorie. Er wechselte dann zur Mathematikdidaktik, die er seit 1978 an der Universität in Flensburg lehrt. Daneben beschäftigt er sich mit Fragen der Elementarmathematik und betätigt sich als Schulbuchautor. In freien Stunden spielt er gerne klassische Musik auf seiner Klarinette; auch wandert er gerne, wobei er seinem Hang zur Botanik folgt. Er hat drei erwachsene Kinder.

Die Konstruktion aller Dreiecke mit ganzzahligen Seiten zu gegebenem (nicht zu gross gewähltem) Umfang n ist eine elementare Aufgabe, die im Schulunterricht durch Materialien wie Georule, Gliedermassstab oder Knotenschnur belebt werden kann. Sie legt nahe, die Kongruenzklassen dieser Dreiecke aufzuzählen (Figur 1).

Die Anzahlfolge (a_n) der Kongruenzklassen hat, wie man schnell im einzelnen ermittelt, das folgende Anfangsstück:

n	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
a_n	1	0	1	1	2	1	3	2	4	3	5	4	7	5	8	7	10	8

Eine Summendarstellung für a_n ist leicht zu erhalten: Die Dreiecksseiten seien a, b, c mit $a \le b \le c$. Es gilt $n/3 \le c < n/2$ und $(n-c)/2 \le b \le c$. Der Wert $(n-c)/2$ wird von b nur dann angenommen, wenn $n-c$ gerade ist; andernfalls ist $(n-c+1)/2$ der kleinste b-Wert. Die Anzahl der b-Werte zu gegebenem c beträgt also $c - [(n-c+1)/2] + 1$. Dies ergibt $a_n = (c - [(n-c+1)/2] + 1)$, wobei c die natürlichen Zahlen im Intervall $[n/3; n/2[$ durchläuft. Eine solche, für die Berechnung offenbar unhandliche Formel findet sich ähnlich bei Hale (1975), dessen Augenmerk jedoch stärker heuristischen Überlegungen gilt. Wir beweisen eine explizite Darstellung.

Hartmut Wellstein stellt in seinem Beitrag die Frage nach der Anzahl nichtkongruenter Dreiecke mit Umfang n und ganzzahligen Seiten. Für kleine n lässt sich die Frage experimentell leicht beantworten. Gesucht ist eine brauchbare allgemeine Formel. *ust*

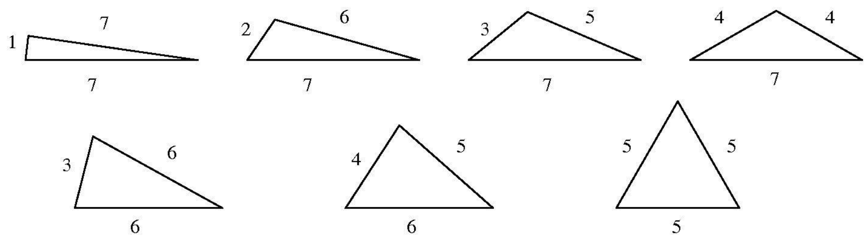


Fig. 1 Die 7 Dreiecke mit Umfang 15

Satz: *Die Anzahlfolge* (a_n) *der Kongruenzklassen von Dreiecken mit ganzzahligen Seiten und Umfang* n *ist gegeben durch*

$$a_n = \left[\frac{1}{48}(7n^2 - 12\left[\frac{n}{2}\right]n + 21)\right].$$

Zum *Beweis* bezeichne A_n die Menge der Dreiecke mit ganzzahligen Seiten und Umfang n. Weiter sei $v : A_n \longrightarrow A_{n+3}$ die Abbildung, die dem Dreieck mit den Seiten a, b, c und Umfang n das Dreieck mit den Seiten $a+1, b+1, c+1$ zuordnet; man beachte dazu, dass die Dreiecksungleichung auch für die verlängerten Strecken gilt. Offenbar is v injektiv.

Wir zeigen, dass v für ungerade n surjektiv ist. Sei dazu $D' \in A_{n+3}$ mit den Seiten a', b', c' beliebig gewählt. Weil $n+3$ gerade ist, sind $a'+b'$ und c' entweder beide gerade oder beide ungerade, so dass aus $a'+b' > c'$ sogar $a'+b' > c'+1$ folgt. Dies ergibt $(a'-1)+(b'-1) > c'-1$. Die Zahlen $a'-1, b'-1$ und $c'-1$ erfüllen also die Dreiecksungleichung, und es gilt auch $a'-1 > 0$. Schliesslich gilt, da $n+3$ gerade ist, nicht nur $c' < (n+3)/2$, sondern sogar $c' < (n+2)/2$, also $c'-1 < n/2$. Die Zahlen $a'-1, b'-1, c'-1$ sind demnach als Seitenlängen eines Dreiecks $D \in A_n$ realisierbar. Damit ist insgesamt für ungerade n die Bijektivität von v gezeigt; es gilt also $a_{n+3} = a_n$.

Nun sei n gerade. Für $D \in A_n$ ist die maximale Seitenlänge $n/2 - 1$. Für $D' \in A_{n+3}$ beträgt sie aber nicht $n/2$, sondern $n/2+1$. Die Injektion v kann also A_n höchstens auf die Menge A^*_{n+3} der Dreiecke mit Umfang $n+3$ und maximaler Seitenlänge $n/2$ abbilden. Sei also $D' \in A^*_{n+3}$. Aus $a'+b'+c' = n+3$ und $c' \leq n/2$ folgt $a'+b' \leq n/2+3$, also $(a'-1)+(b'-1) \geq n/2+1 > n/2 > c'-1$. Die Zahlen $a'-1, b'-1, c'-1$ sind damit als Seitenlängen eines Dreiecks $D \in A_n$ realisierbar. Damit ergibt sich $a^*_{n+3} = a_n$. Nun sind noch die Dreiecke $D' \in A_{n+3}$ mit längster Seite $c' = n/2+1$ abzuzählen. Wegen $a'+b' = n/2+2$ und $a' \leq b' \leq c'$ gilt $n/4+1 \leq b' \leq n/2+1$. Für $n \equiv 0$ mod 4 gibt es $n/4+1$ Werte von b', für $n \equiv 2$ mod 4 nur $n/4+1/2$ Werte, weil dann der kleinstmögliche Wert nicht $n/4+1$, sondern $n/4+3/2$ ist. Es gilt also insgesamt

$$a_{n+3} = \begin{cases} a_n & \text{für ungerade } n, \\ a_n + \frac{n}{4} + 1 & \text{für } n \equiv 0 \text{ mod } 4, \\ a_n + \frac{n}{4} + \frac{1}{2} & \text{für } n \equiv 2 \text{ mod } 4. \end{cases}$$

Damit ergibt sich für $n \equiv 0 \bmod 4$

$$\begin{aligned}a_{n+12} - a_n &= (a_{n+12} - a_{n+9}) + (a_{n+9} - a_{n+6}) + (a_{n+6} - a_{n+3}) + (a_{n+3} - a_n) \\ &= 0 + \frac{n+6}{4} + \frac{1}{2} + 0 + \frac{n}{4} + 1 \\ &= \frac{n+6}{2}.\end{aligned}$$

Dasselbe Ergebnis erhält man für $n \equiv 2 \bmod 4$. Für $n \equiv 1 \bmod 4$ ergibt sich entsprechend

$$a_{n+12} - a_n = \frac{n+9}{4} + \frac{1}{2} + 0 + \frac{n+3}{4} + 1 + 0 = \frac{n+9}{2}.$$

Dies gilt auch für $n \equiv 3 \bmod 4$. Zusammengefasst:

$$a_{n+12} - a_n = \begin{cases} \frac{n+6}{2} & \text{für gerade } n, \\ \frac{n+9}{2} & \text{für ungerade } n. \end{cases}$$

Diese lineare Differenzformeln zeigen: Durchläuft $n = 12m + r$ für festes r eine Restklasse mod 12, wird die zugehörige Teilfolge von (a_n) durch ein quadratisches Polynom dargestellt. Durch elementare Rechnung ergibt sich für gerade n und $r \in \{4, 6, \ldots, 14\}$.

$$a_n = a_r + \frac{1}{48}(n^2 - r^2) = \frac{1}{48}(n^2 + 48a_r - r^2)$$

sowie für ungerade n und $r \in \{3, 5, \ldots, 13\}$

$$a_n = a_r + \frac{1}{48}(n - r)(n + r + 6) = \frac{1}{48}(n^2 + 6n + 48a_r - r(r + 6)) .$$

Die folgende Tabelle gibt die anhand des Anfangsstücks berechneten Werte der Absolutglieder $p_r = 48a_r - r^2$ bzw. $p_r = 48a_r - r(r + 6)$ an.

r	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
p_r	21	−16	−7	12	5	−16	9	−4	5	0	−7	−4

Aus $-16 \le p_r \le 21$, also $p_r \le 21 \le p_r + 37$, folgt für gerade n

$$a_n = \frac{1}{48}(n^2 + p_r) \le \frac{1}{48}(n^2 + 21) \le \frac{1}{48}(n^2 + p_r + 37) < a_n + 1 ,$$

also

$$a_n = \left[\frac{1}{48}(n^2 + 21)\right] ,$$

und ebenso

$$a_n = \left[\frac{1}{48}(n^2 + 6n + 21)\right]$$

für ungerade n.

Diese zwei Formeln lassen sich zu der im Satz angegebenen zusammenfassen. Im einzelnen gilt beispielsweise:

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{48}n^2 & \text{für } r = 12, \\ \frac{1}{48}(n^2 + 6n - 7) & \text{für } r = 13, \\ \frac{1}{48}(n^2 - 4) & \text{für } r = 14. \end{cases}$$

Man bestätigt jetzt auch leicht, dass sich die "Verwerfungen" des Anfangsstücks durch die gesamte Folge fortsetzen. So gilt für ungerade n beispielsweise $a_{n+1} - a_n \approx -n/12$, wobei der Fehler nur von r abhängt und zwischen $-9/12$ und $5/12$ liegt.

Zusatz: Da die Abbildung v symmetrietreu ist, lassen sich nach demselben Verfahren auch die Kongruenzklassen der unsymmetrischen Dreiecke abzählen. Es ergibt sich:

$$b_{n+12} - b_n = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{für gerade } n, \\ \frac{n+3}{2} & \text{für ungerade } n. \end{cases}$$

Mit Hilfe des Anfangsstücks

$$b_n = \begin{cases} 0 & \text{für } n = 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, \\ 1 & \text{für } n = 9, 11, 12, 14, \\ 2 & \text{für } n = 13 \end{cases}$$

erhält man

$$b_n = \begin{cases} \left[\frac{1}{48}(n^2 - 12n + 48)\right] & \text{für gerade } n, \\ \left[\frac{1}{48}(n^2 - 6n + 21)\right] & \text{für ungerade } n. \end{cases}$$

Literatur

Hale, D.: One Thing Leads to Another. Mathematics Teaching **72** (1975), p. 18–21.

Hartmut Wellstein
Institut für Mathematik und ihre Didaktik
Bildungswissenschaftliche Hochschule Flensburg Universität
Mürwiker Str. 77
D-24943 Flensburg

Elem. Math. 52 (1997) 173 – 177
0013-6018/97/040173-5 $ 1.50+0.20/0

Elemente der Mathematik

Aufgaben

Neue Aufgaben

Lösungen sind erbeten bis zum 10. Mai 1998 an:

- Peter Gallin, Tüfenbach 176, CH-8494 Bauma

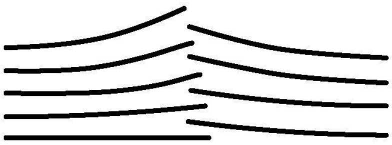
  oder

- Hans Walser, Gerlikonerstrasse 29, CH-8500 Frauenfeld

Aufgabe 1126: Die Summe der Oberflächen zweier Körper von vorgegebenen Formen sei konstant. Es ist zu zeigen, dass die Volumina dieser Körper sich wie ihre Oberflächen verhalten, wenn die Summe dieser Volumina zu einem Minimum wird. Man berechne dann dieses Verhältnis aus den Oberflächen und Volumina zweier beliebiger formgleicher Körper und bestimme dessen Zahlwert, wenn der eine Körper ein Würfel und der andere ein regelmässiges Tetraeder ist.

Rolf Rose, Magglingen, CH

Aufgabe 1127: Ein Kartenspiel mit n Karten wird folgendermassen gemischt: Die Karten werden in zwei möglichst gleich grosse Stapel aufgeteilt. Der erste Stapel enthält allenfalls eine Karte mehr als der zweite. Dann werden die beiden Stapel, Bildseite nach unten, nach dem "Reissverschluss-Verfahren" gemischt: Zuerst kommt die erste Karte des ersten Stapels, dann die erste Karte des zweiten Stapels, dann die zweite Karte des ersten Stapels usw.



Ist es möglich, dass nach mehrfachem Wiederholen dieses Mischprozesses wieder die ursprüngliche Reihenfolge der Karten auftritt?

Chantal Spleiss, Zürich, CH

Aufgabe 1128 (Die einfache dritte Aufgabe): Für die positiven Zahlen a, b, c mit $a+b+c=1$ gilt

$$\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right)\left(1+\frac{1}{c}\right)\geq 64\ .$$

Michael Vowe, Therwil, CH