

Lösungen zu den Aufgaben in Heft 4. 1996

Objektyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **52 (1997)**

PDF erstellt am: **14.08.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

<http://www.e-periodica.ch>

Lösungen zu den Aufgaben in Heft 4, 1996

Aufgabe 1114. Parkettartige Zerlegungen der projektiven Ebene.

Zeichnet man in der projektiven Ebene vier Geraden in allgemeiner Lage, so entsteht ein vollständiges Vierseit. Dadurch wird die projektive Ebene in vier Dreiecke und drei Vierecke zerlegt, wobei jedes Dreieck an seinen Kanten ausschliesslich durch Vierecke und ebenso jedes Viereck an seinen Kanten nur durch Dreiecke begrenzt wird. Dieses hohe Mass an Symmetrie gibt Anlass zur folgenden Definition:

Eine Zerlegung der projektiven Ebene durch n Geraden in genau zwei Arten von Vielecken, von denen jedes der einen Art an seinen Kanten nur von Vielecken der anderen Art begrenzt wird, nennt man *parkettartig*.

Wie viele parkettartige Zerlegungen der projektiven Ebene gibt es? Welche sind es?

Frank Rothe, Salzburg, A

Auswertung der eingesandten Lösungen. Es sind 2 Lösungen eingetroffen, nämlich von O.P. Lossers (Eindhoven, NL) und Georg Unger (Dornach, CH). Im folgenden die Lösung nach O.P. Lossers: Wir betrachten eine Zerlegung der projektiven Ebene, welche mindestens ein Dreieck enthält. Wird ein Dreieck durch eine neue Gerade in zwei Stücke zerlegt, so ist eines davon wieder ein Dreieck. Daher muss jede parkettartige Zerlegung Dreiecke enthalten. Die projektive Ebene wird von l Geraden in $1 + \frac{1}{2}l(l-1)$ Stücke zerlegt. Wenn nun eine parkettartige Zerlegung mit a_3 Dreiecken und a_k k -Ecken entstehen soll, muss die Beziehung

$$a_3 + a_k = 1 + \frac{1}{2}l(l-1) \quad (1)$$

gelten. Jede der l Geraden enthält $l-1$ Kanten der Zerlegung. Durch Abzählen der Kanten finden wir also:

$$3a_3 = ka_k = l(l-1). \quad (2)$$

Aus (1) und (2) folgt:

$$\frac{1}{3}l(l-1) + \frac{1}{k}l(l-1) = 1 + \frac{1}{2}l(l-1). \quad (3)$$

Diese Gleichung hat für $k > 3$ die zwei positiven ganzzahligen Lösungen:

$$\begin{aligned} k = 4, \quad l = 4, \quad a_3 = 4, \quad a_4 = 3. \\ k = 5, \quad l = 6, \quad a_3 = 10, \quad a_5 = 6. \end{aligned}$$

Die erste Lösung entspricht der Zerlegung der Aufgabenstellung. Zur Konstruktion einer zur zweiten Lösung passenden Zerlegung betrachten wir in der affinen Ebene ein regelmässiges Fünfeck. Die fünf Trägergeraden der Kanten bilden in der entsprechenden projektiven Ebene eine Zerlegung mit dem Fünfeck, fünf Dreiecken und fünf Vierecken. Diese fünf Vierecke werden von der unendlich fernen Geraden in Dreiecke und Fünfecke zerlegt. Damit haben wir eine parkettartige Zerlegung.

Georg Unger stellt einen Bezug zur Geometrie der platonischen Körper her: Wir verbinden benachbarte Kantenmitten eines platonischen Körpers mit Grosskreisen auf der zugehörigen Kantenmittenkugel. Für Würfel und/oder Oktaeder erhalten wir 4 Grosskreise, welche die Oberfläche der Kantenmittenkugel in 8 Dreiecke und 6 Vierecke zerlegen. Identifizieren wir diametrale Punkte, um ein Modell der projektiven Ebene zu erhalten, ergibt sich die erste Lösung mit $k = 4$, $l = 4$, $a_3 = 4$, $a_4 = 3$. Ikosaeder und/oder Pentagondodekaeder liefern entsprechend die zweite Lösung mit $k = 5$, $l = 6$, $a_3 = 10$, $a_5 = 6$. Aus dem Tetraeder erhalten wir entsprechend nur vier Dreiecke; dies widerspricht dem Parkettbegriff der Aufgabenstellung.

Aufgabe 1115. Es seien a , b , c und d vier Punkte der komplexen Zahlenebene. In Verallgemeinerung der harmonischen Lage von vier Punkten auf einer Geraden definieren wir hier die harmonische Lage von a , b , c und d durch

$$\frac{a-c}{b-c} = -\frac{a-d}{b-d} = k_1.$$

Das bedeutet, dass die Punkte c resp. d die Strecke ab äusserlich resp. innerlich im gleichen (komplexen) Verhältnis k_1 teilen. Dann folgt aber auch, dass die Punkte a resp. b die Strecke cd innerlich resp. äusserlich in einem gleichen (komplexen) Verhältnis k_2 teilen:

$$\frac{c-b}{d-b} = -\frac{c-a}{d-a} = k_2.$$

Wie erkennt man geometrisch, ob sich vier Punkte der komplexen Zahlenebene in harmonischer Lage befinden? Welche möglichen Lagen können diese Punkte einnehmen, wenn man ausserdem $k_1 = k_2$ verlangt?

Rolf Rose, Magglingen, CH

Auswertung der eingesandten Lösungen. Es sind 7 Lösungen eingetroffen, nämlich von Jany C. Binz (Bolligen, CH), Klaus-Dieter Drews (Rostock, D), Dieter Koller (Zürich, CH), Hanfried Lenz (Berlin, D), Werner Raffke (Vechta, D), Bernhard Ruh (Solothurn, CH) und Roland Wyss (Flumenthal, CH).

Wir folgen hier der Lösung von *Jany C. Binz*.

Antwort. Die Punkte a , c , b , d bilden in dieser Reihenfolge ein Sehnenviereck, bei dem sich die Winkelhalbierenden gegenüberliegender Winkel auf der Diagonalen durch die beiden andern Ecken schneiden. Im Fall $k_1 = k_2$ ist das Viereck ein Quadrat.

Begründung. Es sei $k_1 = r \cdot e^{i\phi}$ mit $r > 0$ und $0 < \phi < \pi$. (Für reelles k_1 ergäbe sich die klassische harmonische Lage der vier Punkte auf einer Geraden; negative Argumente ergeben zur Geraden ab symmetrische Konfigurationen.) Aus der komplexen Verhältnisgleichung erhält man

$$\frac{|a-c|}{|b-c|} = \frac{|a-d|}{|b-d|} = |k_1| = r \quad (1)$$

und

$$\arg(a-c) - \arg(b-c) = \phi, \quad \arg(a-d) - \arg(b-d) = \phi - \pi. \quad (2)$$

Wegen (1) liegen c und d auf dem Apolloniuskreis mit Durchmesser ef , wobei e und f die Punkte sind, welche die Strecke ab harmonisch im Verhältnis r teilen. Die Bedingungen (2) zeigen, dass c und d auf einem Kreis durch a und b liegen, und zwar so, dass das Dreieck acb positiv orientiert ist und bei c den Innenwinkel ϕ hat, während das Dreieck adb negativ orientiert ist und bei d den Innenwinkel $\pi - \phi$ aufweist.

Die Kombination der beiden Schlüsse begründet die Antwort auf die Hauptfrage. Zur Antwort auf die Zusatzfrage stellt man zunächst die Beziehung

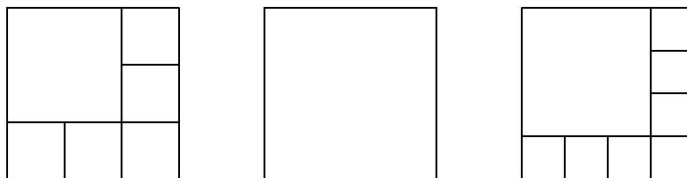
$$\frac{1+k_1}{1-k_1} = \frac{1-\frac{a-d}{b-d}}{1-\frac{a-c}{b-c}} = \frac{c-b}{d-b} = k_2$$

zwischen k_1 und k_2 her. Wird zusätzlich $k_1 = k_2$ verlangt, folgt daraus $k_1 = \pm i$, wobei $-i$ wegen $0 < \phi < \pi$ ausgeschlossen ist. Das bedeutet aber $r = 1$ und $\phi = \frac{\pi}{2}$, was den Apolloniuskreis zur Mittelsenkrechten der Strecke ab , und den Umkreis des Sehnenvierecks zum Thaleskreis über Strecke ab entarten lässt. Damit ist das Sehnenviereck ein Quadrat.

Aufgabe 1116 (Die einfache dritte Aufgabe). Ist es möglich, ein gegebenes Quadrat in 1997 kleinere Quadrate aufzuteilen?

Šefket Arslanagić, Berlin, D

Auswertung der eingesandten Lösungen. Es sind 14 Lösungen eingetroffen: Jany C. Binz (Bolligen, CH), Klaus-Dieter Drews (Rostock, D), Hans Egli (Zürich, CH), Walther Janous (Innsbruck, A), Detlef Kaese (Düsseldorf, D), Joachim Klose (Bonn, D), Dieter Koller (Zürich, CH), Hanfried Lenz (Berlin, D), Werner Raffke (Vechta, D), J. Schaar (Calgary, Canada), Ernst Specker (Zürich, CH), Georg Unger (Dornach, CH), Peter Zimmermann (Glarus, CH), Josef Züger (Tamins, CH). Sämtliche Einsender verallgemeinern die Aufgabe. In fast allen Lösungen wird die Frage untersucht, für welche Zahlen n es eine Zerlegung des Quadrates in n Teilquadrate gibt. Da bei der Vierteilung eines Quadrates sich die Anzahl um 3 erhöht, genügt es, in jeder Restklasse mod 3 das minimale Beispiel anzugeben. Es sind dies die folgenden:



Die Zerlegung ist somit möglich für alle n ausser 2, 3 und 5. Es gibt dann sogar immer eine Zerlegung mit höchstens zwei verschiedenen Quadratgrößen. Dies kann mit einer

Fallunterscheidung bezüglich der Parität von n eingesehen werden: Für gerades $n = 2m$ zeichnen wir im Einheitsquadrat am unteren und rechten Rand einen Gnomon, der aus $2m - 1$ Quadraten der Seitenlänge $\frac{1}{m}$ besteht. Zusammen mit dem grossen Quadrat links oben ergibt sich so eine Zerlegung in $n = 2m$ Quadrate. Ein ungerades $n \geq 7$ kann in der Form $n = 2m + 3$ mit $m \geq 2$ geschrieben werden. Wieder zeichnen wir im Einheitsquadrat am unteren und rechten Rand einen Gnomon aus $2m - 1$ Quadraten der Seitenlänge $\frac{1}{m}$, und verteilen dann das übrigbleibende Quadrat links oben. Die folgende Figur illustriert das Verfahren anhand der Beispiele $n = 14$ und $n = 15$. Und der letzte Fall ist stellvertretend für die Zerlegung eines Quadrates in 1993 kleine und 4 grosse, also 1997 Teilquadrate.

