Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 53 (1998)

Artikel: Zur Kurvendiskussion der Potenzsummenpolynome
Autor: Treiber, Dietmar
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-3635

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 12.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Elem. Math. 53 (1998) 119 – 125
0013-6018/98/030119-7 $ 1.50+0.20/0

© Birkhäuser Verlag, Basel, 1998

Elemente der Mathematik

Zur Kurvendiskussion der Potenzsummenpolynome

Dietmar Treiber

Herrn G. Pickert in Dankbarkeit gewidmet

Dietmar Treiber studierte in Köln Mathematik und Physik und promovierte dort 1971 über p-adische Analysis. Er unterrichtet Mathematik und Informatik an einem Gymnasium. Intensiv befasst er sich mit mathematikdidaktischen Fragen in Analysis und Wahrscheinlichkeitsrechnung und mit dem Einsatz von Computern im Mathematikunterricht. Besonders gern beschäftigt er sich mit Elementarmathematik.

1 Einleitung

Für alle $n \in \mathbb{N}$ bezeichnen wir mit P_n das n-te Potenzsummenpolynom, das dadurch gekennzeichnet ist, daß für alle ganzahligen $x \geq 2$ die Gleichung

$$P_n(x) = 1^{n-1} + 2^{n-1} + 3^{n-1} + \cdots + (x-1)^{n-1}$$

erfüllt ist. Es gilt dann:

$$\begin{aligned} P_1(x) &= x \\ P_2(x) &= \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x \\ P_3(x) &= \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x \end{aligned}$$

Die Formeln, welche die Summen der ersten, zweiten, dritten etc. Potenzen der ganzen Zahlen darstellen, sind beliebte Themen im Mathematikunterricht des Gymnasiums. Schon Jakob Bernoulli und wenig später Leonard Euler haben die zugehörigen, durch diese Formeln definierten reellen Polynome untersucht. Das Interesse ergab sich aus der Tatsache, dass die Koeffizienten dieser Polynome in enger Beziehung zu den sogenannten Bernoullizahlen stehen, die an verschiedensten Stellen der Mathematik in geradezu wundersamer Weise auftreten, so etwa bei den Potenzreihe des Tangens und des Cotangens oder bei der Berechnung von Werten der Zetafunktion. – Dietmar Treiber zeigt in seinem Beitrag, wie mit ganz einfachen und an der Schule bekannten Hilfsmitteln der Differential- und Integralrechnung interessante Eigenschaften dieser Polynome hergeleitet werden können. *ust*

$$P_4(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{4}x^2$$
$$P_5(x) = \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{30}x$$
$$P_6(x) = \frac{1}{6}x^6 - \frac{1}{2}x^5 + \frac{5}{12}x^4 - \frac{1}{12}x^2$$
$$P_7(x) = \frac{1}{7}x^7 - \frac{1}{2}x^6 + \frac{1}{2}x^5 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{42}x\ .$$

Kern dieses Aufsatzes ist eine neue Rekursionsformel für die Potenzsummenpolynome. Die Formel verwendet Differential- und Integralrechnung und ermöglicht es, mit ganz elementarer Analysis Neues über diese Polynome herauszufinden und Bekanntes einfach herzuleiten. Unser wichtigstes Ergebnis besagt, daß alle Potenzsummenpolynome punkt- oder achsensymmetrisch sind.

Die Potenzsummenpolynome sind eng verbunden mit den Bernoullischen Zahlen. Als Nebenergebnis gewinnen wir eine anschauliche Deutung dieser Zahlen und weisen wichtige Eigenschaften dieser Zahlen elementar nach.

2 Potenzsummenpolynome und Bernoullische Zahlen

Eine einheitliche Darstellung der Potenzsummenpolynome fand Jakob Bernoulli (siehe [1]). Die nach ihm benannten Bernoullischen Zahlen $B_0, B_1, B_2, \ldots$ sind rekursiv definiert durch $B_0 = 1$ und

$$\sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i} B_i = 0$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$. Z. B. gilt:

$$B_0 = 1,\ B_1 = -\frac{1}{2},\ B_2 = \frac{1}{6},\ B_3 = 0,\ B_4 = -\frac{1}{30},\ B_5 = 0,\ B_6 = \frac{1}{42}.$$

Mit diesen Zahlen lassen sich die Potenzsummenpolynome berechnen durch

$$P_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i} B_i x^{n-i}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$.

Umgekehrt lassen sich die Bernoullischen Zahlen aus den Potenzsummenpolynomen als geometrische Größen zurückgewinnen, und zwar auf ganz verschiedene Arten. Sie sind z. B. Tangentensteigungen dieser Polynome. Denn es gilt $P_n'(0) = B_{n-1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Für uns ist hier eine andere geometrische Deutung der Bernoullischen Zahlen wesentlich:

Satz 1 *Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $-\frac{B_n}{n}$ gleich dem Mittelwert von P_n auf $[0, 1]$.*

Beweis. Für $n = 1$ ergibt sich die Behauptung durch einfache Rechnung. Für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ gilt:

$$n \int_0^1 P_n(x)\, dx = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i} B_i \frac{1}{n+1-i} = \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n+1}{i} B_i = -B_n.$$

3 Eine Rekursionsformel für die Potenzsummenpolynome

Daß man die Potenzsummenpolynome auch rekursiv berechnen kann, ist bekannt. Eine Rekursionsformel findet man z. B. in [5; S. 501]. Wir bemerken, daß diese Formel nur arithmetische Rechnungen verwendet. Daneben gibt es – wie wir nun zeigen – noch eine ganz andere rekursive Beziehung zwischen den Potenzsummenpolynomen. Diese verwendet Differential- und Integralrechnung und eröffnet neue Möglichkeiten zur Untersuchung dieser Polynome mit elementarer Analysis.

Versuchen wir, durch Differenzieren eine Rekursionsformel für die Potenzsummenpolynome zu finden. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\begin{aligned} P'_{n+1}(x) &= \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^{n} \binom{n+1}{i} B_i (n+1-i) x^{n-i} \\ &= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} B_i x^{n-i} \\ &= n\, P_n(x) + B_n \,. \end{aligned}$$

Hieraus und aus Satz 1 folgt:

$$P'_{n+1}(x) = n \left(P_n(x) - \int_0^1 P_n(t)\, dt \right) .$$

Die Potenzsummenpolynome haben sämtlich an der Stelle 0 den Wert 0, wie Bernoullis Formel zeigt. Daher folgt aus der letzten Gleichung durch Integrieren:

Rekursionsformel *Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:*

$$P_{n+1}(x) = n \left(\int_0^x P_n(t)\, dt - x \int_0^1 P_n(t)\, dt \right) .$$

4 Die Symmetrie der Potenzsummenpolynome

Unsere Rekursionsformel ist ein Schlüssel zum Verständnis des Symmetrieverhaltens der Potenzsummenpolynome. Sie erlaubt es, von der Symmetrie eines Potenzsummenpolynomes auf die des nächsten zu schließen.

Satz 2 *Die Potenzsummenpolynome geraden Grades sind achsensymmetrisch zu $x = \frac{1}{2}$; Die Potenzsummenpolynome ungeraden Grades sind – von dem vom Grade 1 abgesehen – punktsymmetrisch zu $S(\frac{1}{2}, 0)$.*

Beweis. Wir beweisen die Behauptung durch vollständige Induktion. Sei zunächst $n = 2$. Die Achsensymmetrie von P_2 ergibt sich durch eine einfache Rechnung. Sei nun $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ vorgegeben.

Sei zunächst n *ungerade*. Nach Induktionsvoraussetzung ist P_n ungerade bezüglich $\frac{1}{2}$. Daher folgt:

$$P_{n+1}(\tfrac{1}{2}+x) - P_{n+1}(\tfrac{1}{2}-x) = n \int_{\frac{1}{2}-x}^{\frac{1}{2}+x} P_n(t)\,dt = 0.$$

Daher ist P_{n+1} gerade bezüglich $\frac{1}{2}$.

Sei nun n *gerade*. Nach Induktionsvoraussetzung ist P_n gerade bezüglich $\frac{1}{2}$. Daher folgt:

$$\begin{aligned} P_{n+1}(\frac{1}{2}+x) + P_{n+1}(\frac{1}{2}-x) &= n\left(\int_0^{\frac{1}{2}+x} P_n(t)\,dt + \int_0^{\frac{1}{2}-x} P_n(t)\,dt - \int_0^1 P_n(t)\,dt\right) \\ &= n\left(\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}+x} P_n(t)\,dt + \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-x} P_n(t)\,dt\right) \\ &= 0\,. \end{aligned}$$

Daher ist P_{n+1} ungerade bezüglich $\frac{1}{2}$. □

Wir bemerken, daß sich aus Satz 1 und Satz 2 in anschaulicher Weise eine wichtige Eigenschaft der Bernoullischen Zahlen ergibt:

Bemerkung *Es gilt:* $B_3 = B_5 = B_7 = \cdots = 0$.

5 Über Nullstellen und Vorzeichen der Potenzsummenpolynome im Intervall $[0,1]$

Einige Nullstellen der Potenzsummenpolynome sind offensichtlich: Das Polynom P_1 hat eine Nullstelle in 0; die Polynome $P_2, P_3, P_4, \ldots$ haben Nullstellen in 0 und in 1; die Polynome $P_3, P_5, P_7, \ldots$ haben eine Nullstelle in $\frac{1}{2}$. Wir bezeichnen diese Nullstellen als die *trivialen Nullstellen* der Potenzsummenpolynome.

Wir überlegen, ob die Potenzsummenpolynome im Intervall $[0,1]$ weitere Nullstellen besitzen. Dazu untersuchen wir diese Polynome auf Vorzeichen- und Wachstumseigenschaften in diesem Intervall. Wir bemerken, daß das Vorzeichen der Potenzsummenpolynome im Intervall $[0,1]$ noch aus einem weiteren Grunde interessant ist. Wir schließen aus diesem Vorzeichen auf die Mittelwerte der Potenzsummenpolynome in diesem Intervall. Diese Mittelwerte spielen aber in unserer Rekursionsformel eine wichtige Rolle.

Lemma 1 *Die Polynome* $P_3, P_7, P_{11}, \ldots$ *sind positiv auf* $]0, \frac{1}{2}[$ *und negativ auf* $]\frac{1}{2}, 1[$. *Die Polynome* $P_5, P_9, P_{13}, \ldots$ *sind negativ auf* $]0, \frac{1}{2}[$ *und positiv auf* $]\frac{1}{2}, 1[$.

Beweis. Wir beweisen die Behauptung durch vollständige Induktion. Die Vorzeichenaussagen für P_3 weist man durch eine einfache Rechnung nach.

Sei $n \in \mathbb{N}$ *ungerade* mit $n \geq 3$. Aus der Rekursionsformel und weil P_n ungerade bezüglich $\frac{1}{2}$ ist, ergibt sich:

$$P''_{n+2}(x) = (n+1)nP_n(x).$$

Sei o. B. d. A. P_n positiv auf $]0, \frac{1}{2}[$. Dann ist P_{n+2} auf $[0, \frac{1}{2}]$ konvex nach oben. Da außerdem P_{n+2} in 0 und in $\frac{1}{2}$ Nullstellen besitzt, muß P_{n+2} auf $]0, \frac{1}{2}[$ negativ sein. Aus Symmetriegründen ist dann P_{n+2} positiv auf $]\frac{1}{2}, 1[$.

Lemma 2 *Die Polynome $P_2, P_6, P_{10}, \ldots$ sind streng monoton fallend auf $[0, \frac{1}{2}]$ und streng monoton wachsend auf $[\frac{1}{2}, 1]$. Die Polynome $P_4, P_8, P_{12}, \ldots$ sind streng monoton wachsend auf $[0, \frac{1}{2}]$ und streng monoton fallend auf $[\frac{1}{2}, 1]$.*

Beweis. Die Behauptung für P_2 rechnet man einfach nach. Nach der Rekursionsformel und aus Symmetriegründen gilt für alle *geraden* $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 4$:

$$P'_n(x) = (n-1)P_{n-1}(x).$$

Hieraus und aus Lemma 1 folgen die Behauptungen mit Hilfe des Globalen Wachstumssatzes. □

Weil die Polynome $P_2, P_4, P_6, \ldots$ in 0 und in 1 Nullstellen besitzen und wegen der Wachstumsaussagen aus Lemma 2 ergibt sich weiter:

Lemma 3 *Die Polynome $P_2, P_6, P_{10}, \ldots$ sind negativ auf $]0, 1[$. Die Polynome P_4, P_8, P_{12}, ... sind positiv auf $]0, 1[$.*

Mit Hilfe von Lemma 1 und Lemma 3 können wir nun die Frage nach den Nullstellen der Potenzsummenpolynome im Einheitsintervall beantworten:

Satz 3 *Die Potenzsummenpolynome besitzen im Intervall $[0, 1]$ nur die trivialen Nullstellen.*

Wir bemerken, daß sich aus Lemma 3 und Satz 1 wieder in anschaulicher Weise eine Folgerung über die Bernoullischen Zahlen ergibt:

Bemerkung *Die $B_2, B_4, B_6, \ldots$ besitzen alternierende Vorzeichen.*

6 Die Vielfachheiten der trivialen Nullstellen

Mit den trivialen Nullstellen der Potenzsummenpolynome befaßt sich übrigens das Problem 11 aus den Mathematischen Semesterberichten (vgl. die Problemstellung in [10] und die Lösungen in [2;3;4;7;8;9]). Wir bemerken, daß wir mit diesem Aufsatz auch eine weitere und ganz elementare Lösung dieses Problems geben.

Satz 4 *Die Polynome $P_3, P_5, P_7, \ldots$ besitzen in 0, $\frac{1}{2}$ und in 1 Nullstellen der Vielfachheit 1.*

Beweis. Sei $n \in \mathbb{N}$ ungerade mit $n \geq 3$. Nach der Rekursionsformel und wegen $P_n(1) = 0$ gilt:

$$P_n'(1) = -(n-1) \int_0^1 P_{n-1}(x)\, dx.$$

Nach Lemma 3 ist der Mittelwert von P_{n-1} auf $[0,1]$ nicht gleich 0 und daher ist $P_n'(1) \neq 0$. Daher ist 1 Nullstelle der Vielfachheit 1 von P_n. Aus Symmetriegründen ist auch 0 Nullstelle der Vielfachheit 1 von P_n.

Nach der Rekursionsformel gilt ferner:

$$P_n'(\tfrac{1}{2}) = (n-1)\left(P_{n-1}(\tfrac{1}{2}) - \int_0^1 P_{n-1}(x)\, dx\right).$$

Nach Lemma 2 kann der Mittelwert von P_{n-1} auf $[0,1]$ nicht gleich dem Extremalwert $P_{n-1}(\frac{1}{2})$ sein. Daher ist $P_{n-1}'(\frac{1}{2}) \neq 0$ und somit auch $\frac{1}{2}$ Nullstelle der Vielfachheit 1 von P_n.

Satz 5 *Das Polynom P_2 besitzt in* 0 *und in* 1 *Nullstellen der Vielfachheit* 1. *Die Polynome $P_4, P_6, P_8, \ldots$ besitzen in* 0 *und in* 1 *Nullstellen der Vielfachheit* 2.

Beweis. Die Behauptung für P_2 beweist man durch einfache Rechnungen. Aus der Rekursionsformel und aus Symmetriegründen ergibt sich für alle *geraden* $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 4$:

$$P_n'(x) = (n-1)P_{n-1}(x).$$

Hieraus und aus Satz 4 ergeben sich die behaupteten Vielfachheiten der Nullstellen 0 und 1 von P_n.

7 Bemerkung zu den nicht-trivialen Nullstellen

Im allgemeinen besitzen die Potenzsummenpolynome außerhalb des Einheitsintervalles weitere Nullstellen. Z. B. gilt:

$$P_5(x) = \frac{1}{5}x(x-\frac{1}{2})(x-1)\left(x-\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{7}{12}}\right)\left(x-\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{7}{12}}\right),$$

$$P_6(x) = \frac{1}{6}x^2(x-1)^2\left(x-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Den Funktionsterm von P_7 in Faktoren zu zerlegen, ist schon etwas aufwendiger. Wir berücksichtigen, daß P_7 ungerade ist bezüglich $\frac{1}{2}$ und verwenden ein Computer-Algebra-System. Wir erhalten:

$$P_7(\tfrac{1}{2}+x) = \tfrac{1}{7}x(x-\tfrac{1}{2})(x+\tfrac{1}{2})((x^2-\tfrac{3}{4})^2+\tfrac{1}{12}).$$

Hieraus folgt sofort, daß P_7 außer den trivialen Nullstellen keine weiteren reellen Nullstellen besitzt. Mit einer einfachen Überlegung können wir zeigen, daß dies auch für viele weitere Potenzsummenpolynome gilt:

Satz 6 *Die Polynome $P_4, P_8, P_{12}, \ldots$ besitzen nur die trivialen reellen Nullstellen.*

Beweis. Aus der Definition der Potenzsummenpolynome folgt für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ und für alle $x \in \mathbb{N}$:

$$P_n(x+1) = P_n(x) + x^{n-1}.$$

Nach dem Identitätssatz für Polynome ist diese Beziehung sogar für alle $x \in \mathbb{R}$ erfüllt. Sei nun n eine durch 4 teilbare natürliche Zahl. Dann besitzt P_n nach Lemma 3 auf $]0, 1[$ nur positive Werte. Hieraus und aus der obigen Beziehung schließt man weiter, daß P_n auch rechts von 1 nur positive Werte hat. Aus Symmetriegründen besitzt P_n dann auch links von 0 nur positive Werte.

Literatur

[1] J. Bernoulli: Ars conjectandi, Basel 1713.

[2] H. Braß: Lösung von Problem 11. Math. Semesterber. 41 (1994).

[3] G. Götsch: Lösung von Problem 11. Math. Semesterber. 31 (1984).

[4] W. Herget: Weitere Lösungen von Problem 11. Math. Semesterber. 31 (1984).

[5] H. Heuser: Lehrbuch der Analysis, Teil 1. Stuttgart: Teubner 1980.

[6] N. Kimura und H. Siebert: Über die rationalen Nullstellen der von den Potenzsummen der natürlichen Zahlen definierten Polynome. Proc. Japan Acad. Sci. 56 (1980).

[7] H. Länger: Teillösung zu Problem 11. Math. Semesterber. 41 (1994).

[8] P. Moore: Lösung von Problem 11. Math. Semesterber. 41 (1994).

[9] H. J. Seiffert: Lösung von Problem 11. Math. Semesterber. 41 (1994).

[10] U. Warnecke: Problem 11. Math. Semesterber. 30 (1983).

Dietmar Treiber
Libellenpfad 5
D-40764 Langenfeld