Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 56 (2001)

Artikel: Rationale duale Billards
Autor: Blatter, Christian
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-6681

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 13.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Elem. Math. 56 (2001) 147 – 156
0013-6018/01/040147-10 $ 1.50+0.20/0

© Birkhäuser Verlag, Basel, 2001

Elemente der Mathematik

Rationale duale Billards*

Zur Erinnerung an Jürgen Moser

Christian Blatter

Christian Blatter, geboren 1935, hat an der Universität Basel studiert. 1962–64 war er Visiting Assistant Professor an der Stanford University. Anschliessend wurde er an die ETH Zürich gewählt und wirkte dort bis zu seiner Emeritierung im Herbst 2000.

1 Ein beliebtes Paradigma in der Theorie der dynamischen Systeme ist das Billard. In der Regel geht es um einen kompakten konvexen Bereich B der euklidischen Ebene E^2. Ein Massenpunkt bewegt sich reibungslos auf Sehnen von B, und am Rand wird er jeweils gemäss dem Reflexionsgesetz umgelenkt (Fig. 1, links). Gefragt wird zum Beispiel nach periodischen Bahnen, nach „ergodischem" Verhalten oder nach Enveloppen der möglichen Trajektorien. Wird vom tatsächlichen zeitlichen Ablauf abstrahiert, so erscheint ein derartiges Billard als ein dynamisches System mit diskreter Zeit und einem zweidimensionalen Phasenraum: Zu jeder gerichteten Sehne σ von B gehört eine ganz bestimmte nächste Sehne $T\sigma$, und die Gesamtheit X aller Sehnen ist zweidimensional. – Für äusserst lesbare Einführungen in das Gebiet der Billards sei auf [1] und [5] verwiesen.

Beim *dualen Billard* ist ebenfalls ein konvexer Bereich $B \subset E^2$ gegeben. Der Phasenraum X (= Menge der möglichen Zustände) ist hier das Äussere $E^2 \setminus B$, und das Bewegungs-

Wie das gewöhnliche Billard ist das sogenannte *duale Billard* durch einen gewissen iterativen Spiegelungsprozess erklärt. Der Spieltisch ist hier nicht das Innere, sondern das Äussere eines konvexen Bereiches B in der Ebene. Man wird danach fragen, unter welchen Bedingungen an den Rand ∂B die entstehenden Bahnen beschränkt oder sogar geschlossen sind. Die vorliegende Arbeit berichtet über den Fall, wo der Bereich B ein Polygon mit rationalen Eckpunktskoordinaten ist. Hier lassen sich die Bahnen mit ganzzahliger Arithmetik ohne Rundungsfehler über Tausende von Reflexionen auf dem Computer verfolgen. Anderseits, und das ist der Hauptinhalt dieser Arbeit, lässt sich mit elementaren Mitteln (d.h. ohne die sogenannte KAM-Theorie) beweisen, dass alle Bahnen geschlossen sind.

* Überarbeitete Fassung eines Vortrags, gehalten an der Jahresversammlung der SMG vom 15. Oktober 1999

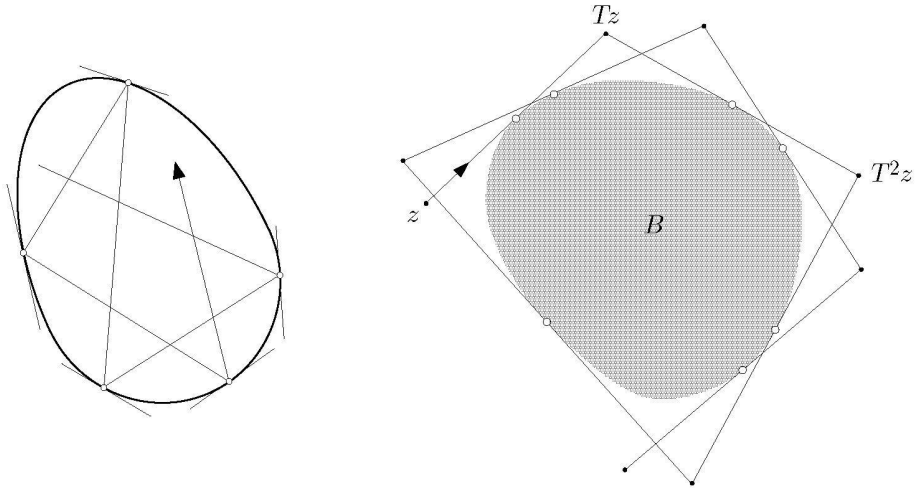

Fig. 1

gesetz $T\colon X \to X$ lautet wie folgt: Man erhält den auf $z \in X$ folgenden Bahnpunkt Tz, indem man von z aus „im Uhrzeigersinn" die Tangente an B legt und dann z am Berührungspunkt spiegelt (Fig. 1, rechts). Ist der Rand ∂B durchwegs positiv gekrümmt, so ist damit T (und auch T^{-1}) für alle $z \in X$ wohldefiniert, und jeder Punkt $z \in X$ besitzt eine wohlbestimmte *Bahn* $\{T^k z \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

Der Name „duales Billard" für ein derartiges System kommt nicht von ungefähr. Um das einzusehen, denke man sich die Reflexionsfigur des gewöhnlichen Billards auf eine sehr grosse Sphäre gezeichnet (Fig. 2, links). Wird diese Figur mit Hilfe der Beziehung „Punkt $P \leftrightarrow$ Äquator zum Pol P" dualisiert, so gehen Kurvenpunkte in Tangenten, Winkel zwischen Geraden in Bogenlängen, usw., über, und es resultiert die Reflexionsfigur des dualen Billards (Fig. 2, rechts).

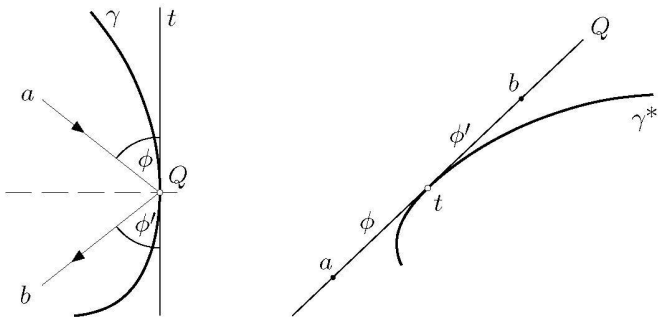

Fig. 2

Das schönste und tiefstliegende Resultat über duale Billards stammt von Moser. Im Rahmen der heute so genannten KAM-Theorie hat er 1973 das folgende bewiesen [3]:

Satz 1 *Besitzt B eine C^7-Randkurve durchwegs positiver Krümmung, so sind alle Bahnen beschränkt.*

Einer weiteren Öffentlichkeit sind die dualen Billards bekanntgeworden durch Mosers Wolfgang-Pauli-Vorlesungen an der ETH Zürich (1975), deren einführende erste in [4] abgedruckt ist.

Der vorliegende Bericht handelt von dem Fall, wo B ein rationales (s.u.) konvexes Polygon ist. Hier lässt sich mit elementargeometrischen Argumenten zeigen, dass alle Bahnen periodisch sind. Dies haben als erste Vivaldi/Shaidenko [6] zu beweisen versucht. Ihr Argument enthielt allerdings eine entscheidende Lücke, so dass sich Gutkin/Simanyi [2] veranlasst sahen, die Sache noch einmal von vorne zu beginnen. Unsere Darstellung folgt im wesentlichen der Arbeit [2]; eine Kurzversion des Beweises findet sich auch in [5].

2 Eine Vorbemerkung: Ist B ein polygonaler Bereich, so ist Tz zunächst nicht definiert, wenn z auf der rückwärtigen Verlängerung einer Polygonseite liegt, und es gelingt auch nicht, T stetig auf das ganze Äussere von B fortzusetzen (Fig. 3, rechts). Wir entscheiden uns, Bahnen mit derartigen Unbestimmtheiten von der Betrachtung auszunehmen. (Das analoge Phänomen tritt auch beim gewöhnlichen Billard auf. Hier müssen Bahnen, die eine Ecke von B treffen, ausgenommen werden; siehe die Figur 3, links.)

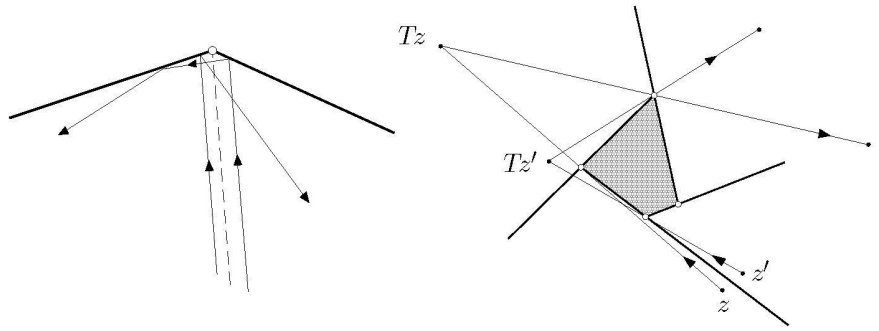

Fig. 3

Es sei also $P \subset E^2$ ein konvexes Polygon mit aufeinanderfolgenden Ecken z_i $(1 \leq i \leq n)$ und Seiten $[z_i, z_{i+1}]$ auf Geraden g_i (Fig. 4). Weiter bezeichne $\sigma_i \colon E^2 \to E^2$ die Punktspiegelung am Eckpunkt z_i. Diese n Spiegelungen erzeugen zusammen eine Gruppe G. Das allgemeine Element $\sigma := \sigma_{i_N} \circ \ldots \circ \sigma_{i_2} \circ \sigma_{i_1}$ dieser Gruppe ist eine Punktspiegelung oder eine Translation, je nachdem, ob N ungerade oder gerade ist. Alle Punkte $z \in E^2 \setminus P$, deren Bahn im früheren oder späteren Verlauf unbestimmt ist, liegen auf der Vereinigung aller Bilder der g_i:

$$S := \bigcup_{1 \leq i \leq n,\ \sigma \in G} \sigma(g_i) \ .$$

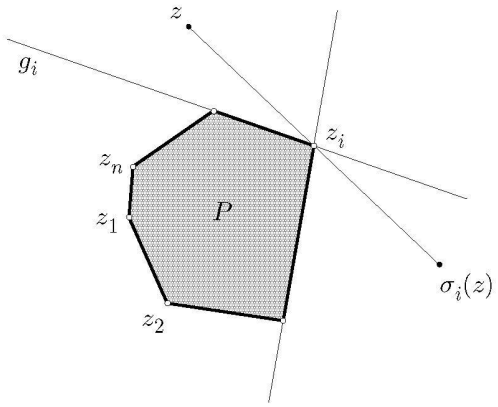

Fig. 4

Diese *singuläre Menge* S ist jedenfalls eine Nullmenge. Im weiteren betrachten wir nun die Menge

$$X := E^2 \setminus (P \cup S)$$

als unseren Phasenraum; damit sind T und T^{-1} auf X wohldefiniert.

3 Nun kommt die entscheidende Voraussetzung: Wir nehmen im weiteren an, dass P ein *rationales Polygon* ist, d.h., dass die Ecken z_i von P auf einem Gitter, zum Beispiel auf dem Gitter $\mathbb{Z}^2 \subset E^2$, liegen. Damit wird die geometrische Situation gewaltig vereinfacht: Die singuläre Menge S besteht aus $\leq n$ diskreten Familien von äquidistanten Geraden, und der Phasenraum X zerfällt in disjunkte offene konvexe Schnipsel Q_ℓ (Fig. 5). Alle Punkte desselben Schnipsels Q_ℓ haben unter T dieselbe Geschichte, da sie nie voneinander getrennt werden. In Wirklichkeit stimmt das allerdings nicht ganz: Wir müssen damit rechnen, dass (zentral)symmetrische Schnipsel Q_ℓ auftreten. Ein symmetrisches Q_ℓ könnte durch ein T^N, N *ungerade*, in sich übergeführt werden. Damit hätte sich dann die Bahn des Zentrums von Q_ℓ geschlossen; alle andern Punkte dieses Q_ℓ werden aber erst nach $2N$ Schritten in sich übergeführt. Wir sehen daher für jedes ℓ ein Q_ℓ^+ und ein Q_ℓ^- vor. Einmalige Anwendung von T macht aus einem Plus-Schnipsel ein Minus-Schnipsel, und umgekehrt.

Auf Grund dieser Vereinbarungen haben wir nun ein *diskretes dynamisches System* vor uns: Es gibt die Schnipselmenge

$$M := \bigcup_\ell \{Q_\ell^+, Q_\ell^-\},$$

und die von T induzierte Operation $\hat{T}\colon M \to M$ permutiert diese abzählbare Menge. Über den Zusammenhang zwischen T und $\hat{T}$ lässt sich noch folgendes sagen: Periodische Bahnen von $\hat{T}$ bestehen aus einer geraden Anzahl von kongruenten Schnipseln. Der Sachverhalt $\hat{T}^m(Q) = Q$, $Q \in M$, ist dabei äquivalent mit $T^m|_Q = \mathrm{id}_Q$. Keine Bahn von T trifft dasselbe Schnipsel in mehr als einem Punkt.

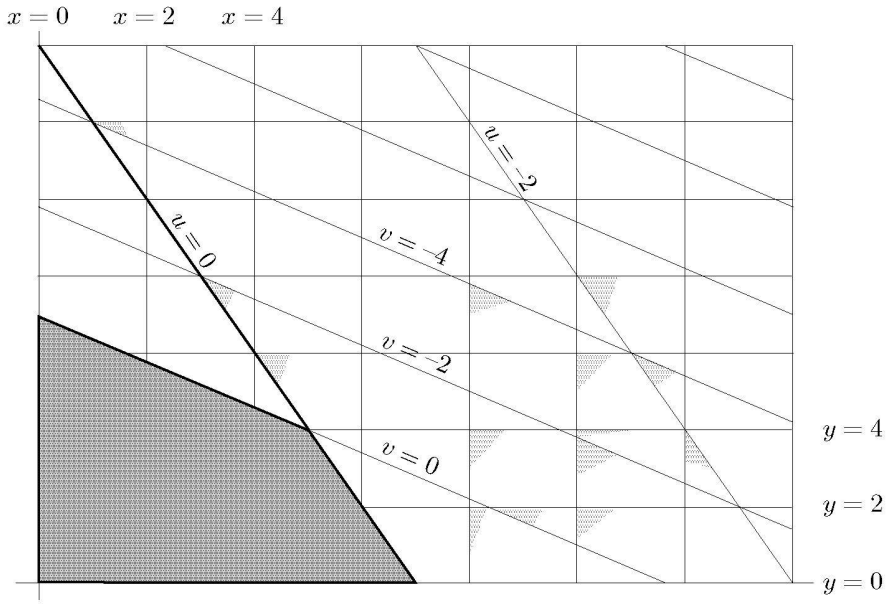

Fig. 5

In Fig. 5 ist ein Beispiel mit $n = 4$ dargestellt. Da es auf eine affine Streckung nicht ankommt, können wir es so einrichten, dass jedes Q_ℓ^+ eine wohlbestimmte linke obere Ecke besitzt, in der zwei der Variablen x, y, u, v geradzahlig und die beiden andern ebenfalls ganzzahlig sind. Damit lässt sich die Bahnberechnung in ganzzahliger Arithmetik bewerkstelligen, und es kommt nicht zu Rundungsfehlern. Numerische Experimente zeigen nämlich, dass auch bei „arithmetisch einfachen" Vierecken P Bahnen mit fünfstelligen Periodenlängen auftreten können (Fig. 6). Alle diese Experimente bestätigen den oben angekündigten Sachverhalt:

Satz 2 *Ist P ein rationales konvexes Polygon, so sind alle Bahnen des zugehörigen dualen Billards periodisch.*

4 Dieser Satz soll in den folgenden Abschnitten bewiesen werden. Hierzu ändern wir die Betrachtungsweise (Fig. 7, links): Wir halten den bisher wandernden Punkt in O fest und spiegeln stattdessen wiederholt das Polygon P. Die aufeinanderfolgenden Kopien des Ausgangspolygons bilden dann eine *Halskette* (Fig. 7, rechts), und die untersuchte Bahn $\{T^k z \mid k \in \mathbb{Z}\}$ ist genau dann periodisch, d.h. geschlossen, wenn die zugehörige Halskette geschlossen ist.

Das dynamische System $T\colon X \to X$ wird also ersetzt durch ein äquivalentes System $W\colon \mathcal{P} \to \mathcal{P}$; dabei bezeichnet $\mathcal{P} = \mathcal{P}^+ \cup \mathcal{P}^-$ eine gewisse Menge von zum Ausgangspolygon translationskongruenten bzw. gespiegelten Polygonen. Jedes Polygon $P \in \mathcal{P}$ hat einen wohlbestimmten *Kopf* $h(P)$; dies ist die Ecke, an der das Polygon im nächsten Schritt gespiegelt wird. Wenn wir der Einfachheit halber voraussetzen, dass keine zwei

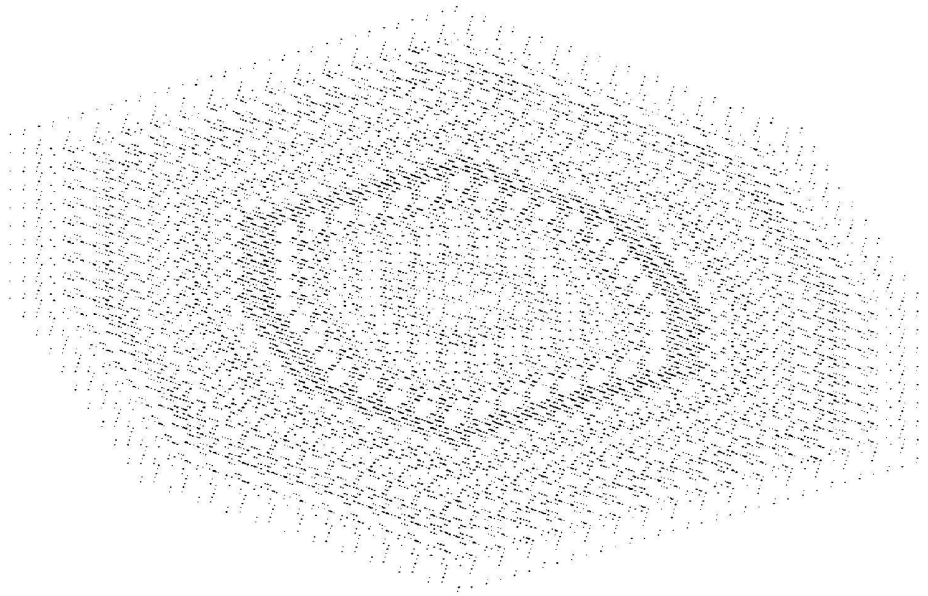

Fig. 6

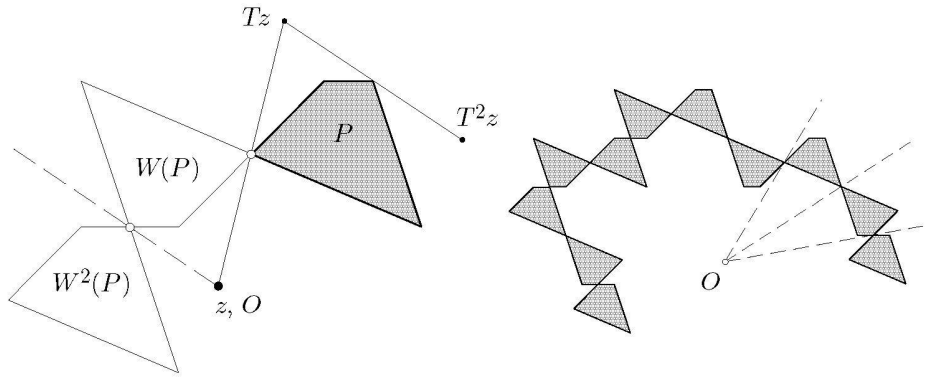

Fig. 7

Seiten von P parallel sind, können wir darüber folgendes sagen (Fig. 8): Die n zu den g_i parallelen Geraden durch O bilden $2n$ Strahlen, die $2n$ Kegel K_i begrenzen. Zu jedem Kegel K_i gehört ein bestimmter *Kopf-Verschiebungsvektor* $\vec{a}_i$. Damit ist folgendes gemeint: Liegen $h(P)$ und $h\big(W(P)\big)$ beide in K_i, so gilt $h\big(W(P)\big) = h(P) + \vec{a}_i$. Der Vektor $\vec{a}_i$ ist eine gewisse Diagonale oder Seite von P, und es gilt $\vec{a}_{n+i} = -\vec{a}_i$.

Wir wählen nun auf s_1 einen Punkt A_1 und dann nacheinander $A_{i+1} \in s_{i+1}$ $(1 \leq i \leq 2n)$, so dass für alle $i \geq 1$ gilt: $A_iA_{i+1} = t_i\,\vec{a}_i,\ t_i > 0$. Die Punkte $B_i \in s_i$ und $C_i \in s_{i+1}$ sind

definiert durch $B_iC_i = \vec{a}_i$. Der Fig. 8 entnimmt man

$$|OB_i|\, d_i = |OC_i|\, d_{i+1} \qquad (i \geq 1)\,,$$

wobei d_i den Abstand der beiden Stützgeraden von P parallel zu s_i bezeichnet. Aus Ähnlichkeitsgründen folgt hieraus $|OA_i|d_i = |OA_{i+1}|d_{i+1}$ und damit weiter

$$|OA_1|\, d_1 = |OA_2|\, d_2 = \ldots = |OA_{2n+1}|\, d_{2n+1} = |OA_{2n+1}|\, d_1\ .$$

Dies beweist $A_{2n+1} = A_1$, in Worten: Wir erhalten ein geschlossenes (und bezüglich O symmetrisches) Polygon $[A_1A_2 \ldots A_{2n}]$, das sogenannte *Halsketten-Polygon* zu dem betrachteten Ausgangspolygon P. Da P ein rationales Polygon ist, stehen auch die vorgefundenen $t_i > 0$ in rationalen Verhältnissen zueinander. Bei geeigneter Wahl von $A_1 \in s_1$ dürfen wir daher annehmen, dass alle t_i *ganzzahlig* sind.

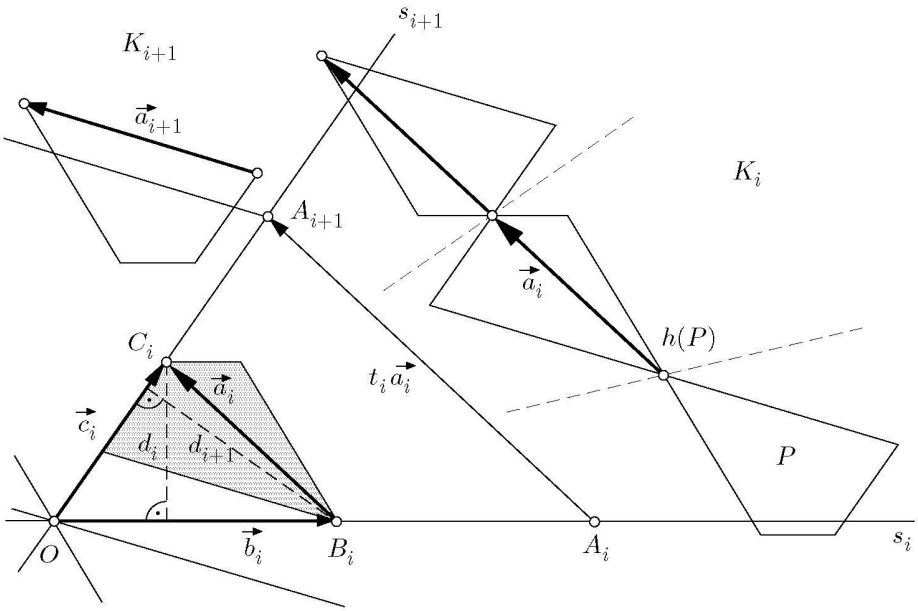

Fig. 8

5 Im folgenden durchläuft ε die Menge $\{+, -\}$.

Mit $\mathcal{P}_i^\varepsilon$ bezeichnen wir die Menge aller $P \in \mathcal{P}^\varepsilon$, die den Strahl s_i schneiden. Alle $P \in \mathcal{P}_i^\varepsilon$, die den nächsten Strahl s_{i+1} *nicht* schneiden, besitzen dieselbe Ecke als Kopf, in anderen Worten: Sind P und $P' := P + \vec{c}$ zwei derartige Polygone, so gilt $h(P') = h(P) + \vec{c}$. Wir bezeichnen diese Eckenzuweisung mit h_i. Sie ist auch auf Polygone $P \in \mathcal{P}_i^\varepsilon$ anwendbar, die s_{i+1} schneiden; für derartige Polygone ist allerdings $h_i(P) \neq h(P)$. Wir nennen daher $h_i(P)$ den *formalen Kopf* von $P \in \mathcal{P}_i^\varepsilon$.

Die Menge $S_i^\varepsilon := \{h_i(P) \mid P \in \mathcal{P}_i^\varepsilon\}$ dieser formalen Köpfe ist ein „gestutzter Streifen" (Fig. 9). Ist $z \in S_i^\varepsilon$, so ist $z = h_i(P)$ für ein gewisses $P \in \mathcal{P}_i^\varepsilon$. Nach $k \geq 0$ Spiegelungen schneidet $P' := W^k(P)$ zum ersten Mal s_{i+1}. Mit $\varepsilon' := (-1)^k\varepsilon$ ist dann $P' \in \mathcal{P}_{i+1}^{\varepsilon'}$ und folglich $z' := h_{i+1}(P') \in S_{i+1}^{\varepsilon'}$. Wir schreiben $S_i^+ \cup S_i^- =: S_i$ und haben damit die *Streifenabbildung*

$$f_i: \quad S_i \to S_{i+1}\,, \qquad z \mapsto z'$$

erklärt.

Die Strahlen $s_{i+1} - k\,\vec{a}_i$ $(k \in \mathbb{N}_{>0})$ zerlegen S_i^ε in Parallelogramme $\pi_1^\varepsilon, \pi_2^\varepsilon, \ldots$ und ein Anfangsstück π_0^ε. Der Figur 9 entnimmt man, dass f_i der Identität

$$f_i(z + 2\vec{b}_i) \equiv f_i(z) + 2\vec{c}_i \qquad (z \in S_i)$$

genügt, und hieraus folgt

$$f_i(z + 2t_i\,\vec{b}_i) \equiv f_i(z) + 2t_i\,\vec{c}_i \tag{1}$$

für beliebige $t_i \in \mathbb{N}_{>0}$. Für die im vorangehenden Abschnitt eingeführten t_i gilt

$$t_i\,\vec{c}_i = OA_{i+1} = t_{i+1}\,\vec{b}_{i+1}\ .$$

Damit geht (1) über in

$$f_i(z + 2t_i\,\vec{b}_i) \equiv f_i(z) + 2t_{i+1}\,\vec{b}_{i+1}\,,$$

und hieraus folgt weiter

$$f_2\big(f_1(z + 2t_1\,\vec{b}_1)\big) = f_2\big(f_1(z) + 2t_1\,\vec{b}_1\big) \equiv f_2\big(f_1(z)\big) + 2t_2\,\vec{b}_2\ .$$

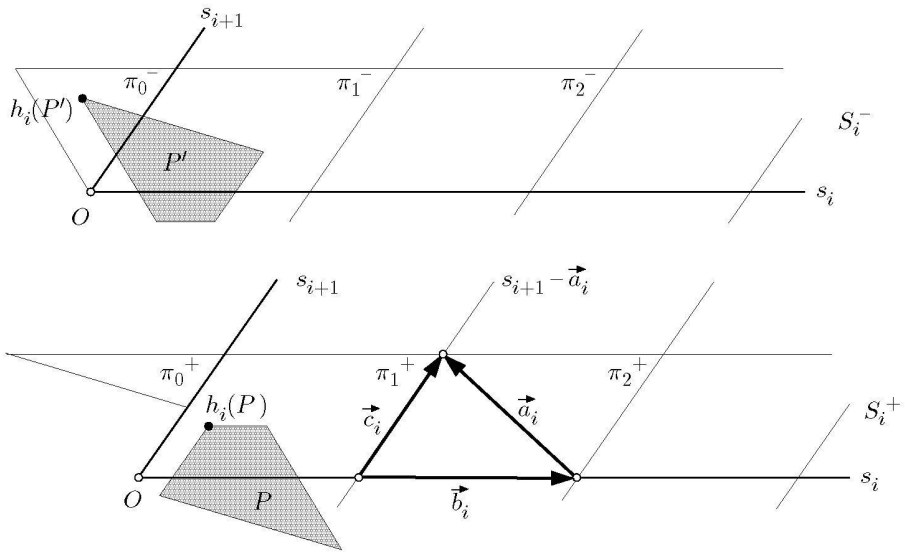

Fig. 9

Dieser Vorgang lässt sich iterieren, und nach $2n$ Schritten ergibt sich der folgende Tatbestand: Die *Umlaufsabbildung*

$$F := f_{2n} \circ \ldots \circ f_2 \circ f_1 : \quad S_1 \to S_1$$

genügt der Identität $F(z + 2t_1 \vec{b}_1) \equiv F(z) + 2t_{2n+1} \vec{b}_{2n+1} \equiv F(z) + 2t_1 \vec{b}_1$ und ist damit vollständig bestimmt durch ihre Werte auf der Menge $\pi_* := \bigcup_{1 \le k \le 2t_1} (\pi_k^+ \cup \pi_k^-)$. Natürlich ist F invertierbar.

6 Wir setzen $2t_1 \vec{b}_1 =: \vec{b}_*$. Dann gilt für alle $z \in S_1$ und alle $m \in \mathbb{Z}$ die Identität

$$F^m(z + \vec{b}_*) \equiv F^m(z) + \vec{b}_* \ . \tag{2}$$

In der Folge können wir die Iterierten der Umlaufsabbildung wie folgt darstellen:

$$F^m(z) = \Phi^m(z) + \tau_m(z)\, \vec{b}_* \qquad (z \in \pi_*) \ ; \tag{3}$$

dabei ist Φ eine Abbildung $\pi_* \to \pi_*$ und $\tau_m(z) \in \mathbb{Z}$. Da links von π_* nur noch das Anfangsstück π_0 liegt, muss $\tau_m(z) \ge -1$ sein für alle $m \in \mathbb{Z}$ und alle $z \in \pi_*$. Wie leicht einzusehen, gilt $\tau_m(z) \equiv -\tau_{-m}(\Phi^m(z))$, und hieraus zieht man den Schluss, dass die Zahlen $\tau_m(z)$ beschränkt sind:

$$|\tau_m(z)| \le 1 \qquad (z \in \pi_* \,,\ m \in \mathbb{Z}) \ .$$

Mit (3) ergibt sich nun, dass die Menge $\{F^m(z) \mid m \in \mathbb{Z}\}$ für jedes $z \in \pi_*$ beschränkt ist, und mit (2) folgt dasselbe für alle $z \in S_1$.

Es sei nun ein beliebiges Ausgangspolygon $P_0 \in \mathcal{P}$ gegeben und $\mathcal{K} := \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} W^k(P_0)$ die zugehörige Halskette. Nach dem eben Bewiesenen schneidet $\mathcal{K}$ jeden der $2n$ Strahlen s_i in einer beschränkten Menge und verläuft zwischen zwei aufeinanderfolgenden s_i „geradlinig". Folglich ist $\mathcal{K}$ beschränkt. Auf das ursprüngliche Billardmodell $T : X \to X$ bezogen heisst das: Sämtliche Bahnen $\{T^k z \mid k \in \mathbb{Z}\}$, $z \in X$, sind beschränkt. Nach dem in Abschnitt 3 über die Zerlegung von X in Schnipsel Gesagten sind sie daher geschlossen.

7 Für die Beschränktheit der Halskette $\mathcal{K}$ wurde eigentlich nur benutzt, dass die t_i ganzzahlig sind bzw. in rationalen Verhältnissen zueinander stehen. Gutkin/Simanyi nennen ein Ausgangspolygon P mit dieser Eigenschaft *quasirational*. Reguläre n-Ecke sind quasirational (alle t_i haben denselben Wert), aber für $n \ge 5$ nicht mehr rational. Letzten Endes haben wir den folgenden Satz bewiesen:

Satz 3 *Ist P ein quasirationales konvexes Polygon, so sind alle Bahnen des zugehörigen dualen Billards beschränkt.*

Literatur

[1] M. Berger: La mathématique du billard. Pour la Science 163, Mai 1991, 76–85.

[2] E. Gutkin & N. Simanyi: Dual polygonal billiards and necklace dynamics. Commun. Math. Phys. 143 (1992), 431–449.

[3] J. Moser: Stable and random motions in dynamical systems. Ann. Math. Stud., vol. 77, Princeton 1973.

[4] J. Moser: Is the solar system stable? Math. Intelligencer 1 (1978), 65–71.

[5] S. Tabachnikov: Billiards. Panoramas et Synthèses 1, Société Mathématique de France 1995.

[6] F. Vivaldi & A.V. Shaidenko: Global stability of a class of discontinuous billiards. Commun. Math. Phys. 110 (1987), 625–640.

Christian Blatter
Albertus-Walder-Weg 16
CH-8606 Greifensee, Schweiz
e-mail: christian.blatter@math.ethz.ch

To access this journal online:
http://www.birkhauser.ch