Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 56 (2001)

Artikel: Albert Einstein: Maturitätsprüfung in Mathematik 1896
Autor: Hunziker, Herbert
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-6670

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 02.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Elem. Math. 56 (2001) 45 – 54
0013-6018/01/020045-10 $ 1.50+0.20/0

© Birkhäuser Verlag, Basel, 2001

Elemente der Mathematik

Albert Einstein
Maturitätsprüfung in Mathematik 1896

Herbert Hunziker

Herbert Hunziker, geboren 1953, ist im oberen Teil des Ruedertals, Kanton Aargau, aufgewachsen. Dort besuchte er den Grundschulunterricht im durch Hermann Burgers Roman *Schilten* zu literarischem Ruhm gelangten Schulhaus Schiltwald. Nach einer Lehre als Chemielaborant erwarb H. Hunziker den Eidgenössischen Maturitätsausweis auf dem zweiten Bildungsweg. Er studierte anschliessend Mathematik an der Universität Zürich, wo er bei Hans Jarchow auf dem Gebiet der Funktionalanalysis promovierte. Nach seinem Studium arbeitete er während einiger Zeit in der Wirtschaft und unterrichtet nun seit bald zehn Jahren Mathematik an der Alten Kantonsschule Aarau. In seiner Freizeit beschäftigt er sich mit bildungspolitischen Fragen und erholt sich bei ausgedehnten Wanderungen.

1 Albert Einstein an der Aargauischen Kantonsschule

1.1 Austritt aus dem Luitpold-Gymnasium

Die *Electrotechnische Fabrik J. Einstein & Cie.* beschäftigte in ihrer Blütezeit knapp zweihundert Mitarbeiter. Während Albert Einsteins Vater Hermann mit der kaufmännischen Leitung der Firma betraut war, gingen die technischen Innovationen vom ideenreichen Ingenieur Jakob Einstein, einem jüngeren Bruder Hermann Einsteins, aus. Trotz

Der Name Einstein ist uns allen bekannt; mit ihm verbinden wir die weltberühmte Formel $E = mc^2$. Nach dem Studium an der Eidgenössischen Technischen Hochschule (ETH) in Zürich arbeitete Albert Einstein als technischer Experte am Patentamt in Bern. In dieser Zeit verfasste er die bedeutenden Arbeiten zur Theorie der Brownschen Bewegung und zur Speziellen Relativitätstheorie. Dies führte zu Berufungen an die Universitäten Zürich und Prag und an die ETH. Im Jahr 1913 wurde er zum hauptamtlichen Mitglied der Preussischen Akademie der Wissenschaften und Direktor des Kaiser-Wilhelms-Instituts für Physik in Berlin ernannt. Kurz danach veröffentlichte er seine Allgemeine Relativitätstheorie. Im Jahr 1921 erhielt er für seine bahnbrechenden Arbeiten den Nobelpreis für Physik. Nach der Machtergreifung durch die Nationalsozialisten emigrierte er 1933 nach Princeton (New Jersey), wo er 1955 starb.

Im nachfolgenden Beitrag erhalten wir Einblick in Einsteins Maturitätsprüfung im Fach Mathematik an der Aargauischen Kantonsschule. *jk*

intensivem Einsatz endete das Bemühen um den Grossauftrag zur Elektrifizierung der Beleuchtung der Münchner Innenstadt für die Gebrüder Einstein mit einer Enttäuschung. Der Auftrag wurde im April 1894 an einen Konkurrenten erteilt. Die Ertragslage der Firma verschlechterte sich dadurch derart, dass die Firma liquidiert werden musste. Zusammen mit einem italienischen Geschäftspartner wagten die Gebrüder Einstein in Pavia einen Neuanfang. Der fünfzehnjährige Albert sollte den Umzug nach Italien nicht mitmachen, er sollte in München zurückbleiben und seine Schulzeit am Luitpold-Gymnasium beenden. Wie seine Schwester Maja in *Albert Einstein – Beitrag für sein Lebensbild* [3] schreibt, war der Zurückgelassene unzufrieden mit seiner Situation.

> *In Wirklichkeit fühlte er sich an der Schule sehr unbehaglich. Die Art des Unterrichts in den meisten Fächern war ihm zuwider, u. ausserdem schien ihm der Klassenlehrer nicht sehr gewogen zu sein. Besonders unangenehm war dem Jungen auch der militärische Ton in der Schule, die systematische Erziehung zur Verehrung der Autoritäten, die bereits Schüler an die militärische Zucht gewöhnen sollte. Mit Grauen gedachte er der nicht mehr allzufernen Zeit, da er den Soldatenrock anzuziehen hatte, um seiner Dienstpflicht zu genügen. Seelisch bedrückt und nervös geworden suchte er nach einem Ausweg. Als daher der Ordinarius der Klasse ihn bei irgendeiner Gelegenheit hart anfasste, liess er sich vom Hausarzt ein Zeugnis geben, wies es dem Schuldirektor vor u. reiste kurz entschlossen nach Mailand zu seinen Eltern.*

1.2 Aufnahmeprüfung an das Eidgenössische Polytechnikum

Während seines Italienaufenthaltes bereitete sich Albert Einstein autodidaktisch auf die jeweils im Herbst stattfindende Aufnahmeprüfung des Polytechnikums vor. Im Alter von sechzehneinhalb Jahren trat er zu diesem Test an und erzielte im mathematisch-naturwissenschaftlichen Bereich sehr gute Resultate, der sprachlich-deskriptive Teil dagegen war mangelhaft. Die Prüfung war nicht bestanden. Albin Herzog, der damalige Rektor des Polytechnikums, riet dem jungen Einstein, ein Schuljahr an der Aargauischen Kantonsschule in Aarau zu absolvieren und durch den Erwerb eines regulären Maturitätsausweises die Berechtigung zum Studium zu erlangen. Albert Einstein befolgte diesen weisen Rat.

1.3 Die glückliche Aarauer Zeit

In *Albert Einstein – Beitrag für sein Lebensbild* [3] entwirft Maja Winteler-Einstein ein überaus positives Bild von der Aarauer Zeit ihres Bruders.

> *Mochte die Münchner Gymnasialzeit auch ein Vorurteil gegen Mittelschulen in ihm zurückgelassen haben, so wurde es durch den Schulbetrieb in Aarau gründlich zerstreut. Da war weder von einem Befehlston noch von der Züchtung der Autoritätsanbetung irgend etwas zu bemerken. Die Schüler wurden individuell behandelt, mehr Gewicht auf selbständiges Denken, denn auf Vielwisserei gelegt, u. die jungen Leute sahen im Lehrer nicht die Autorität, sondern neben dem Mann der Wissenschaft auch den Charakter. So wurde ihm die Zeit in Aarau vielfach aufschlussreich u. zu einer der schönsten im Leben. Seine Allgemeinbildung wurde bereichert u. mit dem Maturitätszeugnis in der Tasche konnte er im Herbst 1896 das Polytechnikum in Zürich beziehen.*

Dem Umstand, dass die Kurse am Eidgenössischen Polytechnikum jeweils im Herbst begannen, trug man an der Aargauischen Kantonsschule dadurch Rechnung, dass man die Ausbildung an der Gewerbeabteilung auf dreieinhalb Jahre verkürzte und den Termin der Abschlussprüfung mit dem Kursbeginn des Polytechnikums koordinierte. Im Frühherbst 1896 bestand Albert Einstein die Maturitätsprüfung an der Gewerbeabteilung der Aargauischen Kantonsschule mit guten bis sehr guten Noten. Albert Einstein war also keineswegs, wie fälschlicherweise immer wieder behauptet, der Schulversager, der später Karriere machte. Albert Einstein war vermutlich ein etwas eigenwilliger, sicher aber ein guter Schüler.

2 Prüfungsarbeit in Geometrie

Die Prüfung fand am 19. September 1896 von 07.00 bis 11.00 Uhr statt. Während die Klassenkameraden die Aufgabenstellungen jeweils im Kopf des Lösungsbogens notierten, beginnen die Arbeiten Einsteins unmittelbar mit den Lösungen. Die Aufgabenformulierungen wurden deshalb den Prüfungsarbeiten der Klassenkameraden entnommen. Das in Sütterlin-Schrift verfasste und damit für Ungeübte schwer lesbare Original der Prüfungsarbeit befindet sich im aargauischen Staatsarchiv [1]. In [3] ist die gesamte Maturitätsprüfung dokumentiert.

2.1 Erste Aufgabe

2.1.1 Aufgabenstellung. In einem Dreieck mit Umkreisradius $r = 10$ verhalten sich die Höhen wie $2 : 3 : 4$. Berechne die Winkel und eine Seite.

2.1.2 Lösung von Albert Einstein. Da sich die Seiten eines Dreiecks umgekehrt verhalten wie die dazugehörigen Höhen, so ist

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{h_a}k = \frac{1}{2}k \\ b &= \frac{1}{h_b}k = \frac{1}{3}k \\ c &= \frac{1}{h_c}k = \frac{1}{4}k\,. \end{aligned}$$

Da es zur Bestimmung der Winkel nur auf das Verhältnis der Seiten ankommt, so greifen wir das praktischste von den ähnlichen Δ mit den Seiten 6, 4 & 3 heraus.

$$\begin{aligned} \cos\alpha &= \frac{-a^2+b^2+c^2}{2bc} = \frac{-36+16+9}{24} \\ \cos\alpha &= -\frac{11}{24} \\ \sin(\alpha-90^\circ) &= 0.4583 \\ \log\sin(\alpha-90^\circ) &= 9,66115-10 \\ \alpha-90^\circ &= 27^\circ\,16'\,22'' \\ \text{[K1]}\quad \alpha &= 117^\circ\,16'\,22'' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\cos\beta &= \frac{a^2-b^2+c^2}{2ac} = \frac{29}{36} = 0,8055\\
\log\ \cos\beta &= 9,9061-10\\
\beta &= 36^\circ\,20'\\
\cos\gamma &= \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} = \frac{43}{48}\\
\log\cos\gamma &= 9,95226-10\\
\gamma &= 26^\circ\,23'
\end{aligned}$$

Berechnung der Seite a: Da α stumpf, so ist

$$\begin{aligned}
a &= 2r\cdot\sin(180^\circ-\alpha)\\
\text{[K2]}\qquad \log a &= \log 20+\log\sin(64^\circ\,43'\,38'')\\
&= 1.30103+9.94884-10\\
&= 1.24987\\
a &= 17,77.
\end{aligned}$$

2.1.3 Kommentare zum Lösungsweg und Beurteilung der Aufgabe.

- **Korrekturen des Examinators**
  - [K1]: Die Zeile
    $$\alpha = 117^\circ\,16'\,22''$$
    wurde von Einsteins Mathematiklehrer, Professor Dr. Heinrich Ganter, hinzugefügt.
  - [K2]: Richtigerweise sollte die Zeile
    $$\log a = \log 20+\log\sin(62^\circ\,43'\,38'')$$
    lauten, offensichtlich handelt es sich hier um ein Verschreiben (64° statt 62°), denn Einstein rechnete korrekt mit $62^\circ\,43'\,38''$ weiter. Der Kommentar des Lehrers lautet deshalb: *Fehler im Abschreiben, Resultat richtig.*
- **Numerische Genauigkeit:** Die numerischen Berechnungen wurden mit Hilfe einer Tafel fünfstelliger Logarithmen vorgenommen. Damit können Winkel im Mittel auf $10''$ genau bestimmt werden. Weil $\sin^{-1}(0,4583) = 27^\circ\,16'\,39''$ gilt, ist die Toleranz bei der Berechnung des Winkels α überschritten. Das Resultat ist in numerischer Hinsicht nicht korrekt.
- **Überprüfung der Resultate:** Der Maturand Einstein berechnete alle drei Winkel mit dem Kosinussatz. Es war ihm daher möglich, die Resultate am Winkelsummensatz zu testen. Der entsprechende Test ist dokumentiert, wegen numerischer Ungenauigkeiten, exakt gilt $\alpha = 117^\circ\,16'\,47''$, $\beta = 36^\circ\,20'\,10''$ und $\gamma = 26^\circ\,23'\,3''$, entstand eine Abweichung von $38''$. Versuche zur Steigerung der numerischen Qualität sind jedoch keine dokumentiert.
- **Beurteilung der Aufgabe:** Das Berechnen von allgemeinen Dreiecken unter Verwendung des Sinus- und Kosinussatzes ist noch immer Bestandteil der gymnasialen

Mathematikausbildung. Allerdings erfolgt die Behandlung dieses Themenkreises in der Regel im ersten Gymnasialjahr. Die vorliegende Maturaufgabe ist deshalb – und auch weil durch die Verwendung des Taschenrechners sämtliche Schwierigkeiten in numerischer Hinsicht wegfallen – nach heutigem Massstab, als zu wenig anforderungsreich zu taxieren. Weil die Aufgabe, abgesehen von numerischen Fehlern, von allen Klassenkameraden Einsteins richtig gelöst wurde, ist anzunehmen, dass die Aufgabe auch für damalige Verhältnisse nur geringe Anforderungen stellte.

2.2 Zweite Aufgabe

2.2.1 Aufgabenstellung. Gegeben ist ein Kreis mit Radius r dessen Mittelpunkt im Ursprung O eines rechtwinkligen Koordinatensystems liegt. Man zeichne senkrecht zur x-Achse Sehnen in diesen Kreis. Die Kreise, für die diese Sehnen Durchmesser sind, berühren die Ellipse mit den Halbachsen $r\sqrt{2}$ und r, und erst wenn der Abstand p ihrer Mittelpunkte von O einen gewissen maximalen Wert überschreitet, hört die Berührung auf. Man beweise diesen Satz und bestimme den Maximalwert von p.

2.2.2 Lösungsweg von Albert Einstein. Nennen wir den Abstand eines solchen Kreises aus dem gegebenen System vom Mittelpunkt p, so ist sein Radius $= \sqrt{r^2 - p^2}$. Seine Gleichung ist:

$$\begin{aligned}(x-p)^2 + y^2 &= r^2 - p^2\\ x^2 - 2px + p^2 + y^2 &= r^2 - p^2\\ x^2 - 2px + y^2 &= r^2 - 2p^2\,.\end{aligned}$$

Wir suchen nun die Gleichung der Umhüllenden, das ist der Schnitt zweier solcher Kreise deren p unendlich wenig voneinander abweicht. Für den Schnittpunkt muss offenbar beim unendlich kleinen Wachstum $d(p)$ das Wachstum von x & y & die Gleichung identisch 0 sein.

Also

$$\begin{aligned}&x^2 - 2px + y^2 - r^2 + 2p^2 && = 0\\ &\underline{x^2 - 2px + y^2 - r^2 + 2p^2 + (-2x + 4p)dp} && = \underline{0}\end{aligned}$$

Subtr.

$$4p - 2x = 0\,.$$

Man setzt diesen Wert nun in obige Gleichung ein.

$$\begin{aligned}x^2 - 2px + y^2 - r^2 + 2p^2 &= 0\\ x^2 - x^2 + y^2 - r^2 + \frac{1}{2}x^2 &= 0\\ \frac{1}{2}x^2 + y^2 &= r^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\text{Für} \quad x = 0 \qquad y = \pm r\\ &\text{Für} \quad y = 0 \qquad x = \pm r\sqrt{2}\,.\end{aligned}$$

Wir haben jetzt noch die Bedingung zu betrachten, unter der ein Kreis aus dem System die Ellipse $\frac{1}{2}x^2 + y^2 = r^2$ berührt.

[Da bei beiden Figuren (Kreis aus dem System & Ellipse) der grösste Wert von x die Ordinate 0 hat (wie der 1. Differenzialquotient zeigt), und der Mittelpunkt sämtlicher Kreise innerhalb der Ellipse liegt, so haben wir nur zu untersuchen, ob für $y = 0$ einer der beiden Punkte des Kreises ausserhalb der Ellipse liegt. Da die ganze zu untersuchende Figur in Bezug auf die y-Achse symmetrisch ist, so brauchen wir nur eine Seite (die positive) zu betrachten.]

Wir müssen die Gleichungen für Ellipse & Kreis direkt miteinander vergleichen & die x & y der beiden identifizieren.

$$\begin{array}{ll} \text{Ellipse} & \frac{1}{2}x^2 + y^2 = r^2 \quad \text{I} \\ \text{Kreis} & x^2 - 2px + y^2 - r^2 + 2p^2 = 0\,. \end{array}$$

[Eliminieren nun y:

$$\frac{1}{2}x^2 - 2px + \cancel{r^2} - \frac{1}{2}\cancel{x^2} - \cancel{r^2} + 2p^2 = 0$$
$$x^2 - 4px + 4p^2 = -4p^2 + 4p^2\,.$$

Der Ausdruck

$$\sqrt{-4p^2 + 4p^2} \quad]$$
$$x = 2p\,.$$

Eingesetzt in I

$$2p^2 + y^2 = r^2$$
$$y = \mp\sqrt{r^2 - 2p^2}\,.$$

Damit die Wurzel reell, muss

$$r^2 > 2p^2$$
$$p\sqrt{2} < r \qquad p < \frac{r}{\sqrt{2}}\,.$$

Wenn $p \geq \frac{r}{\sqrt{2}}$, so gibt es keine Berührung mehr mit der Ellipse.

2.2.3 Kommentare zum Lösungsweg und Beurteilung der Aufgabe.

- **Die Gleichung der Umhüllenden:** Aus der Aufgabenstellung geht klar hervor, dass die Ellipse $E : \frac{1}{2}x^2 + y^2 = r^2$ die Umhüllende der gegebenen Kreisschar $k_p : (x-p)^2 + y^2 = r^2 - p^2$ sein muss. Weshalb Einstein die Gleichung der Umhüllenden direkt aus der Kreisschar bestimmen wollte, ist unklar. Weiter ist die dargestellte, überflüssige Herleitung der Umhüllendengleichung schwammig und nicht überzeugend. Ein entsprechender Kommentar des Examinators fehlt.
- **Gestrichene Sequenzen:** Die in eckigen Klammern stehenden Abschnitte wurden von Einstein gestrichen.

– Sequenz 1: Hier wird behauptet, die Frage, ob der Kreis $k : (x-p)^2+y^2 = r^2-p^2$ die Ellipse $E : \frac{1}{2}x^2 + y^2 = r^2$ schneide, entscheide sich auf der x-Achse. Eine geometrische Figur zeigt sofort, dass diese Behauptung falsch ist. Der Maturand Einstein erkannte dies offensichtlich und strich die entsprechenden Zeilen. Der Examinator setzte die Bemerkung *Beweis nicht stichhaltig* daneben.

  Als Begründung für die Tatsache, dass die Punkte mit grösster x-Koordinate von Kreisen und Ellipsen, deren Mittelpunkte auf der x-Achse liegen, ebenfalls auf der x-Achse zu suchen sind, verweist Einstein auf den ersten Differenzialquotienten. Aus mehreren Gründen ist dieser Verweis beachtenswert.

  * Der Sachverhalt ist geometrisch evident, eine Begründung erübrigt sich.
  * Der Hinweis auf einen Differenzialquotienten ohne gleichzeitige Nennung einer zugehörigen Funktion ist bedeutungslos.
  * Gemäss Unterrichtsberichten, siehe Seiten 359–360 in [3], wurde der Ableitungsbegriff an der Gewerbeabteilung der Kantonsschule Aarau in den Jahren 1895 und 1896 nicht behandelt. Es ist deshalb anzunehmen, dass es dem jungen Einstein hier weniger um das sachgerechte Lösen der Aufgabe ging, als vielmehr darum, durch das Erwähnen eines im Unterricht nicht behandelten und anspruchsvollen Begriffs, weiterführendes Wissen zu dokumentieren und dadurch zu beeindrucken.

– Sequenz 2: Durch Umordnen der Ellipsengleichung erhält man

$$y^2 = r^2 - \frac{1}{2}x^2 .$$

  Nach Einsetzen in die Kreisgleichung resultiert

$$x^2 - 4px + 4p^2 = 0$$

  und somit

$$(*) : x = 2p .$$

  Mit welcher Begründung dieser Abschnitt gestrichen wurde, ist unklar, wurde doch die hergeleitete Beziehung $(*)$ weiter verwendet. Der Examinator kommentierte mit *Richtig*!

- **Falsches Ungleichungszeichen:** In der Ungleichung auf der viertletzten Zeile ist das Ungleichungszeichen falsch, korrekt sollte es

$$r^2 \geq 2p^2$$

  heissen. Die nachfolgenden Ungleichungen wären entsprechend anzupassen. Eine Anmerkung des Examinators fehlt.

- **Beurteilung der Aufgabe:** Das Gebiet der Kegelschnitte zeichnet sich durch ausserordentliche innere Schönheit aus, weiter ist es im Hinblick auf Anwendungen in der Physik von Bedeutung. Trotz dieser Vorzüge hat der Umfang der Behandlung dieses Teilgebietes der Geometrie im Rahmen der gymnasialen Mathematikausbildung

in der Vergangenheit ständig abgenommen. Es wundert deshalb nicht, dass bereits Publikationen mit verzweifelten Titeln *Sind die Kegelschnitte noch zu retten*? erscheinen. Die meisten Maturanden und Maturandinnen sind allerdings auch heute noch mit den Grundlagen der Theorie der Kegelschnitte vertraut und wären in der Lage, die obige Aufgabe zu lösen, denn sie stellt bei adäquatem Vorgehen keine hohen Anforderungen und ist mit geringem Zeitaufwand zu bearbeiten.

- **Benotung der Arbeit:** Trotz Unkorrektheiten und kleineren Fehlern wurde die Geometriearbeit Einsteins vom Examinator Prof. H. Ganter mit der bestmöglichen Note 6 bewertet.

3 Prüfungsarbeit in Algebra

Der Mathematikunterricht an der Gewerbeabteilung der Kantonsschule Aarau war am Ende des 19. Jahrhunderts in die drei Disziplinen *Arithmetik und Algebra*, *Geometrie* und *Darstellende Geometrie*, die je mit einer Note ausgewiesen wurden, gegliedert. Die Prüfung in Algebra fand am 21. September 1896 von 09.30 bis 11.30 Uhr statt.

3.1 Aufgabe

3.1.1 Aufgabenstellung. Von einem Dreieck kennt man die Abstände l, m, n des Mittelpunktes des einbeschriebenen Kreises von den Ecken, man ermittle den Radius ρ des einbeschriebenen Kreises $l = 1$ $m = \frac{1}{2}$ $n = \frac{1}{3}$.

3.1.2 Lösungsweg von Albert Einstein.

$$\begin{aligned}
\sin\frac{\alpha}{2} &= \frac{\rho}{l} = \rho \\
\sin\frac{\beta}{2} &= \frac{\rho}{m} = 2\rho \\
\sin\frac{\gamma}{2} &= \frac{\rho}{n} = 3\rho\,.
\end{aligned}$$

Da man allgemein für jedes $\triangle$:

$$\sin^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\beta}{2} + \sin^2\frac{\gamma}{2} + 2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2}\cdot\sin\frac{\gamma}{2} = 1\,,$$

so lautet die Gleichung nach Einsetzung der obigen Werte:

$$\begin{aligned}
14\rho^2 + 12\rho^3 - 1 &= 0 \qquad \rho = \frac{1}{x} \\
\frac{14}{x^2} + \frac{12}{x^3} - 1 &= 0 \\
14x + 12 - x^3 &= 0
\end{aligned}$$

oder:

$$x^3 - 14x - 12 = 0\,.$$

Nun ist die Cardanische Formel anzuwenden

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}},$$

wobei $p = -14$, $q = -12$.

Die Diskriminante

$$\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3$$

ist negativ, folglich ihre Wurzel irrational [K1]. Man hat also die trigonometrische Methode anzuwenden, wobei

$$\begin{aligned}
\cos u &= \frac{-\frac{q}{2}}{\sqrt{\left(-\frac{p}{3}\right)^3}} \\
\log(\cos u) &= \log 6 + \frac{3}{2}\log 3 - \frac{3}{2}\log 14 \\
&= 0,77815 + 0,71568 - 1,711919 \\
&= 0,77474 - 10 \\
u &= 53^\circ\, 28'\, 4''\,.
\end{aligned}$$

Die 3 Wurzeln heissen

$$\begin{aligned}
&2\sqrt{-\frac{p}{3}} \cdot \cos\frac{u}{3} \\
&2\sqrt{-\frac{p}{3}} \cdot \cos\left(\frac{u}{3} + 120^\circ\right) \\
&2\sqrt{-\frac{p}{3}} \cdot \cos\left(\frac{u}{3} + 240^\circ\right)\,.
\end{aligned}$$

Brauchbar sind für das Problem nur positive Wurzeln. Da nun $2\sqrt{-\frac{p}{3}}$ positiv ist, so muss der andere Faktor auch positiv sein, damit das Produkt positiv werde.

$\frac{u}{3}$ ist ein spitzer Winkel, folglich sein Kosinus positiv, folglich die erste Wurzel brauchbar. Der Kosinus des zweiten Winkels (im 2. Quadranten gelegen) ist negativ, folglich die Wurzel unbrauchbar. Der Kosinus des dritten $\frac{u}{3} + 240$ ist kleiner als 260° [K2] ist also noch im dritten Quadranten, die 3. Wurzel also unbrauchbar.

$$\begin{aligned}
\log x &= \log 2 + \frac{1}{2}\log\frac{14}{3} + \log\cos 17^\circ\, 49'\, 21'' \\
\log x &= 0,61420 \qquad \log 10\rho = 0,38580 \\
\rho &= 0.243\,.
\end{aligned}$$

Kommentare zum Lösungsweg und Beurteilung der Aufgabe

- **Korrekturen des Examinators**
  - [K1]: Um anzudeuten, dass korrekterweise *imaginär* stehen sollte, hat der Examinator das Wort *irrational* unterstrichen. Der Einsteinbiograph Albrecht Fölsing kommentiert in [2].

    ... schnell erledigt und hoch benotet, die Arbeiten über Geometrie, Algebra und Physik, wobei allerdings eine gewisse Schlampigkeit auffällt, wenn der Maturand zum Beispiel einen mathematischen Ausdruck als irrational bezeichnet, wo es imaginär heissen müsste, ...
  - [K2]: Weil hier richtigerweise 270° stehen sollte, wurde die zweite Ziffer in 260° vom Examinator mit einer 7 überschrieben.
- **Eine trigonometrische Identität:** Für beliebige Winkel x, y und z mit $x+y+z = 90°$ gilt die Identität

$$\sin^2 x + \sin^2 y + \sin^2 z + 2\sin x \cdot \sin y \cdot \sin z = 1\,.$$

  Sie entspricht der von Einstein und auch von seinen Klassenkameraden verwendeten Formel

$$\sin^2 \frac{\alpha}{2} + \sin^2 \frac{\beta}{2} + \sin^2 \frac{\gamma}{2} + 2\sin \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \frac{\beta}{2} \cdot \sin \frac{\gamma}{2} = 1\,.$$

  In den üblichen, heute im Mittelschulbereich verwendeten Formelsammlungen ist diese Identität nicht aufgeführt und wird heutigen Maturanden und Maturandinnen nur in absoluten Ausnahmefällen bekannt sein. Im Gegensatz dazu war diese Beziehung in der Klasse Einsteins allgemeinbekannt, denn sie wurde bei der Lösung der Aufgabe kommentarlos verwendet.
- **Beurteilung der Aufgabe:** Gemäss Unterrichtsbericht von Prof. Ganter [3] wurde die kubische Gleichung in der Klasse Einsteins behandelt. Mit den heute zur Verfügung stehenden Taschenrechnern können Nullstellen von Polynomfunktionen problemlos bestimmt werden. Die Bedeutung der Formeln von Cardano hat deshalb drastisch abgenommen. Die Lösungsformel für die kubische Gleichung ist heutigen Gymnasiasten kaum, sicher aber nicht in operativem Ausmass, vertraut.
- **Benotung der Arbeit:** Einsteins Arbeit in Algebra wurde mit der bestmöglichen Note 6 bewertet.

Literatur

[1] Einstein, A.: *Prüfungsarbeiten in Mathematik*, Staatsarchiv des Kantons Aargau, 1896.

[2] Fölsing, A.: *Albert Einstein – Eine Biographie*, Suhrkamp Verlag, 1995.

[3] Stachel, J.: *The collected Papers of Albert Einstein*, Volume 1, Princeton University Press, 1987.

Herbert Hunziker
Abteilung Mathematik
Alte Kantonsschule Aarau
Bahnhofstr. 91
CH–5001 Aarau, Schweiz