

# AGM inequality with binomial expansion

Autor(en): **Roojin, Jamal**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **58 (2003)**

PDF erstellt am: **10.08.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-8488>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

---

---

## AGM inequality with binomial expansion

---

---

Jamal Roojin\*

Jamal Roojin received his M.S. from the Teacher Education University in Teheran, Iran, in 1989. In 1997 he became a Ph.D. student at that university, where he graduated in the year 2002. Since then he is an assistant professor at the Institute for Advanced Studies in Basic Sciences in Zanjan, Iran. His mathematical research interests include the theory of inequalities, problems in analysis and functional analysis.

The classical Arithmetic mean-Geometric mean inequality, or briefly the AGM inequality, states that for any nonnegative real numbers  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , we have

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}, \quad (1)$$

and equality occurs if and only if  $x_1 = x_2 = \dots = x_n$ . There are several interesting proofs of the AGM inequality, see e.g. [1]–[4]. In this note, using the binomial expansion, we get a recursive relation between the successive differences of the arithmetic and geometric means, and then using it, we prove and sharpen the AGM inequality. All we need is the following lemma, in which

$$A_n = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \quad \text{and} \quad G_n = \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}$$

are the standard notations for the arithmetic and the geometric means of  $n$  given non-negative numbers  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , respectively.

Ungleichungen spielen in der Mathematik bekanntlich eine wichtige Rolle. Die Ungleichung zwischen dem arithmetischen und geometrischen Mittel ist dabei von besonderem Interesse, da sie zu einer Vielzahl von weiteren Ungleichungen Anlass gibt. Es gibt mehrere interessante Beweise für diese Ungleichung; z.B. finden sich dazu über fünfzig Beweise mit historischen Kommentaren im Buch „Means and their inequalities“ von P.S. Bullen, D.S. Mitrinović und P.M. Vasić. In der vorliegenden Arbeit wird mit Hilfe des binomischen Lehrsatzes eine rekursive Beziehung zwischen den sukzessiven Differenzen von arithmetischem und geometrischem Mittel gegeben. Mittels vollständiger Induktion ergibt sich damit ein einfacher und eleganter Beweis für die Ungleichung zwischen dem arithmetischen und geometrischen Mittel.

---

\*) The author is supported in part by the Institute for Advanced Studies in Basic Sciences, Zanjan, Iran.

**Lemma.** *With the above notations,*

$$A_n - G_n = \frac{1}{n} \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} A_{n-1}^{\frac{n-k}{n}} \left( x_n^{1/n} - A_{n-1}^{1/n} \right)^k + x_n^{1/n} \left( A_{n-1}^{\frac{n-1}{n}} - G_{n-1}^{\frac{n-1}{n}} \right). \quad (2)$$

*Proof.* By the binomial expansion, we have

$$x_n = \left( x_n^{1/n} - A_{n-1}^{1/n} + A_{n-1}^{1/n} \right)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} A_{n-1}^{\frac{n-k}{n}} \left( x_n^{1/n} - A_{n-1}^{1/n} \right)^k.$$

So,

$$A_n = \frac{(n-1)A_{n-1} + x_n}{n} = A_{n-1}^{\frac{n-1}{n}} x_n^{1/n} + \frac{1}{n} \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} A_{n-1}^{\frac{n-k}{n}} \left( x_n^{1/n} - A_{n-1}^{1/n} \right)^k,$$

and therefore,

$$\begin{aligned} A_n - G_n &= A_n - G_{n-1}^{\frac{n-1}{n}} x_n^{1/n} \\ &= A_n - A_{n-1}^{\frac{n-1}{n}} x_n^{1/n} + x_n^{1/n} \left( A_{n-1}^{\frac{n-1}{n}} - G_{n-1}^{\frac{n-1}{n}} \right) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} A_{n-1}^{\frac{n-k}{n}} \left( x_n^{1/n} - A_{n-1}^{1/n} \right)^k + x_n^{1/n} \left( A_{n-1}^{\frac{n-1}{n}} - G_{n-1}^{\frac{n-1}{n}} \right). \end{aligned} \quad (3)$$

*Proof of the AGM inequality.* Without loss of generality, we may suppose that  $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$ . So, by the fact that  $x_n \geq A_{n-1}$  and the induction hypothesis  $A_{n-1} \geq G_{n-1}$ , we conclude that

$$A_n - G_n \geq \frac{1}{n} \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} A_{n-1}^{\frac{n-k}{n}} \left( x_n^{1/n} - A_{n-1}^{1/n} \right)^k \geq 0,$$

and the AGM inequality is obtained.

For the case of equality in (1), it is evident from (2) that  $A_n = G_n$  if and only if  $x_n = A_{n-1}$  and  $A_{n-1} = G_{n-1}$ , which by the induction hypothesis is equivalent to  $x_1 = x_2 = \dots = x_n$ .

**Remark**

(i) We can write

$$\left( A_{n-1}^{\frac{n-1}{n}} - G_{n-1}^{\frac{n-1}{n}} \right) \sum_{l=0}^{n-1} A_{n-1}^{l/n} G_{n-1}^{\frac{n-1-l}{n}} = (A_{n-1} - G_{n-1}) \sum_{l=0}^{n-2} A_{n-1}^{l/n} G_{n-1}^{\frac{n-2-l}{n}},$$

and so by (2),

$$A_n - G_n = \frac{1}{n} \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} A_{n-1}^{\frac{n-k}{n}} \left( x_n^{1/n} - A_{n-1}^{1/n} \right)^k + C_{n-1} x_n^{1/n} (A_{n-1} - G_{n-1}), \quad (4)$$

where

$$C_{n-1} = \begin{cases} \frac{\sum_{l=0}^{n-2} A_{n-1}^{l/n} G_{n-1}^{\frac{n-2-l}{n}}}{\sum_{l=0}^{n-1} A_{n-1}^{l/n} G_{n-1}^{\frac{n-1-l}{n}}} & \text{if } G_{n-1} \neq A_{n-1}, \\ 0 & \text{if } G_{n-1} = A_{n-1}, \end{cases}$$

which is a recursive relation between successive differences of the arithmetic and the geometric means.

- (ii) Using the mean value theorem for the function  $f(x) = x^{\frac{n-1}{n}}$  over the interval  $[G_{n-1}, A_{n-1}]$ , there exists an  $\xi_{n-1}$  with  $G_{n-1} \leq \xi_{n-1} \leq A_{n-1}$ , such that

$$\xi_{n-1}^{1/n} \left( A_{n-1}^{\frac{n-1}{n}} - G_{n-1}^{\frac{n-1}{n}} \right) = \frac{n-1}{n} (A_{n-1} - G_{n-1}). \quad (5)$$

Therefore, if  $x_n \geq A_{n-1}$ , we have  $x_n \geq \xi_{n-1}$ , and so by (2) and (5),

$$A_n - G_n \geq \frac{1}{n} \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} A_{n-1}^{\frac{n-k}{n}} \left( x_n^{1/n} - A_{n-1}^{1/n} \right)^k + \frac{n-1}{n} (A_{n-1} - G_{n-1}), \quad (6)$$

which is a sharpening of Rado's inequality [2] for equal weights:

$$A_n - G_n \geq \frac{n-1}{n} (A_{n-1} - G_{n-1}).$$

By a similar argument, if  $x_n \leq G_{n-1}$ , we see that the inequality in (6) reverses, and so, we obtain a converse of Rado's inequality.

- (iii) If  $0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$ , then considering (6) for  $m$  instead of  $n$ , and then summing up (6) for  $m = 2, \dots, n$ , we have

$$\begin{aligned} n(A_n - G_n) &= \sum_{m=2}^n [m(A_m - G_m) - (m-1)(A_{m-1} - G_{m-1})] \\ &\geq \sum_{m=2}^n \sum_{k=2}^m \binom{m}{k} A_{m-1}^{\frac{m-k}{m}} \left( x_m^{1/m} - A_{m-1}^{1/m} \right)^k, \end{aligned} \quad (7)$$

which is a refinement of the AGM inequality. Similarly, if  $x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n \geq 0$ , we see that the inequality in (7) reverses, and we get a converse of the AGM inequality.

## References

- [1] Beckenbach, E.F.; Bellman, R.: *Inequalities*. Springer, Berlin 1983.
- [2] Bullen, P.S.; Mitrinović, D.S.; Vasić, P.M.: *Means and Their Inequalities*. Reidel, Dordrecht 1988.
- [3] Hardy, G.H.; Littlewood, J.E.; Pólya, G.: *Inequalities*. Cambridge University Press, 1967.
- [4] Mitrinović, D.S.: *Analytic Inequalities*. Springer, Berlin 1970.

Jamal Roojin

Institute for Advanced Studies in Basic Sciences

P.O. Box 45195-159

Zanjan, Iran

e-mail: Roojin@iasbs.ac.ir