Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 58 (2003)

Artikel: Zum Satz des Ptolemaios
Autor: Stärk, Roland
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-8481

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 15.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Elem. Math. 58 (2003) 34 – 37
0013-6018/03/010034-4

© Birkhäuser Verlag, Basel, 2003

Elemente der Mathematik

Zum Satz des Ptolemaios

Roland Stärk

Roland Stärk studierte an der ETH Zürich. Nach der Promotion zum Dr. sc. math. war er von 1964–1997 Gymnasiallehrer an der Kantonsschule Schaffhausen.

Beim Kreissehnenviereck $ABCD$ der Fig. 1 sind die Winkel ACB und ADB bekanntlich gleich gross. Hat ein Viereck $ABCD$ keinen Umkreis, so sind diese Winkel verschieden.

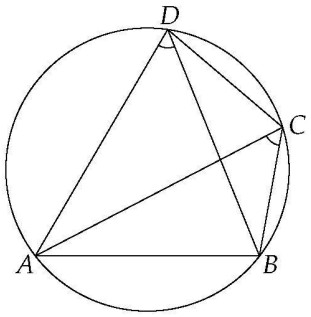

Fig. 1

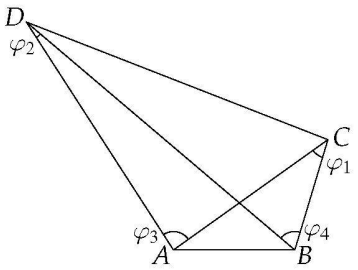

Fig. 2

Es stellt sich die etwas vage Frage, ob bei der Fig. 2 die Differenz $\varphi_1 - \varphi_2$ das Viereck irgendwie beschreibt. Sicher gilt $\varphi_1 - \varphi_2 = \varphi_3 - \varphi_4$, wie man sofort sieht.

Um im Folgenden zu einem allgemeingültigen Resultat zu kommen, unabhängig von der jeweiligen Anordnung der Ecken des (allgemeinen) Vierecks, sollen Winkel konsequent

In neuerer Zeit wird die Elementargeometrie vermehrt mit Computerhilfsmitteln bearbeitet, die auch an den Schulen Einzug halten. Die vorliegende Arbeit will am Beispiel des Satzes des Ptolemaios über das Kreissehnenviereck zeigen, wie ein klassisches Problem mit Hilfe eines Computerkonstruktionsprogramms und eines Computeralgebrasystems behandelt und beinahe spielerisch gelöst werden kann. Gearbeitet wird mit einem für Viereckuntersuchungen günstigen Koordinatensystem, das sich schon an anderer Stelle bewährt hat.

orientiert, modulo 180° gemessen werden. Mit $\angle PQR$ ist der Winkel gemeint, um den die Gerade QP um Q gedreht werden muss, bis sie in die Gerade QR übergeht, im Gegenuhrzeigersinn positiv, im Uhrzeigersinn negativ gerechnet und modulo 180° reduziert. Dieser Winkelbegriff hat den grossen Vorteil, dass z.B. in der Fig. 1 die Ecken C und D auch auf verschiedenen Seiten der Sehne AB eingezeichnet sein können. Es gilt auch in diesem Falle $\angle ACB = \angle ADB$. Wir schreiben das gewöhnliche Gleichheitszeichen. Oder bei einem geschlossenen Streckenzug $P_1P_2P_3P_4 \ldots P_nP_1$ mit n Strecken gilt, unabhängig von der geometrischen Anordnung, $\angle P_1P_2P_3 + \angle P_2P_3P_4 + \ldots + \angle P_nP_1P_2 = 0$. Das ist der Satz über die Winkelsumme im $n-$Eck („Dass diese ein ganzzahliges Vielfaches von 180° ist").

In der Fig. 2 sieht man den Vierstreckenzug $ACBDA$. Also $\angle ACB + \angle CBD + \angle BDA + \angle DAC = 0$. Daraus ergibt sich, wegen $\angle BDA = -\angle ADB$ usw., $\angle ACB - \angle ADB = \angle CAD - \angle CBD$, wie oben festgestellt. Wir nennen die Differenz

$$\delta_1 = \angle ACB - \angle ADB$$

einen *Differenzwinkel* des Vierecks $ABCD$. Zum Viereck gehören mehrere solche Differenzwinkel (der Form „$\angle XUY - \angle XVY$"). Zu δ_1 nehmen wir noch $\delta_2 = \angle BAC - \angle BDC$ und $\delta_3 = \angle CBA - \angle CDA$ hinzu, man sieht gleich warum.

Bei der Fig. 2 z.B. misst man (genau gedruckte Wiedergabe der ursprünglichen Vorlage vorausgesetzt): $\delta_1 = 40° - 17° = 23°$, $\delta_2 = 37° - 19° = 18°$, $\delta_3 = 103° - (-36°) = 139°$. Etwas überrascht stellt man fest, dass $\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 = 0$ ist.

Es lohnt sich, so etwas auch mit dem Computer-Konstruktionsprogramm CABRI [1] zu überprüfen. (Man wird in diesem Fall zuerst selber noch eine Prozedur für die orientierte Winkelmessung machen.) Weil bei Cabri die Ausgangsfiguren variiert werden können, erhält man oft schnell einen viel besseren Einblick in geometrische Zusammenhänge und wird immer wieder zu neuen Ideen angeregt.

Der Beweis hier ist aber ganz einfach. Man betrachte die Streckenzüge $ACBA$ und $ADBDCDA$. Sie liefern die Gleichungen

$$\angle ACB + \angle CBA + \angle BAC = 0\,,$$
$$\angle ADB + 0 + \angle BDC + 0 + \angle CDA + 0 = 0\,.$$

Daraus ergibt sich die Formel oben.

Um den Sachverhalt weiter zu verfolgen, führen wir ein günstiges (Cartesisches) Koordinatensystem ein. Als Koordinatenachsen nimmt man bei einer Viereckuntersuchung am besten die Asymptoten der gleichseitigen Hyperbel, die durch die vier Ecken gelegt werden kann. Bei geeigneter Wahl der Koordinateneinheit ergibt sich für die Ecken A, B, C, D dann der Ansatz

$$A\left(a, \frac{1}{a}\right)\,, \quad B\left(b, \frac{1}{b}\right)\,, \quad C\left(c, \frac{1}{c}\right)\,, \quad D\left(d, \frac{1}{d}\right)\,.$$

Der Vorteil dieser Methode ist, dass die vier Ecken jeweils mit gleichem Gewicht in Erscheinung treten können. Für das Quadrat der Seite AB, zum Beispiel, ergibt sich

$$\overline{AB}^2 = \frac{(b-a)^2(1+a^2b^2)}{a^2b^2}\,.$$

Damit sind auch die Quadrate der fünf anderen Seiten bekannt: $\overline{CD}^2 = \frac{(d-c)^2(1+c^2d^2)}{c^2d^2}$ ..., es müssen nur die Koordinaten a, b, c, d passend vertauscht werden.

Wie man mit diesem Koordinatensystem interessante Viereckuntersuchungen machen kann und heutzutage mit Hilfe eines Computer-Algebrasystems, z.B. Mathematica [5], umfangreiche Berechnungen erfolgreich durchführt, zeigt [4].

Dass durch die Ecken eines Vierecks eine gleichseitige Hyperbel gelegt werden kann – dies sei noch nachgetragen – folgt z.B. aus dem Satz: „Jeder einem (nichtrechtwinkligen) Dreieck umschriebene Kegelschnitt, der durch den Höhenschnittpunkt des Dreiecks läuft, ist eine gleichseitige Hyperbel" [2]. Die Viereckseiten zusammen mit dem Höhenschnittpunkt eines der Teildreiecke des Vierecks legen die gesuchte Gleichseithyperbel fest. (Sollten alle vier Teildreiecke rechtwinklig sein, bei einem Rechteck also, ist die Existenz zum vornherein klar.)

Es ist nun

$$\tan(\angle ACB) = \frac{(b-a)c}{1+abc^2}, \quad \tan(\angle ADB) = \frac{(b-a)d}{1+abd^2}.$$

Das Additionstheorem liefert

$$\tan(\delta_1) = \frac{(b-a)(d-c)(abcd-1)}{1+abc^2+a^2cd-2abcd+b^2cd+abd^2+a^2b^2c^2d^2}.$$

Entsprechende Ausdrücke erhält man für δ_2 und δ_3. Mit dem Computer lässt sich sofort nachweisen, dass $\tan(\delta_1+\delta_2) = -\tan(\delta_3)$ ist, womit $\delta_1+\delta_2+\delta_3 = 0$ auch auf diesem Wege bewiesen ist.

Das Verschwinden dieser Summe bedeutet, dass sich mit diesen drei Differenzwinkeln ein Dreieck $P_1P_2P_3$ bilden lässt (in beliebiger Grösse), mit

$$\angle P_2P_1P_3 = \delta_1, \quad \angle P_3P_2P_1 = \delta_2, \quad \angle P_1P_3P_2 = \delta_3.$$

Um die Gestalt dieses Dreiecks deutlicher zu sehen, wird man, im Hinblick auf den sinus-Satz, vielleicht automatisch noch die sinus-Werte der Eckwinkel berechnen:

$$\sin^2(\delta_1) = \frac{\tan^2(\delta_1)}{\tan^2(\delta_1)+1} = \frac{(b-a)^2(d-c)^2(abcd-1)^2}{(1+a^2c^2)(1+b^2c^2)(1+a^2d^2)(1+b^2d^2)}.$$

Das ist die Überraschung. Eine so schöne Faktorzerlegung weist in der Regel auf weitergehende Zusammenhänge hin. Hier denkt man an die oben berechneten Quadrate der Viereckseiten. Tatsächlich gilt

$$\frac{\sin^2(\delta_1)}{\sin^2(\delta_2)} = \frac{(b-a)^2(d-c)^2(1+a^2b^2)(1+c^2d^2)}{(c-b)^2(d-a)^2(1+b^2c^2)(1+a^2d^2)} = \frac{\overline{AB}^2\cdot\overline{CD}^2}{\overline{AD}^2\cdot\overline{BC}^2},$$

$$\frac{|\sin(\delta_1)|}{|\sin(\delta_2)|} = \frac{\overline{P_2P_3}}{\overline{P_1P_3}} = \frac{\overline{AB}\cdot\overline{CD}}{\overline{AD}\cdot\overline{BC}}.$$

Die Seiten des Dreiecks $P_1P_2P_3$ sind proportional zu den Gegenseitenprodukten des Vierecks $ABCD$.

Die Idee, einem Viereck dieses Dreieck zuzuordnen, stammt nach [3] von C.A. Bretschneider.

Satz: *Die drei Differenzwinkel*

$$\delta_1 = \angle ACB - \angle ADB\,, \quad \delta_2 = \angle BAC - \angle BDC\,, \quad \delta_3 = \angle CBA - \angle CDA$$

(orientierte Winkel modulo 180°*) eines allgemeinen Vierecks* $ABCD$ *lassen sich zu einem Dreieck* $P_1P_2P_3$ *(beliebiger Grösse) zusammensetzen, mit* $\angle P_2P_1P_3 = \delta_1$, $\angle P_3P_2P_1 = \delta_2$, $\angle P_1P_3P_2 = \delta_3$. *Die Seiten dieses Dreiecks sind proportional zu den Gegenseitenprodukten des Vierecks:*

$$\overline{P_2P_3} \;:\; \overline{P_3P_1} \;:\; \overline{P_1P_2} = (\overline{AB}\cdot\overline{CD}) \;:\; (\overline{AD}\cdot\overline{BC}) \;:\; (\overline{AC}\cdot\overline{BD}).$$

Beim Grenzfall des Kreissehnenvierecks sind die drei Differenzwinkel gleich Null, das Dreieck $P_1P_2P_3$ entartet, die Punkte P_1, P_2, P_3 sind kollinear. Das bedeutet:

Wenn ein Viereck einen Umkreis hat, dann ist eines seiner Gegenseitenprodukte gleich der Summe der beiden andern und umgekehrt. Das ist der berühmte Satz des *Ptolemaios*.

Literatur

[1] Laborde, J.-M.; Bellemain, F.: Cabri-Géomètre II, Texas Instruments France.

[2] Pickert, G.: Gleichseitige Hyperbel und Parabeln durch vier Punkte. *Praxis der Mathematik*, PM 40 (1998) 277–279 und 279f.

[3] Simon, M.: *Über die Entwicklung der Elementar-Geometrie im* XIX. *Jahrhundert*, p. 159. Teubner, Leipzig 1906.

[4] Stärk, R.; Baumgartner, D.: Ein merkwürdiger Punkt des Vierecks. *Praxis der Mathematik*, PM 44 (2002) 19–27.

[5] Wolfram, S.: *Mathematica. A System for Doing Mathematics by Computer*. Addison-Wesley Publishing Company Inc., 1988.

Roland Stärk
Im Santenbühl 3
CH–8234 Stetten, Schweiz
e-mail: `roland.staerk@freesurf.ch`