Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 59 (2004)

Artikel: Konvergenzbeschleunigung mit Hilfe von Kettenbrüchen
Autor: Pigulla, Wilfried
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-9310

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 03.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Elem. Math. 59 (2004) 58 – 64
0013-6018/04/020058-7
DOI 10.1007/s00017-004-0209-4

© Birkhäuser Verlag, Basel, 2004

Elemente der Mathematik

Konvergenzbeschleunigung mit Hilfe von Kettenbrüchen

Wilfried Pigulla

W. Pigulla wurde 1936 in Oberschlesien geboren. Er hat in Passau und Rom Philosophie und Theologie studiert. Er ist also kein Mathematiker, sondern ein an Mathematik interessierter Laie. Seit seiner Pensionierung im Jahr 2000 kann er sich uneingeschränkt seinen Hobbies, der Mathematik und der Altphilologie, widmen.

1 Eine schöne Formel für $\pi/4$

Die wohlbekannte Reihe von Mādhava, Gregory und Leibniz

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} \tag{1}$$

konvergiert sehr langsam und gilt deshalb als ungeeignet für die Berechnung von $\pi/4$. Die Annäherung an $\pi/4$ kann aber sehr stark beschleunigt werden, wenn die Reihe (1) nach einem beliebigen Glied abgebrochen und zu der nunmehr endlichen Summe ein geeigneter Kettenbruch addiert wird: Es gilt

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} + (-1)^n \cdot F_n \tag{2}$$

mit

$$F_n := \frac{1/2}{2n} \; + \; \frac{1^2}{2n} \; + \; \frac{2^2}{2n} \; + \; \frac{3^2}{2n} \; + \; \frac{4^2}{2n} \; + \; \cdots \; + \; \frac{k^2}{2n} \; + \; \cdots .$$

Dem Leser dürfte die auf Leibniz zurückgehende alternierende Reihe der Reziproken der ungeraden Zahlen zur Berechnung von $\pi/4$ wohlbekannt sein. Leider konvergiert diese Reihe sehr langsam, so dass sich die Frage nach einer Beschleunigung der Konvergenz stellt. Dem Autor ist es in dem vorliegenden Beitrag gelungen, eine solche „Konvergenzbeschleunigung“ zu erreichen, indem er das Restglied mit Hilfe von geeigneten Kettenbrüchen berechnet. Diese Überlegungen lassen sich mit einem allgemeinen Ansatz insbesondere auch auf die Restglieder der Potenzreihen von $\arctan(x)$ und $\log(1+x)$ übertragen. Beim (nicht auf der Hand liegenden) Beweis werden klassische Ergebnisse von L. Euler und O. Perron herangezogen.

Kettenbrüche werden hier durch tiefgestellte Pluszeichen „auf Linie“ gebracht, wie in dem folgenden Beispiel dargestellt:

$$\frac{1}{2} \underset{+}{} \frac{2}{3} := \frac{1}{2+\frac{2}{3}} = 0.375\ .$$

Wenn man $n := 4$ setzt und den Kettenbruch bei $k := 3$ abbricht, so liefert die Formel (2) den Näherungswert

$$\frac{\pi}{4} \doteq 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \left(\frac{1/2}{8} \underset{+}{} \frac{1}{8} \underset{+}{} \frac{4}{8} \underset{+}{} \frac{9}{8}\right) = 0.7853972\ldots\ .$$

Das Ergebnis hat fünf richtige Dezimalstellen. Wollte man mit der Reihe (1) ein gleichwertiges Ergebnis erzielen, so müsste man $1 - 1/3 + 1/5 - \ldots - 1/522395$ ausrechnen! Setzt man in (2) $n := 10$ und $k := 6$, so erhält man $\pi/4 \doteq 0.78539\ 81633\ 9765\ldots$ mit zwölf richtigen Stellen. Das würde genügen, um den Umfang des Erdäquators mit einem Fehler von weniger als 1/90 Millimeter zu berechnen (falls man die Länge des Äquatorradius als genau bekannt annimmt).

Die durch (2) gelieferten Näherungswerte sind größer als $\pi/4$, wenn n und k beide gerade oder beide ungerade sind; andernfalls sind sie kleiner.

2 Allgemeinere Formeln

Bevor wir (2) beweisen, werden wir zunächst allgemeinere Formeln (3) und (4) erklären. Schließlich soll eine noch allgemeinere Formel (5) erklärt und auch bewiesen werden. Die Formeln (2), (3) und (4) sind Sonderfälle von (5) und werden damit ebenfalls bewiesen sein.

Die Formel (2) ist ein Sonderfall der nachstehenden Formel (4), mit der nicht nur $\pi/4 = \arctan 1$ errechnet werden kann, sondern jeder Wert $\arctan x$ mit $|x| \leq 1$. Überdies gibt es eine ähnliche allgemeine Formel, mit deren Hilfe $\log(1+x)$, $-1 < x \leq 1$, berechnet werden kann. Diese beiden Formeln sind

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n} + (-1)^n \cdot A_{x,n}\ , \tag{3}$$

wobei $A_{x,n}$ den folgenden Kettenbruch bezeichnet:

$$A_{x,n} := \frac{x^{n+1}}{n+1+nx} \underset{+}{} \frac{1^2x}{n+2+(n-1)x} \underset{+}{} \frac{2^2x}{n+3+(n-2)x} \underset{+}{} \frac{3^2x}{n+4+(n-3)x} \underset{+}{} \cdots \underset{+}{} \frac{k^2x}{n+k+1+(n-k)x} \underset{+}{} \cdots,$$

und die Formel

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots + \frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{2n-1} + (-1)^n \cdot B_{x,n} \tag{4}$$

mit

$$B_{x,n} := \frac{(1/2)\,x^{2n+1}}{n+\frac{1}{2}+(n-\frac{1}{2})x^2} \;+\; \frac{1^2x^2}{n+\frac{3}{2}+(n-\frac{3}{2})x^2} \;+\; \frac{2^2x^2}{n+\frac{5}{2}+(n-\frac{5}{2})x^2}$$
$$+\; \frac{3^2x^2}{n+\frac{7}{2}+(n-\frac{7}{2})x^2} \;+\; \cdots \;+\; \frac{k^2x^2}{n+\frac{2k+1}{2}+(n-\frac{2k+1}{2})x^2} \;+\; \cdots .$$

Für jede dieser beiden Formeln soll nun ein Test durchgeführt werden, wobei wir für beide Tests die Werte $x := 0.8$, $n := 6$ und $k := 2$ wählen. Formel (3) liefert

$$\log 1.8 \doteq 0.8 - \frac{0.8^2}{2} + \frac{0.8^3}{3} - \ldots - \frac{0.8^6}{6} + A_{0.8\,,6}\,,$$

wobei

$$A_{0.8\,,6} = \frac{0.8^7}{11.8} \;+\; \frac{0.8}{12} \;+\; \frac{3.2}{12.2}\,.$$

Wir erhalten $\log 1.8 \doteq 0.5877867\ldots$ mit sechs richtigen Dezimalstellen. Die Formel (4) liefert

$$\arctan 0.8 \doteq 0.8 - \frac{0.8^3}{3} + \frac{0.8^5}{5} - \ldots - \frac{0.8^{11}}{11} + B_{0.8\,,6}\,,$$

wobei

$$B_{0.8\,,6} = \frac{(1/2)\,0.8^{13}}{10.02} \;+\; \frac{0.64}{10.38} \;+\; \frac{2.56}{10.74}\,.$$

Damit erhalten wir $\arctan 0.8 \doteq 0.67474095\ldots$ mit sieben richtigen Dezimalstellen.

Es bezeichne r ein beliebiges von (3) oder (4) geliefertes Näherungsergebnis und a die betreffende „angestrebte“ Zahl $\log(1+x)$ bzw. $\arctan x$. Ist $x > 0$, so gilt für (3) und (4) ebenso wie für (2) die Ungleichung $r > a$, falls n und k beide gerade oder beide ungerade sind, und sonst $r < a$. Im Fall $x < 0$ ist es etwas komplizierter: Bezüglich (3) gilt dann stets $a < r < 0$, während bezüglich (4) diese Relation nur zutrifft, wenn n und k verschiedene Parität aufweisen.

Setzt man in (4) $x := 1$, so erhält man als Sonderfall die Formel (2).

Die Formeln (3) und (4) sind ihrerseits Sonderfälle einer noch allgemeineren Formel, mit der nicht nur $\log(1+x)$ und $\arctan x$ berechnet werden können, sondern z.B. auch die Summe der Reihe

$$\frac{x^1}{1} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^7}{7} - \ldots + \frac{(-1)^{n-1}x^{3n-2}}{3n-2} + \ldots\,.$$

Diese umfassende Formel lautet folgendermaßen:

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{mp+1}}{mp+1} = \sum_{m=0}^{n-1} \frac{(-1)^m x^{mp+1}}{mp+1} + (-1)^n \cdot C_{p,x,n}\,. \tag{5}$$

Hier bezeichnet $C_{p,x,n}$ den Kettenbruch

$$C_{p,x,n} := \frac{(1/p)\, x^{np}}{u+(u-1)x^p} \;+\; \frac{1^2x^p}{u+1+(u-2)x^p} \;+\; \frac{2^2x^p}{u+2+(u-3)x^p}$$
$$+\; \frac{3^2x^p}{u+3+(u-4)x^p} \;+\; \cdots \;+\; \frac{k^2x^p}{u+k+(u-k-1)x^p} \;+\; \cdots,$$

wobei wir zur Abkürzung

$$n+\frac{1}{p} =: u$$

gesetzt haben. (Dieses u wird auch in späteren Formeln eine Rolle spielen.)

Wählt man in (5) $p := 1$, so ergibt sich die Formel (3), da dann auf der linken Seite von (5) gerade die bekannte Reihe für $\log(1+x)$ erscheint, und mit $p := 2$ verwandelt sich (5) in die Formel (4). Es wird also genügen, die Formel (5) zu beweisen, wobei für p natürliche Zahlen ≥ 1 ins Auge gefasst werden.

3 Beweis

Beim Beweis von (5) wird das folgende Integral eine wichtige Rolle spielen:

$$\int_0^x \frac{s^{np}}{1+s^p}\,\mathrm{d}s\,. \tag{6}$$

Wir werden nacheinander zeigen:

(a) Die Gleichung (5) ist richtig, wenn dort das Symbol $C_{p,x,n}$ durch das Integral (6) ersetzt wird.

(b) Das Integral (6) hat denselben Wert wie ein gewisser Kettenbruch K.

(c) Der Kettenbruch K hat denselben Wert wie der Kettenbruch $C_{p,x,n}$.

Damit wird (5) in der angegebenen Form bewiesen sein.

(a) Man erkennt leicht, dass (5) richtig ist, wenn dort $C_{p,x,n}$ durch die folgende unendliche Reihe ersetzt wird:

$$\frac{x^{np+1}}{np+1} - \frac{x^{(n+1)p+1}}{(n+1)p+1} + \frac{x^{(n+2)p+1}}{(n+2)p+1} - \frac{x^{(n+3)p+1}}{(n+3)p+1} + \ldots\,. \tag{7}$$

Das Integral (6) kann aber ebenfalls in die Reihe (7) umgeformt werden:

$$\int_0^x \frac{s^{np}}{1+s^p}\,\mathrm{d}s = \int_0^x (s^{np} - s^{(n+1)p} + s^{(n+2)p} - s^{(n+3)p} + \ldots)\,\mathrm{d}s$$
$$= \frac{x^{np+1}}{np+1} - \frac{x^{(n+1)p+1}}{(n+1)p+1} + \frac{x^{(n+2)p+1}}{(n+2)p+1} - \frac{x^{(n+3)p+1}}{(n+3)p+1} + \ldots\,.$$

(b) Die folgende Gleichung entnehmen wir Perron [3]. Formel (8) auf S. 18 lautet (mit y an Stelle von x):

$$\frac{1}{y^m}\int_0^y \frac{t^m}{1+t}\,\mathrm{d}t = \frac{y}{m+1} \;+\; \frac{(m+1)^2 y}{m+2-(m+1)y} \;+\; \frac{(m+2)^2 y}{m+3-(m+2)y} \;+\; \cdots . \tag{8}$$

Diese Gleichung soll nun schrittweise umgeformt werden, bis die linke Seite mit dem Integral (6) übereinstimmt. Zunächst multiplizieren wir beide Seiten mit y^m und setzen dann $m := u-1 \;\big(= n+(1/p)-1\big)$. Es ergibt sich

$$\int_0^y \frac{t^{u-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t = \frac{y^u}{u} \;+\; \frac{u^2 y}{u+1-uy} \;+\; \frac{(u+1)^2 y}{u+2-(u+1)y} \;+\; \cdots . \tag{9}$$

Im Integral auf der linken Seite von (9) substituieren wir $t := s^p$. Es ergibt sich

$$\int_0^y \frac{t^{u-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{y^{1/p}} \frac{s^{(u-1)p}}{1+s^p}\,ps^{p-1}\,\mathrm{d}s = p\int_0^{y^{1/p}} \frac{s^{up-1}}{1+s^p}\,\mathrm{d}s = p\int_0^{y^{1/p}} \frac{s^{np}}{1+s^p}\,\mathrm{d}s\,;$$

dabei haben wir zuletzt $up-1 = \big(n+\frac{1}{p}\big)p-1 = np$ verwendet. Dividieren wir also (9) durch p und setzen noch $y := x^p$, so erhalten wir zusammengenommen

$$\int_0^x \frac{s^{np}}{1+s^p}\,\mathrm{d}s = \frac{(1/p)x^{up}}{u} \;+\; \frac{u^2x^p}{u+1-ux^p} \;+\; \frac{(u+1)^2x^p}{u+2-(u+1)x^p} \;+\; \cdots =: K\,. \tag{10}$$

Auf der linken Seite steht jetzt das Integral (6), auf der rechten ein gewisser Kettenbruch K. Da (10) aus Perrons Gleichung (8) gewonnen wurde, ist damit (b) erwiesen.

(c) Wir müssen nun $K = C_{p,x,n}$ beweisen, das heißt

$$\begin{aligned}\frac{(1/p)x^{up}}{u} &\;+\; \frac{u^2x^p}{u+1-ux^p} \;+\; \frac{(u+1)^2x^p}{u+2-(u+1)x^p} \;+\; \cdots \\ &= \frac{(1/p)\,x^{up}}{u+(u-1)x^p} \;+\; \frac{1^2x^p}{u+1+(u-2)x^p} \;+\; \frac{2^2x^p}{u+2+(u-3)x^p} \;+\; \cdots .\end{aligned} \tag{11}$$

Um diese Gleichung zu vereinfachen, dividieren wir beide Seiten durch $(1/p)x^{up}$, nehmen je den Kehrwert und subtrahieren davon u. Die Behauptung (11) geht damit über in

$$\begin{aligned}\frac{u^2x^p}{u+1-ux^p} &\;+\; \frac{(u+1)^2x^p}{u+2-(u+1)x^p} \;+\; \frac{(u+2)^2x^p}{u+3-(u+2)x^p} \;+\; \cdots \\ &= (u-1)x^p + \frac{1^2x^p}{u+1+(u-2)x^p} \;+\; \frac{2^2x^p}{u+2+(u-3)x^p} \;+\; \cdots .\end{aligned} \tag{12}$$

Zum Beweis von (12) benötigen wir ein weiteres Resultat aus [3], nämlich die „schon von Euler angegebene“ Formel (22) auf S. 290:

$$\begin{aligned}
&\frac{\alpha\beta\xi}{\gamma-(1+\alpha+\beta-\gamma)\xi} \;+\; \frac{(\alpha+1)(\beta+1)\xi}{\gamma+1-(2+\alpha+\beta-\gamma)\xi} \\
&\quad+\; \frac{(\alpha+2)(\beta+2)\xi}{\gamma+2-(3+\alpha+\beta-\gamma)\xi} \;+\; \cdots \\
&= (\alpha+\beta-\gamma)\xi + \frac{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)\xi}{\gamma-(1-\alpha-\beta+\gamma)\xi} \;+\; \frac{(\gamma-\alpha+1)(\gamma-\beta+1)\xi}{\gamma+1-(2-\alpha-\beta+\gamma)\xi} \;+\; \cdots
\end{aligned}$$

(diesen Hinweis verdanke ich Herrn W. Hofmann, Erlangen). Setzt man hier $\alpha := \beta := u$, $\gamma := u+1$ und $\xi := x^p$, so resultiert die behauptete Formel (12). Damit ist auch (c) bewiesen.

4 Schlussbemerkungen

Wir haben gesehen, dass der Abbrechfehler der Leibniz-Reihe als ein unendlicher Kettenbruch dargestellt werden kann, der viel schneller konvergiert als die Ausgangsreihe. Dieses Resultat ist in dem folgenden Zusammenhang von besonderem Interesse:

Im Jahr 1988 hat Roy D. North (Colorado Springs) die folgende *endliche*, aus 500 000 Reihengliedern bestehende Summe errechnet:

$$\begin{aligned}
S &:= 4\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots-\frac{1}{999999}\right) \\
&= 3.\ 14159\ \underline{0}6535\ 89793\ 24\underline{0}46\ 26433\ 832\underline{6}9\ 50288\ 4197\ \ldots\ .
\end{aligned}$$

North stellte mit großer Überraschung fest, dass die Zahl S, so weit sie hier zu sehen ist, nur in den vier unterstrichenen Ziffern von der Dezimalbruchdarstellung der angestrebten Zahl π abweicht. (Dieses Phänomen ist offenbar schon früher bemerkt worden, siehe eine Nachbemerkung in [2].) Nachdem North Mathematiker gebeten hatte, das Phänomen zu erklären, erschienen 1989 und 1997 die Arbeiten [2] und [1], die durchaus zutreffende Erklärungen enthielten. Die hier vorgestellte Kettenbruchdarstellung des Abbrechfehlers kannten die Verfasser allerdings nicht, und deshalb fehlt in jenen Artikeln die folgende, besonders einfache Auskunft:

Wenn man die Formel (2) mit 4 multipliziert und $n := 500\,000$ setzt, erhält man

$$\pi = 4\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots-\frac{1}{999999}\right) \;+\; D$$

mit

$$D := 4F_{500\,000} = \frac{2}{1\,000\,000} \;+\; \frac{1^2}{1\,000\,000} \;+\; \frac{2^2}{1\,000\,000} \;+\; \frac{3^2}{1\,000\,000} \;+\; \cdots\ .$$

Es genügt, die ersten vier Teilbrüche dieses Kettenbruchs zu verwenden, um (zum Beispiel mit Hilfe von Mathematica) die folgende Dezimaldarstellung von D zu erhalten:

$$D = 0.\ 00000\ 19999\ 99999\ 99800\ 00000\ 00009\ 99999\ 99998\ 78000\ \ldots\ .$$

Da dieser Dezimalbruch, so weit er hier zu sehen ist, hauptsächlich aus Nullen und Neunen besteht, ist leicht einzusehen, dass die Anfangsstücke der Dezimaldarstellungen von π und $S = \pi - D$ in den allermeisten Ziffern übereinstimmen müssen.

Abschließend möchte ich den folgenden Mathematikern danken, die mir durch Informationen geholfen haben: G. Almkvist (Lund), W.-D. Geyer und W. Hofmann (Erlangen), T. Hefer (Bonn).

Literatur

[1] Almkvist, G.: Many correct digits of π, revisited. *Amer. Math. Monthly* 104 (1997), 351–353.

[2] Borwein, J.M.; Borwein, P.B.; Dilcher, K.: Pi, Euler numbers, and asymptotic expansions. *Amer. Math. Monthly* 96 (1989), 681–687.

[3] Perron, O.: *Die Lehre von den Kettenbrüchen.* Band II, 3. Auflage. Teubner, Stuttgart 1957.

Wilfried Pigulla
Breslauer Str. 63
D–94036 Passau, Deutschland