Aufgaben

Objekttyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **61 (2006)**

PDF erstellt am: **30.06.2024**

Elem. Math. 61 (2006) 125 – 129
0013-6018/06/030125-5

Elemente der Mathematik

Aufgaben

Neue Aufgaben

Lösungen sind bis zum 10. Februar 2007 erbeten. Sie können auf postalischem Weg (bevorzugt) an

Dr. Hansruedi Widmer, Boldistrasse 52, Rieden, CH–5415 Nussbaumen

gesandt werden. In einem gängigen Format abgefasste Lösungen können auch als Attachment über die E-Mail-Adresse `h.widmer@alumni.ethz.ch` eingereicht werden.

Aufgabe 1233: Es sei p eine Primzahl der Form $p = 3n - 1$ $(n \geq 2)$. Im endlichen Körper $GF(p)$ betrachten wir die Gleichung $a^3 + b^3 \equiv c^3 \pmod{p}$. Besitzt sie Lösungen in $GF(p) \setminus \{0\}$? Wie lautet die Antwort für die Primzahlen $p = 13$, 19 und 1291, welche von der Form $p = 3n + 1$ sind?

Roland Wyss, Flumenthal, CH

Aufgabe 1234: Ein Dreieck mit den Seiten $a \leq b \leq c$ besitze den Inkreisradius ϱ und den Umkreisradius r. Beweise:

$$a + b - c \leq 2\varrho\sqrt{3} \tag{1}$$

$$2\varrho\sqrt{3} \leq b + c - a < 4r \tag{2}$$

$$2\varrho < c + a - b \leq 2r \tag{3}$$

Stanley Rabinowitz, Chelmsford, USA

Aufgabe 1235 (Die einfache dritte Aufgabe): Eine Sehne der konstanten Länge ℓ gleitet entlang der Parabel $p : y = ax^2$. Dabei durchläuft der Sehnenmittelpunkt eine Kurve k. Schliesst diese mit der Parabel p einen endlichen Flächeninhalt ein?

Roland Wyss, Flumenthal, CH

Lösungen zu den Aufgaben in Heft 3, 2005

Aufgabe 1221. Es seien f und g zwei reelle im Intervall $[a, b]$ differenzierbare Funktionen mit $f(x) > g(x)$ für alle $x \in [a, b]$, und es sei c fest gewählt mit $0 < c < b - a$. Wir betrachten nun Flächen, die vom Graphen von f, vom Graphen von g und zwei zur y-Achse parallelen Geraden im Abstand c eingeschlossen werden.

Was bedeutet es für den Inhalt einer solchen Fläche, wenn die Randstrecken auf den Parallelen gleich lang sind, und welche drei Fälle können dabei auftreten? Man finde auch ein Beispiel, bei welchem jeder Fall genau einmal auftritt, wobei die drei zugehörigen Flächen (inklusive Rand) paarweise disjunkt sein sollen.

Karl Wirth, Zürich, CH

Auswertung der eingesandten Lösungen. Es sind vier Lösungsbeiträge zu dieser Aufgabe eingetroffen, nämlich von Walter Burgherr (Rothenburg, CH), Johannes Ebersold (St. Gallen, CH), Walther Janous (Innsbruck, A) und Roland Wyss (Flumenthal, CH).

Wir folgen den Lösungen von *Walter Burgherr* und *Roland Wyss*: Die betrachteten Flächen werden durch ein Integral als Funktion der unteren Intervallgrenze x dargestellt:

$$A(x) = \int_x^{x+c} (f(t) - g(t))\,\mathrm{d}t.$$

Dieses Integral wird nun zwei Mal abgeleitet:

$$\begin{aligned} A'(x) &= f(x+c) - g(x+c) - (f(x) - g(x)) \\ A''(x) &= f'(x+c) - g'(x+c) - (f'(x) - g'(x)). \end{aligned}$$

Wenn die Randstrecken auf den Parallelen gleich lang sind, gilt

$$f(x+c) - g(x+c) = f(x) - g(x).$$

Die erste Ableitung $A'(x)$ verschwindet also, A ist also extremal oder hat einen Terrassenpunkt:

- A hat ein lokales Maximum, falls
$$A''(x) < 0 \Longleftrightarrow f'(x+c) - g'(x+c) < f'(x) - g'(x).$$
- A hat ein lokales Minimum, falls
$$A''(x) > 0 \Longleftrightarrow f'(x+c) - g'(x+c) > f'(x) - g'(x).$$
- Damit A ein Terrassenpunkt ist, ist es notwendig, dass
$$A''(x) = 0 \Longleftrightarrow f'(x+c) - g'(x+c) = f'(x) - g'(x).$$

Wir konstruieren ein Beispiel mit $a = -4$, $b = 4$, $c = 2$ mit Hilfe des Ansatzes

$$f(x) = (x^3 - x)(px^2 + q) + f_0, \qquad g(x) \equiv 0.$$

Die zweite der drei Forderungen für gleich lange Parallelstrecken

$$f(-4) = f(-2), \qquad f(-1) = f(1), \qquad f(2) = f(4)$$

ist durch den Ansatz für jede Wahl der Parameter erfüllt, die anderen beiden führen auf die Bedingung $q = -\frac{52}{3}p$. Setzt man $p = -3$, ergibt sich

$$f(x) = -3x^5 + 55x^3 - 52x + f_0,$$

und mit $f_0 = 700$ stellt man sicher, dass f auf dem Intervall $[-4, 4]$ positiv ist. Die Flächenfunktion

$$A(x) = \int_x^{x+2} f(t)\mathrm{d}t = -6x^5 - 30x^4 + 30x^3 + 210x^2 + 240x + 1484$$

besitzt die Ableitungen

$$\begin{aligned} A'(x) &= -30(x+4)(x+1)^2(x-2) \\ A''(x) &= -60(x+1)(2x^2+4x-7) \\ A'''(x) &= -180(2x^2+4x-1). \end{aligned}$$

Für $x = -4$ gilt $A'(-4) = 0$, $A''(-4) = 1620 > 0$, und es liegt also ein lokales Minimum vor. Für $x = 2$ gilt $A'(2) = 0$, $A''(2) = -1620 < 0$, und es liegt somit ein lokales Maximum vor. Für $x = -1$ hat man $A'(-1) = A''(-1) = 0$, $A'''(-1) = 540 \neq 0$, was einen Terrassenpunkt liefert.

Aufgabe 1222. Bestimme jene aus genau fünf Ziffern bestehenden Mengen M, die die Eigenschaft haben, dass die Aussage „Jede Quadratzahl 1, 4, 9, ... enthält mindestens eine Ziffer aus M“ wahr ist.

Peter Hohler, Aarburg, CH

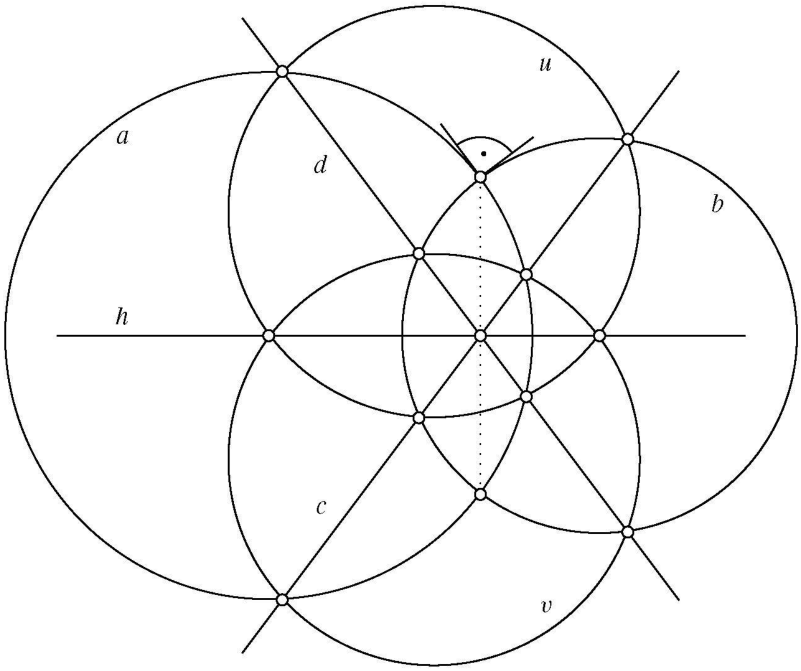
Auswertung der eingesandten Lösungen. Es sind 15 Lösungen eingegangen, nämlich von Jany C. Binz (Bolligen, CH), Peter Bundschuh (Köln, D), Walter Burgherr (Rothenburg, CH), Hans Egli (Zürich, CH), Thomas Fournier (Fribourg, CH), Frieder Grupp (Schweinfurt, D), Walther Janous (Innsbruck, A), Joachim Klose (Bonn, D), Dieter Koller (Zürich, CH), Harald Merk (Biberach, D), Volkhard Schindler (Berlin, D), Jürgen Spilker (Freiburg, D), Albert Stadler (Dübendorf, CH), Gerhard Wanner (Genève, CH), Roland Wyss (Flumenthal, CH).

Die meisten Einsender argumentieren wie *Peter Bundschuh*: Wegen $1^2 = 1$, $2^2 = 4$, $3^2 = 9$ müssen die drei Ziffern 1, 4, 9 zu jedem der gesuchten M gehören. Wegen $5^2 = 25$ muss jedes dieser M eine der Ziffern 2 und 5 enthalten; analog muss wegen $6^2 = 36$ jedes M eine der Ziffern 3 und 6 enthalten. Schreiben wir also $M = \{1, 4, 9, a, b\}$, so bleiben für (a, b) die vier Möglichkeiten $(2, 3)$, $(3, 5)$, $(2, 6)$ und $(5, 6)$. Wegen $26^2 = 676$ scheiden die ersten beiden aus, und es bleiben für die gesuchten M nur noch die Kandidaten

$$\{1, 2, 4, 6, 9\} \qquad \text{und} \qquad \{1, 4, 5, 6, 9\}.$$

Jede dieser beiden Mengen M hat aber auch die Eigenschaft, dass jede Quadratzahl n^2, $n \in \mathbb{N}$, eine Ziffer aus M enthält. Ist nämlich $n \equiv \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4 \pmod{10}$, so ist 1, 4, 9, 6 die letzte Ziffer von n^2; ist $n \equiv 5 \pmod{10}$, so endet n^2 mit der Ziffernfolge 25. Ist schliesslich n durch 10 teilbar, etwa $n = \ell \cdot 10^k$ mit nicht durch 10 teilbarem ℓ, so endet n^2 mit $2k$ Nullen, und davor steht ℓ^2, auf welches sich die vorangegangenen Überlegungen anwenden lassen.

Aufgabe 1223 (Die einfache dritte Aufgabe). Beweise die folgende Schliessungsfigur: Die Kreise a und b stehen zueinander senkrecht; die beiden Geraden c und d gehen durch den Mittelpunkt der gemeinsamen Sehne von a und b und liegen symmetrisch bezüglich der Zentralen h. Die Kreise u und v schneiden sich in den Zentren der Kreise a und b.



Roland Wyss, Flumenthal, CH

Auswertung der eingesandten Lösungen. Es sind Beiträge von neun Lösern eingetroffen: Jany C. Binz (Bolligen, CH), Walter Burgherr (Rothenburg, CH), Johannes Ebersold (St. Gallen, CH), Hans Egli (Zürich, CH), Walther Janous (Innsbruck, A), Dieter Koller (Zürich, CH [zwei Lösungen]), Volkhard Schindler (Berlin, D), Martinus van Hoorn (Appingedam, NL [drei Lösungen]), Walter Vetsch (St. Gallen, CH).

Fast alle Lösungen verwenden – wie die unten abgedruckte – analytische Geometrie. Zwei der Lösungen basieren auf Resultaten der Spiegelungsgeometrie und benützen insbesondere, dass der Kreis b unter der Inversion am Kreis a festbleibt. *Johannes Ebersold* nimmt die Zentrale h als x-Achse und die Potenzlinie der beiden Kreise a und b als y-Achse. Die

Zentren von a und b seien $(-p, 0)$ und $(q, 0)$ mit $p > 0$, $q > 0$. Da die Kreise a und b sich rechtwinklig schneiden, sind $(0, \pm\sqrt{pq})$ die Koordinaten der Schnittpunkte. Für die beiden Kreisgleichungen ergibt sich also

$$x^2 + 2px + y^2 - pq = 0 \qquad \text{und} \qquad x^2 - 2qx + y^2 - pq = 0.$$

Für die Gleichung von u (oder v) gelte

$$x^2 + y^2 + rx + sy + t = 0.$$

Dann sind

$$(r - 2p)x + sy + t + pq = 0 \qquad \text{und} \qquad (r + 2q)x + sy + t + pq = 0$$

die Gleichungen der Potenzlinien d und c von u mit a und b. Weil diese durch $(0, 0)$ gehen und entgegengesetzt gleiche Steigungen besitzen müssen, folgt

$$t = -pq \qquad \text{und} \qquad r - 2p = -(r + 2q),$$

woraus sich $r = p - q$ ergibt. Demnach lautet die Gleichung für u (oder v)

$$x^2 + y^2 + (p - q)x + sy - pq = 0.$$

Offensichtlich wird sie von den Mittelpunkten von a und b erfüllt.