Hopf-Faserungen und Hopf-Invariante

Elem. Math. 65 (2010) 193 – 200
0013-6018/10/040193-8
DOI 10.4171/EM/159

Elemente der Mathematik

Hopf-Faserungen und Hopf-Invariante

Guido Mislin

1 Einleitung

Ein *topologischer Raum* besteht aus einer Menge X, zusammen mit einer Familie von ausgezeichneten Teilmengen, die man *offen* nennt. Die offenen Teilmengen von X müssen den folgenden Axiomen genügen: Die leere Menge $\emptyset \subset X$ sowie $X \subset X$ sind offen; die Vereinigung einer Familie von offenen Mengen ist offen; der Durchschnitt von endlich vielen offenen Mengen ist offen. Zum Beispiel können wir den euklidischen Raum $\mathbb{R}^n$ der reellen n-Tupel wie folgt als topologischen Raum auffassen: Eine Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^n$ ist *offen*, falls es zu jedem $x \in A$ ein $\epsilon > 0$ gibt, sodass alle $y \in \mathbb{R}^n$, deren Abstand zu x kleiner als ϵ ist, zu A gehören. Eine beliebige Teilmenge B eines topologischen Raumes X kann selbst als topologischer Raum aufgefasst werden, indem man eine Teilmenge $C \subset B$ als *offen* erklärt, wenn C von der Form $B \cap A$ ist für eine offene Teilmenge A von X. Insbesondere fassen wir die Einheitssphäre $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ und das Einheitsintervall $I = [0, 1] \subset \mathbb{R}$ auf diese Weise als topologische Räume auf. Sind X und Y topologische Räume, so schreiben wir $X \times Y$ für den topologischen Raum, mit offenen Teilmengen jene, die als Vereinigung von Mengen $U \times V$ geschrieben werden können, wobei $U \subset X$ und $V \subset Y$ offen sind.

Eine Funktion $f\colon X \to Y$ zwischen topologischen Räumen heisst *stetig*, falls für jede offene Teilmenge Z von Y das Urbild $f^{-1}(Z) \subset X$ offen ist; eine stetige Funktion $X \to Y$ nennen wir kurz eine *Abbildung*. Die topologischen Räume X und Y heissen *homöomorph*, falls es zueinander inverse Abbildungen $X \to Y$ und $Y \to X$ gibt. Eine Grundaufgabe der Topologie besteht darin, topologische Räume bis auf Homöomorphie zu klassifizieren. Eine gröbere und etwas zugänglichere Klassifikation verwendet den Begriff der *Homotopie*. Zwei Abbildungen $f, g\colon X \to Y$ heissen *homotop*, wenn es eine Abbildung $F\colon X \times I \to Y$ gibt mit $F(\cdot, 0) = f$ und $F(\cdot, 1) = g$. Die Räume X und Y heissen *homotopie-äquivalent*, falls es Abbildungen $f\colon X \to Y$ und $g\colon Y \to X$ gibt, sodass $g \circ f$ homotop zur identischen Abbildung von X und $f \circ g$ homotop zur identischen Abbildung von Y ist. Wir schreiben $[X, Y]$ für die Menge der Homotopieklassen von Abbildungen $X \to Y$. Eine Abbildung $f\colon X \to Y$ heisst *wesentlich*, wenn bei jeder zu f homotopen Abbildung $g\colon X \to Y$ die Bildmenge $g(X)$ aus ganz Y besteht.

Wir werden im Folgenden eine Reihe von weiteren Begriffen aus der Topologie verwenden (Mannigfaltigkeiten, Vektorfelder, Abbildungskegel, simpliziale Approximation etc.), ohne auf deren Definition einzugehen. Wir verweisen dazu auf die reichliche Fachliteratur.

Schon für Abbildungen zwischen Sphären ist die Klassifikation bis auf Homotopie weitgehend unbekannt. In diesem Fall besitzt die Menge $[S^m, S^n] =: \pi_m(S^n)$ eine natürliche Gruppenstruktur: *Die Homotopiegruppen der Sphären*. Diese sind für $m \leq n$ elementar zu berechnen. Ist $m < n$, so sind alle Abbildungen $f\colon S^m \to S^n$ unwesentlich. Dies folgt aus der Tatsache, dass wir f bis auf Homotopie durch eine simpliziale Abbildung approximieren können, deren Bildmenge aus Dimensionsgründen nicht aus ganz S^n bestehen kann, und es gibt offensichtlich nur eine Homotopieklasse von unwesentlichen Abbildungen mit Zielraum S^n:

$$\pi_m(S^n) = 0 \quad \text{für} \quad m < n\,.$$

Für den Fall $m = n$ verwendet man den auf Brouwer [4] zurückgehenden Begriff des *Grades* $d(f) \in \mathbb{Z}$ einer Abbildung $f\colon M^n \to N^n$ zwischen geschlossenen orientierten Mannigfaltigkeiten der Dimension n. Der Grad hängt nur von der Homotopieklasse von f ab, und für $N^n = S^n$ gilt, dass es zu jeder ganzen Zahl genau eine Homotopieklasse von Abbildungen $M^n \to S^n$ gibt. Der Grad definiert einen Gruppenisomorphismus

$$d\colon \pi_n(S^n) \xrightarrow{\cong} \mathbb{Z}\,.$$

In der viel zitierten Arbeit [8] hat Heinz Hopf das erste Beispiel einer wesentlichen Abbildung $S^N \to S^n$ mit $N > n$ beschrieben, die *Hopf-Faserung* $S^3 \to S^2$ (vgl. Abschnitt 2), mit *Hopf-Invariante* 1 (vgl. Abschnitt 3). Die Hopf-Faserung hat viele interessante Eigenschaften und steht am Anfang einer rasanten Entwicklung der algebraischen Topologie, insbesondere der Theorie der gefaserten Räume und der Lieschen Gruppen, wie die kurz auf [9] folgenden, von Hopf betreuten Dissertationen von Eduard Stiefel [16], Beno Eckmann [5], Werner Gysin [6] und Hans Samelson [14] bezeugen. Die vielen neuen Ideen brachten Licht in die Berechnung der mysteriösen Homotopiegruppen der Sphären. Doch auch eine Reihe anderer Fragen ist überraschend mit Hopf-Faserungen und Hopf-Invarianten verknüpft. So etwa die folgenden:

- Für welche n ist die Sphäre S^n parallelisierbar? (Eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit heisst parallelisierbar, falls sie n Vektorfelder zulässt, die in jedem Punkt linear unabhängig sind.)
- Für welche n existert eine reelle Divisionsalgebra der Dimension n? (Eine n-dimensionale reelle Divisionsalgebra ist ein n-dimensionaler reeller Vektorraum V mit einer $\mathbb{R}$-bilinearen Multiplikation $V \times V \to V$, $(x, y) \mapsto x \cdot y$, ohne Nullteiler und mit einem Einselement $1 \in V$, d.h. aus der Gleichung $x \cdot y = 0$ folgt stets, dass mindestens eine der Grössen x, y gleich 0 sein muss, und es gilt $1 \cdot x = x \cdot 1 = x$.)
- Für welche n ist S^n eine topologische Gruppe, oder allgemeiner, ein H-Raum?

2 Hopf-Faserungen

Hopf definiert in [8, §5] eine Abbildung

$$\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3, \quad (x, y, z, t) \mapsto (u, v, w)$$

mittels

$$u = 2(xz + yt), \; v = 2(yz - xt), \; w = x^2 + y^2 - z^2 - t^2.$$

Wegen

$$u^2 + v^2 + w^2 = (x^2 + y^2 + z^2 + t^2)^2$$

geht dabei die Einheitssphäre $S^3 \subset \mathbb{R}^4$ in die Einheitssphäre $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ über. Wir schreiben

$$H_2\colon S^3 \to S^2, \qquad H_2(x, y, z, t) = (u, v, w)$$

für diese Abbildung. Es gilt, wie man aus den Formeln für u, v und w leicht nachrechnet, die Relation

$$u^2 + v^2 = 4(x^2 + y^2)(z^2 + t^2),$$

und somit besteht das Urbild $H_2^{-1}(0, 0, 1)$ genau aus jenen Punkten $(x, y, z, t) \in S^3$, für welche $z = t = 0$ ist, also aus einem Grosskreis, der in der (x, y)-Ebene liegt. Eine ähnliche Überlegung zeigt, dass allgemein für $Q \in S^2$ das Urbild $H_2^{-1}(Q)$ aus einem Grosskreis der S^3 besteht, einer *Faser*, und S^3 ist als Menge die disjunkte Vereinigung

$$S^3 = \coprod_{Q \in S^2} H_2^{-1}(Q)$$

von Fasern. Die Hopf-Abbildung $H_2\colon S^3 \to S^2$ ist auch im heutigen (technischen) Sinn eine Faserung: Sie hat die *Homotopie-Hochhebungseigenschaft*. Dies impliziert, dass H_2 wesentlich ist. Wäre nämlich H_2 unwesentlich und somit homotop zu einer konstanten Abbildung, so wäre die Hochhebung Id: $S^3 \to S^3$ von H_2 homotop zu einer Abbildung $\theta\colon S^3 \to S^3$ mit Bildmenge enthalten in einer Faser, also einem Grosskreis, und somit wäre θ unwesentlich. Nun hat aber die identische Abbildung $S^3 \to S^3$ den Grad 1, wogegen eine unwesentliche Selbstabbildung einer Sphäre den Grad 0 hat. Dies widerspricht der Homotopieinvarianz des Grades, und folglich muss H_2 wesentlich sein. Aus der langen exakten Homotopiefolge der Hopf-Faserung folgt noch etwas mehr:

$$\pi_3(S^2) = \langle H_2 \rangle \cong \mathbb{Z}.$$

Die Hopf-Faserung $S^3 \to S^2$ kann unter Verwendung von komplexen Koordinaten auch wie folgt beschrieben werden. Sei

$$S^3 = \{(a, b) \in \mathbb{C}^2 \mid |a|^2 + |b|^2 = 1\}$$

und S^2 die Riemannsche Zahlenkugel $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Dann ist

$$H_2\colon S^3 \to S^2, \quad (a, b) \mapsto ba^{-1}.$$

Hopf verallgemeinert dies in [9], indem er $\mathbb{C}$ durch reelle Divisionsalgebren der Dimension 4 und 8 ersetzt, nämlich die Hamiltonsche Quaternionenalgebra $\mathbb{H}$, resp. die Algebra der Cayley-Oktaven $\mathbb{O}$. Die Alexandroffschen Kompaktifizierungen $\mathbb{H}\cup\{\infty\}$ und $\mathbb{O}\cup\{\infty\}$ sind homöomorph zu S^4 und S^8; sie spielen die Rolle der Riemannschen Zahlenkugel, die wir bei der Beschreibung von H_2 verwandten. Fasst man nun S^7, resp. S^{15} als Einheitssphären in $\mathbb{H}\times\mathbb{H}$, resp. $\mathbb{O}\times\mathbb{O}$ auf, so erhält man Abbildungen

$$\begin{aligned} H_4 &: S^7 \to S^4, \quad (X, Y) \mapsto YX^{-1}, \\ H_8 &: S^{15} \to S^8, \quad (X, Y) \mapsto YX^{-1}. \end{aligned}$$

Wählen wir $A \in \mathbb{H} \subset S^4$ so liegen die Punkte $P \in S^7$ mit $H_4(P) = A$ auf der $\mathbb{H}$-Geraden in $\mathbb{H}^2$ mit der Gleichung $Y = AX$, welche S^7 in einer Sphäre S^3 schneidet (für $A = \infty \in S^4$ ist $H_4^{-1}(A)$ gleich $\{(0, Y) \in \mathbb{H}^2 \mid |Y| = 1\}$, also auch homöomorph zur S^3). Ähnlich im Falle von S^{15}, welche durch die Urbilder von H_8 in Fasern homöomorph zu S^7 zerlegt wird. Dies sind die Hopf-Faserungen

$$S^{2k-1} \longrightarrow S^{4k-1} \xrightarrow{H_{2k}} S^{2k}, \quad k = 1, 2, 4.$$

Beno Eckmann hat in seiner Dissertation [5, Abschnitt 8, Satz 6'] gezeigt, dass die zu diesen Faserungen gehörigen langen exakten Homotopiesequenzen via der Suspensionsabbildung

$$\Sigma\colon \pi_{n-1}(S^{2k-1}) \to \pi_n(S^{2k})$$

aufspalten. Für $n \geq 1$ und $k = 1, 2, 4$, gilt

$$\begin{gathered} \pi_n(S^{4k-1}) \oplus \pi_{n-1}(S^{2k-1}) \cong \pi_n(S^{2k}), \\ ([u], [v]) \mapsto [H_{2k} \circ u] + \Sigma[v]. \end{gathered}$$

Es drängt sich die Frage auf: Gibt es für andere Werte $\ell, m, n \geq 1$ Sphärenfaserungen $S^\ell \to S^m \to S^n$? Die wohl überraschende Antwort ist: Nein! Wir skizzieren im Anschluss an Theorem 3.2 die Argumente, die zu dieser Einsicht führen.

3 Hopf-Invariante

In [9] definiert Hopf für Abbildungen $f\colon S^{2n-1} \to S^n$ eine Homotopieinvariante $\gamma(f) \in \mathbb{Z}$, die *Hopf-Invariante*. Zur Definition verwendet er Triangulierungen der Sphären. Man kann annehmen, dass f eine simpliziale Abbildung ist. Ist T^{2n-1} ein Simplex von S^{2n-1}, das auf ein Simplex τ^n von S^n abgebildet wird, dann ist das Urbild eines inneren Punktes ξ von τ^n eine $(n-1)$-dimensionale Zelle. Durch Summation über die n-Simplexe von S^n liefert dies einen simplizialen Zyklus $\phi(\xi)$ in einer Unterteilung von S^{2n-1}. Je zwei solche Zyklen $\phi(\xi_1)$ und $\phi(\xi_2)$ haben eine Verschlingungszahl $\gamma(f)$. Das Vorzeichen von $\gamma(f)$ hängt nur von der Orientierung der Sphäre S^{2n-1}, nicht von jener der Bildsphäre S^n ab. Hopf zeigt, dass für n ungerade $\gamma(f) = 0$ ist. Die Hopf-Invariante hat folgende Eigenschaften:

- $\gamma(H_{2k}) = 1$, für $k = 1, 2, 4$.
- Sind $g\colon S^{4k-1} \to S^{4k-1}$ und $h\colon S^{2k} \to S^{2k}$ gegeben, so gilt für jede Abbildung $f\colon S^{4k-1} \to S^{2k}$
$$\gamma(h \circ f \circ g) = d(h)^2 \gamma(f) d(g) .$$
- $\gamma\colon \pi_{4k-1}(S^{2k}) \to \mathbb{Z}$ ist ein Homomorphismus und $2\mathbb{Z}$ liegt im Bild von γ.

Zur Konstruktion einer Abbildung $S^{4k-1} \to S^{2k}$ mit Hopf-Invariante 2 geht Hopf wie folgt vor: Eine Abbildung $F\colon S^r \times S^r \to S^r$ hat den *Typ* (p, q), falls ihre Einschränkung auf die erste, resp. zweite Sphäre den Grad p, resp. q hat. Wir fassen S^{2r+1} als Identifizierungsraum von $S^r \times S^r \times I$ auf, mit $(x, y_1, 0) \sim (x, y_2, 0)$ und $(x_1, y, 1) \sim (x_2, y, 1)$. Ferner fassen wir S^{r+1} als Identifizierungsraum von $S^r \times I$ auf mit $(z_1, i) \sim (z_2, i)$ für $i = 0, 1$. Jede Abbildung $F\colon S^r \times S^r \to S^r$ definiert nun eine neue Abbildung (*Hopf-Konstruktion*)

$$h(F)\colon S^{2r+1} \to S^{r+1}, \quad [(x, y, t)] \mapsto [F(x, y), t] .$$

Hopf zeigt, dass wenn F vom Typ (p, q) ist, $h(F)$ die Hopf-Invariante pq hat. Er definiert eine Abbildung $\phi_r\colon S^r \times S^r \to S^r$ wie folgt: Sind $x, y \in S^r \subset \mathbb{R}^{r+1}$ und ist E_y die Ebene durch den Mittelpunkt von S^r, orthogonal zum Durchmesser durch y, so ist $\phi_r(x, y)$ derjenige Punkt z, in den x bei der Spiegelung an E_y übergeht. Offensichtlich hat $\phi(\,\cdot\,, y)$ für festes y den Grad -1 und Hopf zeigt, dass der Grad von $\phi_r(x, \,\cdot\,)$ gleich 0 oder ± 2 ist, je nachdem ob r gerade oder ungerade ist. Für $r = 2k - 1$ ergibt dies durch Zusammensetzen mit einer geeigneten Selbstabbildung von $S^r \times S^r$ via der Hopf-Konstruktion Abbildungen $S^{4k-1} \to S^{2k}$ mit beliebiger gerader Hopf-Invariante. Es folgt insbesondere, dass es unendlich viele Klassen von wesentlichen Abbildungen $S^{4k-1} \to S^{2k}$ gibt:

$$\mathbb{Z} \subset \pi_{4k-1}(S^{2k}), \quad k \geq 1 .$$

Im Jahre 1951 wurde von Jean-Pierre Serre [15] bewiesen, dass für $N > n$ die Homotopiegruppen $\pi_N(S^n)$ endlich sind, ausser in der soeben diskutierten Situation von $N = 4k - 1$ und $n = 2k$.

Ist S^r eine topologische Gruppe, so hat die Gruppenmultiplikation $\mu\colon S^r \times S^r \to S^r$ den Typ $(1, 1)$. Es folgt, dass $h(\mu)$ die Hopf-Invariante 1 besitzt. Die Sphären S^1 und S^3 sind topologische Gruppen, die Gruppe der komplexen Zahlen, resp. Quaternionen, mit Norm 1. Fassen wir die Sphäre S^7 als Cayley-Zahlen mit Norm 1 auf, so definiert die Multiplikation dieser Zahlen eine Abbildung $S^7 \times S^7 \to S^7$ vom Typ $(1, 1)$. Die Hopfsche Konstruktion, ausgeübt auf diese drei Multiplikationen, entspricht den oben beschriebenen Hopf-Faserungen.

Eine Abbildung $F\colon S^r \times S^r \to S^r$ vom Typ $(1, 1)$ heisst eine H-Raum Struktur. Es folgt:

(I) Ist S^r ein H-Raum, so gibt es eine Abbildung $S^{2r+1} \to S^{r+1}$ mit Hopf-Invariante 1.

Der Zusammenhang mit der Parallelisierbarkeit der Sphären ist wie folgt: Sei $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ parallelisierbar. Dann gibt es Vektorfelder $v_i\colon S^n \to \mathbb{R}^{n+1}$, $1 \leq i \leq n$, die für alle $x \in S^n$ linear unabhängig sowie orthogonal zu x sind. Bezeichnet e_1 den ersten Basisvektor von $\mathbb{R}^{n+1}$, so hat die Projektion

$$\mathrm{GL}_{n+1}(\mathbb{R}) \to S^n, \quad M \mapsto \pi(M) := Me_1/||Me_1||$$

einen Schnitt $x \mapsto A(x)$, wobei $A(x)$ die Matrix mit den Spalten $(x, v_1(x), \ldots, v_n(x))$ bezeichnet. Die Abbildung

$$S^n \times S^n \to S^n, \quad (x, y) \mapsto \pi(A(x)A(y))$$

ist dann eine Abbildung vom Typ (1, 1) und es folgt, dass S^n ein H-Raum ist. Also gilt:

(II) Ist S^n parallelisierbar, so ist S^n ein H-Raum.

Die Sphären S^{2k} gerader Dimension sind nicht parallelisierbar, denn $\chi(S^{2k}) \neq 0$ (besitzt eine geschlossene Mannigfaltigkeit M ein nicht-verschwindendes Vektorfeld, so ist die Euler-Charakteristik $\chi(M) = 0$, vgl. Hopf [7]). Dass S^1, S^3 und S^7 parallelisierbar sind, sieht man wie folgt: Die Gruppenmultiplikation, resp. die Multiplikation der Cayley-Zahlen im Fall von S^7, kann verwendet werden, um eine Basis im Tangentialraum eines festen Punktes in den Tangentialraum eines beliebigen Punktes zu transferieren, was einer Trivialisierung des Tangentialbündels entspricht. Aber zum Beispiel S^5 ist nicht parallelisierbar, wie Eckmann in seiner Dissertation [5] bewiesen hat. Im Jahre 1958 haben Michel Kervaire, Raoul Bott und John Milnor gezeigt, dass S^1, S^3 und S^7 die einzigen parallelisierbaren Sphären sind ([3], [11], [12]).

Die Projektion $p\colon \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \to S^n$, $v \mapsto v/||v||$ ist eine Homotopieäquivalenz und p ist linksinvers zur Einbettung $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$. Es folgt:

(III) Ist $\mathbb{R}^{n+1}$ eine reelle Divisionsalgebra, so ist S^n ein H-Raum.

Ist nämlich μ die Multiplikationsabbildung der Divisionsalgebra, so hat die Abbildung $S^n \times S^n \to S^n$, $(x, y) \mapsto p(\mu(x, y))$, den Typ (1, 1).

In seiner Dissertation von 1941 hat Gysin Faserungen von Mannigfaltigkeiten untersucht. Er bewies [6, Sätze 42, 43]:

(IV) Ist $n > 1$ und ist $\phi\colon S^m \to S^n$ eine Faserung mit Sphären als Fasern, so ist n gerade, $m = 2n - 1$, und die Hopf-Invariante von ϕ ist gleich ± 1.

Es gelang Frank Adams 1960 zu zeigen, dass es ausser in den Dimensionen der von Hopf konstruierten Abbildungen mit Hopf-Invariante 1, keine anderen gibt.

Theorem 3.1 (J.F. Adams [1]) *Eine Abbildung $f\colon S^{4k-1} \to S^{2k}$ mit $k \neq 1, 2,$ oder 4, hat eine gerade Hopf-Invariante $\gamma(f)$.*

Der erste Beweis [1] war lang und kompliziert. Er wurde später, mit Methoden der K-Theorie, transparent und kurz [2]. Hier sind einige Bemerkungen dazu: Ist $f\colon S^{4k-1} \to S^{2k}$ gegeben, so kann man den Abbildungskegel $C(f) = S^{2k} \cup_f e^{4k}$ bilden. Ist ξ ein Erzeugendes von $H^{2k}(C(f), \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ und η eines von $H^{4k}(C(f), \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$, so ist $\xi^2 = \pm\gamma(f)\eta$. Bezeichnet $\xi_2 \in H^{2k}(C(f), \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ die Reduktion von ξ modulo 2, so folgt der Satz betreffend der Hopf-Invariante, wenn man zeigen kann, dass $(\xi_2)^2 = 0$ ist falls $k \neq 1, 2, 4$. Dies wird in der Arbeit [2] von Adams und Atiyah unter Verwendung der Adams-Operationen in der K-Theorie bewiesen.

Aus den Eigenschaften der Steenrod-Operationen folgt, dass gilt $(\xi_2)^2 = Sq^{2k}(\xi_2)$. Weil die Steenrod-Operationen mit der Kohomologie-Suspension vertauschen, zeigt der oben skizzierte Beweis somit ferner, dass auch alle Suspensionen der Hopf-Faserungen H_{2k},

$$\Sigma^i(H_{2k})\colon S^{4k+i-1} \to S^{2k+i}, \quad k = 1, 2, 4, \text{ und } i \geq 0,$$

wesentlich sind, denn für diese Werte von k ist $Sq^{2k}(\xi_2) = \eta_2 \neq 0$, wobei η_2 die Reduktion von η modulo 2 bezeichnet.

Wir können wie folgt zusammenfassen:

Theorem 3.2 *Sei $k > 0$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(a) $k = 1, 2$ *oder* 4.
(b) *Es gibt eine Abbildung* $S^{4k-1} \to S^{2k}$ *mit Hopf-Invariante* 1.
(c) $\mathbb{R}^{2k}$ *ist eine reelle Divisionsalgebra.*
(d) S^{2k-1} *ist ein H-Raum.*
(e) *Es gibt ein n und eine Faserung* $S^n \to S^{2k}$, *deren Fasern Sphären sind.*
(f) S^{2k-1} *ist parallelisierbar.*

Die einzigen Sphären, die eine H-Raum Struktur zulassen, sind somit S^0, S^1, S^3 und S^7. Dass S^7 keine homotopie-assoziative H-Raum Struktur besitzt, wurde von Ioan James 1957 in [10] bewiesen. Folglich ist S^7 sicher keine topologische Gruppe (vgl. dazu auch Samelson [13]), und somit sind unter den Sphären nur S^0, S^1 und S^3 Gruppenräume.

Gibt es für ein $j > 1$ eine Faserung $S^i \to S^j$ mit Sphären als Fasern, so haben wir in (IV) gesehen, dass j gerade sein muss, $j = 2k$, und dass i die Form $4k - 1$ haben muss. Es folgt dann aus Theorem 3.2, dass nur die Werte $k = 1, 2$ und 4 in Frage kommen, und diese sind durch die Hopf-Faserungen realisiert.

Literatur

[1] Adams, J.F.: On the non-existence of elements of Hopf invariant one. *Ann. of Math.* 72 (1960), 603–632.

[2] Adams, J.F.; Atiyah, M.F.: K-Theory and the Hopf Invariant. *Quart. J. Math. Oxford* (2) 17 (1966), 31–38.

[3] Bott, R.; Milnor, J.: On the parallelizability of the spheres. *Bull. Amer. Math. Soc.* 64 (1958), 87–89.

[4] Brouwer, L.E.J.: Über Abbildungen von Mannigfaltigkeiten. *Math. Ann.* 71 (1911), 97–115.

[5] Eckmann, B.: Zur Homotopietheorie gefaserter Räume. *Comment. Math. Helv.* 14 (1941/42), 141–192.

[6] Gysin, W.: Zur Homologietheorie der Abbildungen und Faserungen von Mannigfaltigkeiten. *Comment. Math. Helv.* 14 (1942), 61–122.

[7] Hopf, H.: Vektorfelder in n-dimensionalen Mannigfaltigkeiten. *Math. Ann.* 96 (1926), 225–250.

[8] Hopf, H.: Über die Abbildungen der dreidimensionalen Sphäre auf die Kugelfläche. *Math. Ann.* 104 (1931), 637–665.

[9] Hopf, H.: Über die Abbildungen von Sphären auf Sphären niedrigerer Dimension. *Fund. Math.* 25 (1935), 427–440.

[10] James, I.M.: Multiplications on spheres. II. *Trans. Amer. Math. Soc.* 84 (1957), 545–558.

[11] Kervaire, M.A.: Non-parallelizability of the n-sphere for $n > 7$. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* 44 (1958) 3, 280–283.

[12] Milnor, J.: Some consequences of a theorem of Bott. *Ann. of Math.* 68 (1958), 444–449.

[13] Samelson, H.: Über Sphären, die als Gruppenräume auftreten. *Comment. Math. Helv.* 13 (1940/41), 144–155.

[14] Samelson, H.: Beiträge zur Topologie der Gruppen-Mannigfaltigkeiten. *Ann. of Math.* 42 (1941), 1091–1137.

[15] Serre, J-P.: Homologie singulière des espaces fibrés. Applications. *Ann. of Math.* 54 (1951), 425–505.

[16] Stiefel, E.: Richtungsfelder und Fernparallelismus in n-dimensionalen Mannigfaltigkeiten. *Comment. Math. Helv.* 8 (1935/36), 305–353.

Guido Mislin
Departement Mathematik
ETH Zürich, Schweiz
e-mail: `mislin@math.ethz.ch`

gegenwärtige Adresse:

Mathematics Department
Ohio-State University, USA
e-mail: `mislin@math.ohio-state.edu`