Aufgaben

Objekttyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **66 (2011)**

PDF erstellt am: **12.07.2024**

Elem. Math. 66 (2011) 132 – 135
0013-6018/11/030132-4
DOI 10.4171/EM/180

Elemente der Mathematik

Aufgaben

Neue Aufgaben

Lösungen sind bis zum 10. Februar 2012 erbeten und können auf postalischem Weg an

Dr. Stefan Grieder, Im eisernen Zeit 55, CH–8057 Zürich

gesandt werden. Lösungen, die in einem gängigen Format abgefasst sind, können als Attachment auch über die E-Mail-Adresse `stefan.grieder@hispeed.ch` eingereicht werden.

Aufgabe 1293: Unter welcher Bedingung kann ein gleichschenkliges Dreieck mit Basis a und Höhe h der Normalparabel (Quermass $p = \frac{1}{2}$) so einbeschrieben werden, dass alle Ecken auf der Parabel liegen?

Walter Burgherr, Rothenburg, CH

Aufgabe 1294: Bestimme alle natürlichen Zahlen n und k für die gilt

$$k^n \cdot n! = n^k \cdot k!$$

Horst Alzer, Waldbröl, D

Aufgabe 1295 (Die einfache dritte Aufgabe): Die Höhlenbewohner erfuhren den Zahlbegriff über die Mächtigkeiten von verschiedenen Mengen. Ihr Zahlbereich erstreckte sich wohl nur über die ersten paar natürlichen Zahlen; aber sie konnten bestimmt ein wenig addieren und multiplizieren. Beim Grübeln über Anzahlen von Vorfahren oder Nachkommen kamen sie dann auch aufs Potenzieren und im weiteren Verlauf zu der Frage, ob diese dritte Operation, ebenfalls kommutativ ist. Das erste interessante Gegenbeispiel wäre $2^3 \neq 3^2$. Gesucht ist also ein möglichst niederschwelliger Beweis dieses Sachverhaltes.

Christian Blatter, Greifensee, CH

Lösungen zu den Aufgaben in Heft 3, 2010

Aufgabe 1281. Man bestimme den Wert der Reihen

$$S = \sum_{n=2}^{\infty} \left(2 + n \log\left(1 - \frac{2}{n+1}\right)\right)$$

und

$$S^* = \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \left(n + \frac{1}{2}\right) \log\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right).$$

Raymond Mortini, Metz, F

Auswertung der eingesandten Lösungen. Es sind insgesamt 13 Lösungen eingegangen: Georghe Bercea (München, D), Hans Brandstetter (Wien, A), Peter Bundschuh (Köln, D), Henri Carnal (Bern, CH), Frieder Grupp (Schweinfurt, D), Walther Janous (Innsbruck, A), Joachim Klose (Bonn, D), Stephan Kocher (Sangernboden, CH), Walter Nohl (Steffisburg, CH), François Sigrist (Neuchâtel, CH), Jürgen Spilker (Freiburg, D), Albert Stadler (Herrliberg, CH) und Michael Vowe (Therwil, CH).

Alle Löser formen die Summen in Produkte um und verwenden die Stirlingsche Formel für die entstehenden Fakultäten. Wir folgen der Lösung von *Peter Bundschuh*.

In beiden Fällen betrachten wir die N-te Partialsumme, d.h. zuerst nach kurzer Rechnung

$$\begin{aligned} S_N = \sum_{n=2}^{N}(\ldots) &= 2(N-1) + \log\left(\prod_{n=2}^{N}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^n\right) \\ &= 2(N-1) + \log\left(\frac{2N!^2}{N^{2N+1}(1+\frac{1}{N})^N}\right). \end{aligned}$$

Verwendet man im Quotienten rechts die Stirlingsche Formel in Gestalt

$$N! = N^{N+\frac{1}{2}} e^{-N} \sqrt{2\pi}\, e^{\vartheta_N/(12N)} \tag{1}$$

mit $0 < \vartheta_N < 1$, so ergibt sich

$$S_N = 2N - 2 + \log\left(\frac{2N^{2N+1} 2\pi e^{\vartheta_N/(6N)}}{e^{2N} N^{2N+1}(1+\frac{1}{N})^N}\right) = \log\left(\frac{4\pi e^{\vartheta_N/(6N)}}{e^2(1+\frac{1}{N})^N}\right),$$

weshalb S_N bei $N \to \infty$ gegen $\log(4\pi e^{-3}) = \log(4\pi) - 3$ strebt.

Zweitens wird, erneut nach kurzer Rechnung,

$$S_N^* = \sum_{n=1}^{N}(\ldots) = N - \frac{1}{2}\log(N+1) - \log\left(\prod_{n=1}^{N}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\right) = N + \log\left(\frac{N!}{(N+1)^{N+\frac{1}{2}}}\right).$$

Hieraus folgt mit (1)

$$S_N^* = N + \log\left(\frac{N^{N+\frac{1}{2}}\sqrt{2\pi}\, e^{\vartheta_N/(12N)}}{e^N(N+1)^{N+\frac{1}{2}}}\right) = \log\left(\frac{\sqrt{2\pi}\, e^{\vartheta_N/(12N)}}{\left(1+\frac{1}{N}\right)^{N+\frac{1}{2}}}\right),$$

weshalb S_N^* bei $N \to \infty$ gegen $\log(\sqrt{2\pi}e^{-1}) = \frac{1}{2}\log(2\pi) - 1$ strebt.

Aufgabe 1282. Es sei M die Menge der natürlichen Zahlen, die (in der Dezimalschreibweise) genau eine Null enthalten und nicht durch Zehn teilbar sind. Welche Zahlen aus M haben die Eigenschaft, dass die Zahl, die nach dem Weglassen der Null entsteht, ein Teiler der ursprünglichen Zahl ist?

Peter Hohler, Aarburg, CH

Auswertung der eingesandten Lösungen. Von 16 Lesern sind Zuschriften eingetroffen: Georghe Bercea (München, D), Jany C. Binz (Bolligen, CH), Hans Brandstetter (Wien, A), Peter Bundschuh (Köln, D), Henri Carnal (Bern, CH), Hans Egli (Zürich, CH), Frieder Grupp (Schweinfurt, D), Walther Janous (Innsbruck, A), Dieter Koller (Zürich, CH), Walter Nohl (Steffisburg, CH), Beat Schweingruber (Zürich, CH), Fritz Siegerist (Küsnacht, CH), François Sigrist (Neuchâtel, CH), Jürgen Spilker (Freiburg, D), Albert Stadler (Herrliberg, CH) und Roland Wyss (Flumenthal, CH).

Da man in dieser Aufgabe nicht um eine Fallunterscheidung herum kommt, versuchen alle Löser eine solche geschickt einzugrenzen. Auf eine besonders elegante Art hat das *Fritz Siegerist* gemacht, dessen leicht modifizierte Lösung hier präsentiert wird.

Für eine einfachere Argumentation setzen wir nach der Ziffer 0 einen Dezimalpunkt. Die gesuchten Zahlen haben dann die Form $10n + r$ mit einer natürlichen Zahl n und einer dezimal-abbrechenden positiven Zahl $r < 1$.

Aus $\frac{10n+r}{n+r} = q$ folgt durch Umformen $\frac{q-1}{10-q} = \frac{n}{r} > 1$, weshalb für q als natürliche Zahl nur mehr 6, 7, 8 und 9 in Frage kommt. Wegen der genannten Ungleichungen liefern diese Werte der Reihe nach nur genau folgende 1, 1, 0 und 7 Lösungen:

$q = 6$: Aus $\frac{n}{r} = \frac{5}{4}$ folgt $n = 1$ und $r = \frac{4}{5}$ mit der Lösung 10.8.

$q = 7$: Aus $\frac{n}{r} = 2$ folgt $n = 1$ und $r = \frac{1}{2}$ mit der Lösung 10.5.

$q = 8$: Aus $\frac{n}{r} = \frac{7}{2}$ folgt $r = \frac{2n}{7}$ ohne Lösung, da r abbrechend sein muss.

$q = 9$: Aus $\frac{n}{r} = 8$ folgt $r = \frac{n}{8}$ und $n \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ mit den Lösungen 10.125, 20.25, 30.375, 40.5, 50.625, 60.75 70.785.

Die gesuchten Lösungszahlen heissen somit 105, 108, 405, 2 025, 6 075, 10 125, 30 375, 50 625, 70 875; es sind deren 9.

Bemerkungen: *Henri Carnal* stellt fest, dass die Bedingung genau eine Null unwesentlich ist, solang man nur eine Null entfernen darf. Darf man aber mehrere Nullen entfernen, so gibt es weitere Möglichkeiten etwa $10\,032 = 76 \cdot 132$ oder $10\,005 = 667 \cdot 15$.

Aufgabe 1283 (Die einfache dritte Aufgabe). Wenn man aus einer gregorianischen Periode von 400 Jahren ein beliebiges Datum auswählt, mit welcher Wahrscheinlichkeit ist dann die Tageszahl ungerade?

Hans Egli, Zürich, CH

Auswertung der eingesandten Lösungen. Es sind 9 Lösungen eingegangen: Henri Carnal (Bern, CH), Francesco Cavalli (Verscio, CH), Frieder Grupp (Schweinfurt, D), Walther Janous (Innsbruck, A), Dieter Koller (Zürich, CH), Walter Nohl (Steffisburg, CH), Fritz Siegerist (Küsnacht, CH), François Sigrist (Neuchâtel, CH) und Albert Stadler (Herrliberg, CH).

Alle Löser berechnen die Anzahl ungerader Tage, nämlich 74 497, in einer Periode von 400 Jahren, wovon 97 Schaltjahre sind, mit 146 097 Tagen und erhalten so das Resultat für die Wahrscheinlichkeit

$$p = \frac{74\,497}{146\,097} \approx 0.50991.$$

Der Aufgabensteller *Hans Egli* umschifft das elegant mit der Bemerkung, dass ein Jahr in jedem Fall 179 gerade Tage hat. Ein gregorianisches Jahr hat also im Mittel 365.2425 Tage $(365 + \frac{1}{4} - \frac{1}{100} + \frac{1}{400})$, davon sind 186.2425 ungerade, daher ist die Wahrscheinlichkeit

$$p = \frac{186.2425}{365.2425} \approx 0.50991.$$