Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 69 (2014)

Rubrik: Aufgaben

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 12.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Elem. Math. 69 (2014) 205 – 209
0013-6018/14/040205-5
DOI 10.4171/EM/264

© Swiss Mathematical Society, 2014

Elemente der Mathematik

Aufgaben

Neue Aufgaben

Lösungen sind bis zum 10. Mai 2015 erbeten und können auf postalischem Weg an

Dr. Stefan Grieder, Im eisernen Zeit 55, CH–8057 Zürich

gesandt werden. Lösungen, die in einem gängigen Format abgefasst sind, können als Attachment auch über die E-Mail-Adresse `stefan.grieder@hispeed.ch` eingereicht werden.

Aufgabe 1332: Man berechne

$$\int_0^{\pi/4} \frac{\ln(1+\tan(x))}{\big(\tan(2x)+\cot(2x)\big)^n}\,dx \quad \text{für } n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Marcel Chirita, Bukarest, RO

Aufgabe 1333: Man zeige, dass alle Nullstellen der Polynome

$$P_n(z) = \prod_{k=1}^{n}(z+k) - \prod_{k=1}^{n}(z-k)$$

für $n = 2, 3, 4, \ldots$ rein imaginär sind, also die Form $z = iy$ mit $y \in \mathbb{R}$ und $i^2 = -1$ haben.

Roland Wyss, Flumenthal, CH

Aufgabe 1334 (Die einfache dritte Aufgabe): Man konstruiere zu einem gegebenen Dreieck ABC ein möglichst kleines, gleichseitiges Dreieck so, dass auf jeder Seite von ABC eine Ecke des gleichseitigen Dreiecks liegt.

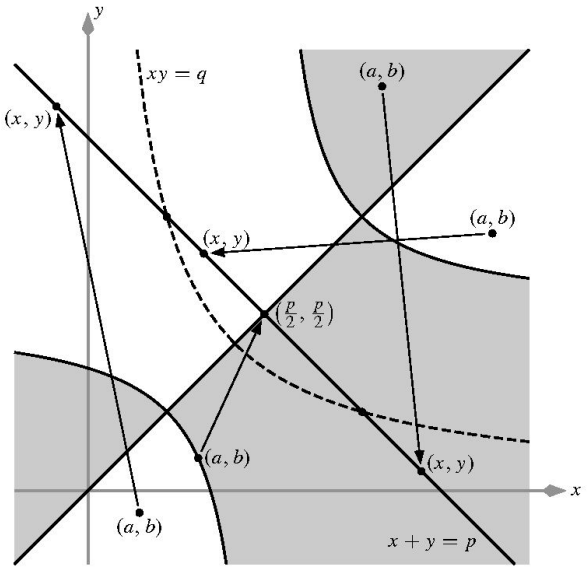
Christoph Soland, Belmont sur Lausanne, CH

Lösungen zu den Aufgaben in Heft 4, 2013

Aufgabe 1320. Man setzt voraus, dass die Gleichung $z^2 + pz + q = 0$ mit reellen Koeffizienten p, q verschiedene reelle Lösungen x, y besitzt. Diese können bei gegebenem p, q aus dem nicht-linearen Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x + y + p &= 0 \\ xy - q &= 0 \end{aligned}$$

mit Hilfe des bekannten Newtonschen Verfahrens zur Nullstellenbestimmung für zwei Unbekannte iteriert werden.



Welche Iterationsgleichungen erhält man so, und bei welcher Lage der verschieden gewählten (reellen) Startwerte x_0, y_0 bezüglich der exakten Lösungen x, y bricht das Verfahren ab?

Roland Wyss, Flumenthal, CH

Auswertung der eingesandten Lösungen. Es sind Beiträge von folgenden 11 Lesern eingegangen: Christian Blatter (Greifensee, CH), Hans Brandstetter (Wien, A), Peter Bundschuh (Köln, D), Friedhelm Götze (Jena, D), Frieder Grupp (Schweinfurt, D), Walther Janous (Innsbruck, A), Fritz Siegerist (Küsnacht, CH), Michael Vowe (Therwil, CH), Gerhard Wanner (Genève, CH), Hansruedi Widmer (Baden, CH) und Lienhard Wimmer (Isny, D).

Der interessante Teil der Aufgabe ist, festzustellen, dass die Iteration im ersten oder zweiten Schritt abbricht oder sonst gar nicht mehr abbricht. Wir folgen der Lösung von *Gerhard Wanner*.

Die Newton'sche Methode für ein Gleichungssystem $f(x) = 0$ (in Vektornotation) mit einem gegebenen Startwert a erhält man durch Abschneiden der Taylorreihe nach dem linearen Term

$$0 = f(a) + f'(a) \cdot (x - a).$$

Für unser Problem ergibt dies (wir haben für p das andere Vorzeichen gewählt)

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + b - p \\ ab - q \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - a \\ y - b \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Die Methode bricht sofort ab, wenn $a = b$ ist, d.h. wenn die Matrix dieser linearen Gleichung singulär ist. Ansonsten liefert die erste Komponente $0 = x + y - p$, das heisst alle Iterierten liegen auf der Geraden $x + y = p$ und bleiben dort. Dies ist typisch für die Newton'sche Methode bei einer linearen Gleichung.

Die zweite Komponente in Gleichung (1) liefert nach Vereinfachung

$$-ab - q + bx + ay = 0. \tag{2}$$

Diese Gerade bestimmt die Lage der ersten Iterierten entweder oberhalb oder unterhalb des Scheidepunktes $x = y = p/2$. Um diesen Punkt auszuschliessen, setzen wir in (2) für x und y den Wert $p/2$ ein und erhalten

$$ab - \frac{p}{2}(a + b) + q = \left(a - \frac{p}{2}\right)\left(b - \frac{p}{2}\right) + q - \frac{p^2}{4}.$$

Diese Hyperbel zerschneidet, zusammen mit der Geraden $a = b$, die Ebenen in sechs Gebiete, welche abwechselnd das Einzugsgebiet der oberen oder unteren Geradenhälfte von $x + y = p$ darstellen (siehe Figur). Ab der ersten Iteration ist das Problem essentiell eindimensional und es gibt keine weiteren Überraschungen mehr, das heisst die Iterierten bleiben in der jeweiligen Hälfte und konvergieren entweder zum oberen oder unteren Lösungspunkt.

Aufgabe 1321. Gegeben seien die Seiten eines konvexen Sehnen-n-Ecks ($n \geq 5$). Man berechne den Flächeninhalt desselben. Man führe die Rechnung explizit numerisch durch in den folgenden beiden Fällen:

a) Sehnen-5-Eck mit den Seiten 18, 11, 6, 4, 3.

b) Sehnen-7-Eck mit den Seiten 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3.

Johannes M. Ebersold, St. Gallen, CH

Auswertung der eingesandten Lösungen. Von folgenden 15 Lesern sind Zusendungen eingegangen: Christian Blatter (Greifensee, CH), Hans Brandstetter (Wien, A), André Calame (Saint-Aubin-Sauges, CH), Charles Delorme (Paris, F), Friedhelm Götze (Jena, D), Frieder Grupp (Schweinfurt, D), Walther Janous (Innsbruck, A), Otto M. Keiser (Zürich, CH), Joachim Klose (Bonn, D), Fritz Siegerist (Küsnacht, CH), Walter Vetsch (St. Gallen, CH), Michael Vowe (Therwil, CH), Gerhard Wanner (Genève, CH), Lienhard Wimmer (Isny, D) und Roland Wyss (Flumenthal, CH).

Es ist allen Lösern klar, dass zuerst der Umkreisradius bestimmt werden muss. Es gibt dann noch eine Fallunterscheidung ob der Umkreismittelpunkt innerhalb oder ausserhalb des Sehnen-n-Ecks ist. Der numerische Anteil der Aufgabe wurde unterschiedlich ausführlich dargestellt. Wir folgen der Lösung von *Christian Blatter.*

Mit expliziter numerischer Lösung hat der Aufgabensteller offenbar einen Algorithmus im Sinn, der deinen Datenvektor $s = (s_1, s_2, \ldots, s_n)$ mit absteigenden $s_i > 0$ als Input akzeptiert und einen Näherungswert für den zugehörigen Flächeninhalt $A(s)$ ausgibt. Bei dem folgenden Vorschlag gehen wir davon aus, dass die elementaren Grundfunktionen für den Rechenprozess zur Verfügung stehen.

Wir betrachten den Kreisradius r als (einzige) Unbekannte und verwenden das Newton'sche Verfahren. Es bezeichne

$$\alpha_i(r) = \arcsin\left(\frac{s_i}{2r}\right) \in (0, \tfrac{\pi}{2}) \qquad (1 \le i \le n)$$

den halben Zentriwinkel zur Sehnenlänge s_i bei gegebenem Kreisradius r. Da wir nicht von vornherein wissen, ob das Kreiszentrum innerhalb des Sehnenpolygons liegt, können wir nicht $\sum_{i=1}^n \alpha_i(r) = \pi$ als Schliessungsbedingung verwenden. Stattdessen überlegen wir folgendermassen: Die s_i $(2 \le i \le n)$ bilden einen dem Kreis vom Radius r einbeschriebenen Streckenzug. Dessen Endpunkte haben den Abstand $2r\sin(\alpha(r))$; dabei bezeichnet

$$\alpha(r) = \sum_{i=2}^{n} \alpha_i(r)$$

den halben von den s_i $(2 \le i \le n)$ insgesamt eingenommenen Zentriwinkel. Die Schliessungsbedingung lautet dann folgendermassen:

$$f(r) = 2r\sin(\alpha(r)) - s_1 = 0.$$

Numerische Experimente mit verschiedenen Datenvektoren s deuten darauf hin, dass f monoton wachsend und nach oben konvex ist. Wir wählen daher den bestimmt zu kleinen Wert $r_0 = \frac{1}{2\pi}\sum_{i=1}^n s_i$ als Startwert und folgen der Iterationsvorschrift

$$r_{n+1} = r_n - \frac{f(r_n)}{f'(r_n)} = r_n + \frac{s_1 - 2r_n\sin(\alpha(r_n))}{2\sin(\alpha(r_n)) + 2r_n\cos(\alpha(r_n))\alpha'(r_n)} \qquad (n \ge 0).$$

Ist r der akzeptierte Endwert, so berechnet sich der Flächeninhalt des zu s gehörigen Sehnenpolygons wie folgt:

$$A(s) = \sum_{i=2}^{n} \frac{s_i}{4}\sqrt{4r^2 - s_i^2} + \operatorname{sgn}\left(\alpha(r) - \frac{\pi}{2}\right)\frac{s_1}{4}\sqrt{4r^2 - s_1^2}.$$

Ist nämlich $\alpha(r) < \frac{\pi}{2}$, so muss die zu s_1 gehörige Dreiecksfläche zum Abzug gebracht werden. In Teilaufgabe a) ergibt sich dann $A(s) = 80.54593358$, für das s in b) erhält man $A(s) = 127.424947754$.

Aufgabe 1322 (Die einfache dritte Aufgabe). Für feste ganzzahlige $m \geq 0$ betrachte man die Diagonalsummen

$$a_{n,m} = \sum_{j \geq 0} \binom{n - jm}{j}$$

im Pascaldreieck. Welcher Rekursion genügt die Folge $a_{n,m}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$?

Jany C. Binz, Bolligen, CH

Auswertung der eingesandten Lösungen. Es sind Lösungen von folgenden 9 Lesern eingegangen:

Hans Brandstetter (Wien, A), Peter Bundschuh (Köln, D), André Calame (Saint-Aubin-Sauges, CH), Hans Egli (Zürich, CH), Frieder Grupp (Schweinfurt, D), Walther Janous (Innsbruck, A), Fritz Siegerist (Küsnacht, CH), Michael Vowe (Therwil, CH) und Roland Wyss (Flumenthal, CH).

Die gesuchte Rekursion lässt sich direkt aus der bekannten Rekursionsgleichung der Binomialkoeffizienten herleiten, wenn man die Rekursion „erraten" hat. Wir folgen der Lösung von *Peter Bundschuh*.

Behauptung: Für jedes $m \geq 0$ genügt die obige Folge der Rekursion

$$a_{n+1,m} = a_{n,m} + a_{n-m,m} \qquad (n = m, m+1, \ldots)$$

mit den Anfangsbedingungen $a_{m,m} = \cdots = a_{0,m} = 1$.

Beweis: Für jedes $n \in \{0, \ldots, m\}$ und $j > 0$ gilt $n - jm \leq 0 < j$ und daher $\binom{n-jm}{j} = 0$. Somit hat man $a_{n,m} = 1$ für $n = 0, \ldots, m$ und damit die Anfangsbedingungen. Weiterhin ist bei $n \geq m$

$$\begin{aligned}
a_{n+1,m} - a_{n,m} &= \sum_{j \geq 1} \binom{n+1-jm}{j} - \binom{n-jm}{j} \\
&= \sum_{j \geq 1} \frac{\big((n+1-jm) - (n+1-jm-j)\big)(n-jm)\cdots(n+2-jm-j)}{j!} \\
&= \sum_{j \geq 1} \frac{(n-jm)\cdots(n+2-j(m+1))}{(j-1)!} \\
&= \sum_{k \geq 0} \frac{(n-m-km)\cdots(n-m+1-k(m+1))}{k!} = \sum_{k \geq 0} \binom{n-m-km}{k}
\end{aligned}$$

und diese Summe ist $a_{n-m,m}$, was die behauptete Rekursion liefert.