Aufgaben

Objekttyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **69 (2014)**

PDF erstellt am: **17.09.2024**

Elem. Math. 69 (2014) 40 – 43
0013-6018/14/010040-4
DOI 10.4171/EM/244

Elemente der Mathematik

Aufgaben

Neue Aufgaben

Lösungen sind bis zum 10. August 2014 erbeten und können auf postalischem Weg an

Dr. Stefan Grieder, Im eisernen Zeit 55, CH–8057 Zürich

gesandt werden. Lösungen, die in einem gängigen Format abgefasst sind, können als Attachment auch über die E-Mail-Adresse `stefan.grieder@hispeed.ch` eingereicht werden.

Aufgabe 1323:

a) Vier zufällige Punkte P_0, P_1, Q_0, Q_1 liegen unabhängig voneinander gleichverteilt auf der Sphäre S^2. Mit Wahrscheinlichkeit 1 besitzen P_0 und P_1 einen wohlbestimmten kürzesten Verbindungsbogen $\gamma \subset S^2$ und ebenso Q_0, Q_1 einen kürzesten Verbindungsbogen γ'. Man berechne die Wahrscheinlichkeit, dass sich die beiden Bögen schneiden.

b) Man behandle dasselbe Problem für zwei Punktepaare auf einem euklidischen Torus $T := \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$. Die kürzesten Verbindungen sind dann Strecken.

Christian Blatter, Greifensee, CH

Aufgabe 1324: In einem Dreieck sei S der Schwerpunkt und P der zum Inkreismittelpunkt isotom konjugierte Punkt. Man verlängere PS mit $SQ = 2 \cdot PS$. Man zeige:

a) Die Parallelen zu den Seiten des Dreiecks durch P schneiden aus diesen Seiten gleichlange Strecken l_P. Man ermittle l_P in Abhängigkeit der Seitenlängen des Dreiecks.

b) Die Seiten des Dreiecks schneiden aus den Parallelen zu den Seiten durch Q gleichlange Strecken $l_Q = 2 \cdot l_P$.

Gheorghe Bercea, München, D

Aufgabe 1325 (Die einfache dritte Aufgabe): Es sei A eine 3×3 schiefsymmetrische Matrix mit reellen Einträgen. Man bestimme den numerischen Wertevorrat

$$\mathfrak{W}(A) = \{x^*Ax \mid x \in \mathbb{C}^3 \text{ und } x^*x = 1\},$$

wobei x^* die konjugierte Transponierte des Vektors x bezeichnet.

Dietrich Trenkler, Dortmund, D und Götz Trenkler, Dortmund, D

Lösungen zu den Aufgaben in Heft 1, 2013

Aufgabe 1311. Ermittle für $0 \le x, y, z \le 1$ das Minimum und Maximum des Terms

$$S(x, y, z) = \frac{x-y}{z+1} + \frac{y-z}{x+1} + \frac{z-x}{y+1}.$$

Michael Vowe, Therwil, CH

Auswertung der eingesandten Lösungen. Folgende zwölf Leser sandten Beiträge ein: Šefket Arslanagić (Sarajevo, BIH), Hans Brandstetter (Wien, A), Walter Burgherr (Rothenburg, CH), André Calame (Saint-Aubin-Sauges, CH), Henri Carnal (Bern, CH), Friedhelm Götze (Jena, D), Frieder Grupp (Schweinfurt, D), Walther Janous (Innsbruck, A), Heinz Klement (Asperg, D), Stephan Kocher (Oberschrot, CH), Fritz Siegerist (Küsnacht, CH) und Roland Wyss (Flumenthal, CH).

Die Aufgabe kann mit Standardmethoden der Analysis gelöst werden. Der Aufwand kann aber in geschickter Weise auf ein Minimum reduziert werden, wie in der Lösung von *Henri Carnal*, die hier präsentiert wird.

Es ist $S \not\equiv 0$ und $S(x, y, z) = -S(y, x, z)$, daher ist $M = \max S > 0$ und $m = \min S = -M < 0$. Da $S(x, x, z) = S(x, y, y) = S(x, y, x) = 0$, muss eine Extremalstelle (x, y, z) verschiedene Koordinaten haben. Es ist

$$S_x = \frac{\partial S(x, y, z)}{\partial x} = (y-z)\left(\frac{1}{(y+1)(z+1)} - \frac{1}{(x+1)^2}\right).$$

Bei einer Extremalstelle mit $0 < x < 1$ muss daher $S_x = 0$ und folglich $(x+1)^2 = (y+1)(z+1)$ gelten, da ja $y \neq z$. Wäre zusätzlich auch $0 < y < 1$, so gälte $(y+1)^2 = (x+1)(z+1)$ und insgesamt $x+1 = y+1 = z+1$, was aber nach obiger Bemerkung ausgeschlossen ist.

Es darf also nur eine Koordinate (z.B. x) im offenen Intervall $(0, 1)$ liegen, während die anderen die Werte 0 und 1 annehmen. Daraus folgt $(x+1)^2 = 2$ und $x = \sqrt{2}-1 = u$. Das Maximum $M = \frac{3}{2} - \sqrt{2}$ wird in $(u, 0, 1)$, $(1, u, 0)$ und $(0, 1, u)$ angenommen, $m = -M$ wird in $(u, 1, 0)$, $(0, u, 1)$ und $(1, 0, u)$ erreicht.

Aufgabe 1312. Sei A eine reelle symmetrische 3×3 Matrix mit den Eigenwerten $0, \lambda, \lambda$, wobei $\lambda < 0$. Man weise nach, dass A genau zwei schiefsymmetrische Quadratwurzeln hat. Wie lauten diese in Abhängigkeit von A?

Oskar Maria Baksalary, Poznań, PL[1] und Götz Trenkler, Dortmund, D

Auswertung der eingesandten Lösungen. Es sind 10 Lösungen von folgenden Lesern eingegangen: Hans Brandstetter (Wien, A), André Calame (Saint-Aubin-Sauges, CH), Henri Carnal (Bern, CH), Jean-Louis Féraud (Bern, CH), Frieder Grupp (Schweinfurt,

[1] Der in Heft 1 2013 genannte Adam Mickiewicz ist der Name und Patron der Universität in Poznań und nicht etwa Koautor der Aufgabe. Ein Fehler meinerseits. S.G.

D), Walther Janous (Innsbruck, A), Joachim Klose (Bonn, D), Lásló Lajos (Budapest, H), Fritz Siegerist (Küsnacht, CH) und Roland Wyss (Flumenthal, CH).

Die Eindeutigkeit der schiefsymmetrischen Quadratwurzeln kann, wie die meisten Leser zeigen, leicht mit Hilfe der Spektraldarstellung von A gezeigt werden. Die Quadratwurzel kann aber auch mit Hilfe des Kerns von A gefunden werden, wie *Joachim Klose* und auch andere gezeigt haben.

Es besteht eine Korrespondenz zwischen der Wirkung einer schiefsymmetrischen Matrix

$$S = \begin{pmatrix} 0 & -w & v \\ w & 0 & -u \\ -v & u & 0 \end{pmatrix} \in M(3 \times 3, \mathbb{R})$$

auf einen (Spalten-)Vektor $x \in \mathbb{R}^3$ und der Bildung des Vektorprodukts $\omega \times x$, wobei $\omega = (u, v, w)^T$:

$$Sx = \omega \times x \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^3.$$

Die zu ω gebildete schiefsymmetrische Matrix werde mit $S(\omega)$ bezeichnet. Um eine schiefsymmetrische Matrix S mit $S^2 = A$ zu bestimmen, genügt es deshalb nach Vektoren $\omega \in \mathbb{R}^3$ mit

$$\omega \times (\omega \times x) = Ax \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^3$$

zu suchen. Für das doppelte Vektorprodukt gilt die Entwicklung $\omega \times (\omega \times x) = \langle \omega, x\rangle\omega - \langle \omega, \omega\rangle x$, wobei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Standardskalarprodukt im $\mathbb{R}^3$ bedeutet.

Nach den bekannten Eigenschaften reeller symmetrischer Matrizen hinsichtlich ihrer Eigenvektoren und nach den Voraussetzungen an die Eigenwerte von A gibt es eine Orthonormalbasis $\left\{e_0, e_\lambda^{(1)}, e_\lambda^{(2)}\right\}$ aus Eigenvektoren von A. Daraus folgt

$$0 = Ae_0 = \omega \times (\omega \times e_0) = \langle \omega, e_0\rangle\omega - \langle \omega, \omega\rangle e_0 \Leftrightarrow \langle \omega, e_0\rangle\omega = \langle \omega, \omega\rangle e_0$$

und daraus $\omega = \mu e_0$ mit einem $\mu \in \mathbb{R}$. Eingesetzt ergibt sich wegen $\langle e_\lambda^{(i)}, e_0\rangle = 0$ und $\langle e_\lambda^{(i)}, e_\lambda^{(i)}\rangle = 1$

$$\lambda e_\lambda^{(i)} = Ae_\lambda^{(i)} = \langle \omega, e_\lambda^{(i)}\rangle\omega - \langle \omega, \omega\rangle e_\lambda^{(i)} = -\mu^2 e_\lambda^{(i)}$$

und daraus $\mu = \pm\sqrt{-\lambda}$.

Dies bedeutet: A besitzt genau die beiden schiefsymmetrischen Quadratwurzeln

$$S\left(\sqrt{-\lambda}e_0\right), \quad S\left(-\sqrt{-\lambda}e_0\right),$$

wobei e_0 ein fest gewählter Einheitsvektor aus dem Kern von A ist.

Bemerkung: Aus der Matrizengleichung $S^2 = A$ lassen sich unmittelbar die Matrizenelemente von S aus denen von A gewinnen. Die Aufgabenautoren geben für den oben erwähnten Vektor ω die Darstellung

$$\omega = \pm\sqrt{-\lambda}e_0 = \pm\frac{1}{\sqrt{1_3^T(A - \lambda I_3)1_3}}(A - \lambda I_3)1_3$$

an mit der dreidimensionalen Einheitsmatrix I_3 und Vektor $1_3 = (1, 1, 1)^T$.

Aufgabe 1313 (Die einfache dritte Aufgabe). Durch die Punkte A_1 und A_2, die Punkte B_1 und B_2 und letztlich durch die Punkte C_1 und C_2 seien zueinander paarweise windschiefe Geraden gegeben. Gesucht sind drei paarweise zueinander senkrecht stehende Ebenen, welche je eine dieser Geraden enthalten, und deren Schnittpunkt. Man beschreibe eine Lösung zur Berechnung dieser Ebenen und führe sie konkret mit folgenden Angaben aus:

$$A_1(4,0,6),\ A_2(6,-1,5),\ B_1(-2,-1,-4),\ B_2(5,-3,0),\ C_1(3,2,5),\ C_2(6,4,3).$$

Johannes M. Ebersold, St. Gallen, CH

Auswertung der eingesandten Lösungen. Folgende 10 Leser haben Lösungen zugeschickt: Hans Brandstetter (Wien, A), Walter Burgherr (Rothenburg, CH), André Calame (Saint-Aubin-Sauges, CH), Henri Carnal (Bern, CH), Hans Egli (Zürich, CH), Frieder Grupp (Schweinfurt, D), Walther Janous (Innsbruck, A), Fritz Siegerist (Küsnacht, CH), Lienhard Wimmer (Isny, D) und Roland Wyss (Flumenthal, CH).

Die meisten Löser bestimmen zuerst einen Normalenvektor der gesuchten Ebenen aus einem Gleichungssystem, das man aus den gegebenen Angaben leicht herleiten kann. Wir folgen der leicht bearbeiteten Lösung von *André Calame*.

Es seien $\vec{a} = \overrightarrow{A_1A_2}$, $\vec{b} = \overrightarrow{B_1B_2}$, $\vec{c} = \overrightarrow{C_1,C_2}$, und die gesuchten Ebenen seien Π_a, Π_b und Π_c.

Ist $\vec{r}$ ein (zu bestimmender) Normalenvektor der Ebene Π_a, dann lässt sich wegen $\vec{r}\cdot\vec{a} = 0$ eine Komponente von r eliminieren. Im Normalfall sind $\vec{b}$ und $\vec{r}$ linear unabhängig, und $\vec{b}\times\vec{r}$ ist ein Normalenvektor von Π_b; analog ist $\vec{c}\times\vec{r}$ ein Normalenvektor von Π_c. (Die Vorgaben garantieren, dass wenigstens einer der Vektoren $\vec{b}\times\vec{r}$ und $\vec{c}\times\vec{r}$ nicht der Nullvektor ist, und ein Normalenvektor der dritten Ebene lässt sich auch alternativ finden.)

Schliesslich bleibt die Bedingung $\Pi_b \perp \Pi_c$ oder $(\vec{b}\times\vec{r})\cdot(\vec{c}\times\vec{r}) = 0$, was zu einer quadratischen Form für die restlichen Komponenten von $\vec{r}$ führt. Daraus lässt sich das Verhältnis der beiden fehlenden Komponenten und damit $\vec{r}$ bestimmen.

Im Beispiel ist $\vec{a} = (2,-1,-1)^T$, $\vec{b} = (7,-2,4)^T$, $\vec{c} = (3,2,-2)^T$ und man setzt $\vec{r} = (r_1,r_2,r_3)^T$. Aus $\vec{r}\cdot\vec{a} = 2r_1 - r_2 - r_3 = 0$ ergibt sich $r_3 = 2r_1 - r_2$ und weiter

$$(\vec{b}\times\vec{r})\cdot(\vec{c}\times\vec{r}) = 60r_1^2 - 102r_1r_2 + 42r_2^2 = 6(r_1-r_2)(10r_1-7r_2) = 0.$$

1. Lösung: $r_1 = r_2 = 1$, $\vec{r} = (1,1,1)^T$, $\vec{b}\times\vec{r} = -3(2,1,-3)^T$, $\vec{c}\times\vec{r} = (4,-5,1)^T$
Π_a: $x+y+z = 10$, Π_b: $2x+y-3z = 7$, Π_c: $4x-5y+z = 7$, Schnittpunkt $(5,3,2)$.

2. Lösung: $r_1 = 7$, $r_2 = 10$, $\vec{r} = (7,10,4)^T$, $\vec{r}\times\vec{b} = -12(4,0,-7)^T$, $\vec{c}\times\vec{r} = 2(14,-13,8)^T$
Π_a: $7x+10y+4z = 52$, Π_b: $4x-7z = 20$, Π_c: $14x-13y+8z = 56$, Schnittpunkt $\left(\frac{3764}{715}, \frac{16}{11}, \frac{108}{715}\right)$.