

Die Gregorianische Kalenderreform, Teil 1

Autor(en): **Albertini, Claudia / Huber, Martin**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **72 (2017)**

Heft 2

PDF erstellt am: **13.09.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-730831>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Die Gregorianische Kalenderreform, Teil 1

Claudia Albertini und Martin Huber

Claudia Albertini erwarb 1986 das Primarlehrerpatent. Anschliessend studierte sie Mathematik an der Universität Zürich und schloss 1996 mit dem Doktorat ab. Von 1996 bis 2003 unterrichtete sie Mathematik an der Kantonsschule Zürcher Oberland. Seit 2003 ist sie an der PH Zürich als Dozentin für Mathematik und Mathematikdidaktik tätig. Seit 2007 ist sie auch Lehrbeauftragte an der Universität Zürich und hält Vorlesungen für zukünftige Sekundarlehrpersonen.

Martin Huber studierte Mathematik an der ETH Zürich und doktorierte dort 1976. Mit einem Stipendium des Schweizerischen Nationalfonds arbeitete er von 1978 bis 1980 an verschiedenen US-amerikanischen Universitäten im Bereich der Algebra. Bis 1985 war er dann an der Universität Freiburg im Breisgau tätig, wo er sich 1982 habilitierte. In den Jahren 1983 bis 2013 hielt er Vorlesungen an der Universität Zürich für künftige Sekundarlehrpersonen. Ab 1987 bis zu seiner Pensionierung 2014 wirkte er als Dozent an der FH Winterthur.

Diese Publikation ist eine überarbeitete und erweiterte Fassung eines Vortrags, den die Autoren im November 2016 im *Kolloquium für Mathematik, Informatik und Unterricht* an der ETH Zürich gehalten haben. In diesem ersten Teil beschreiben wir die Gregorianische Kalenderreform, ausgehend von dem im Jahr 1603 von Christoph Clavius publizierten Werk „*Romani Calendarii explicatio*“ [Cla03]. In einem zweiten Teil [AH17] werden wir aus dieser Beschreibung eine Formel zur Berechnung des Osterdatums herleiten.

Der Hauptgrund für die Kalenderreform von 1582 war die fehlerhafte Berechnung des Osterdatums. Letzteres hängt sowohl vom Frühlingsäquinoktium als auch vom Mondlauf ab. Die mittlere Dauer des Julianischen Jahres beträgt 365.25 Tage und ist damit nur ca. 11 Minuten länger als das tropische Jahr. Dieser kleine Fehler hatte sich jedoch zu mehreren Tagen aufsummiert, insbesondere war das Frühlingsäquinoktium vom 4. bis zum 16. Jh. um 10 Tage abgewandert. Auch der bis dahin verwendete Alexandrinische Mondzyklus war mit einem kleinen Fehler behaftet. Die Autoren der vorliegenden Arbeit erklären, wie die Abweichung des Sonnenkalenders durch die Gregorianische Reform korrigiert wurde. Sie besprechen zudem die weniger bekannte Tatsache, dass die Monddaten für die Bestimmung des Osterfestes auch nach der Reform nicht astronomisch, sondern weiterhin zyklisch berechnet werden, nämlich mittels einer Verbesserung des Alexandrinischen Mondzyklus.

1 Astronomische Grundlagen

Die drei auffälligsten astronomischen Zyklen, die wir beobachten können, sind der Zyklus von Tag und Nacht, der Zyklus der Mondphasen und derjenige der vier Jahreszeiten. Offenbar bestand schon sehr früh das Bedürfnis, diese Zyklen in der Form eines Kalenders zu ordnen. Ein Sonnenkalender bildet die Jahreszeiten ab, ein Mondkalender berücksichtigt die Mondphasen, und ein Lunisolärer Kalender beachtet sowohl die Mondphasen als auch den Sonnenlauf.

Ein Kalender ordnet also die Zeitintervalle Tag, Monat und Jahr. Doch diese Alltagsbegriffe müssen zunächst präzisiert werden.

- Die Grundeinheit der bei uns gebräuchlichen Kalender ist der **mittlere Sonnentag** (= 1d), der in 24 gleich lange (sog. *äquinoktiale*) Stunden eingeteilt wird. Der *wahre Sonnentag* ist die Zeitspanne zwischen zwei aufeinander folgenden Kulminationen der Sonne. Seine Dauer kann, je nach Jahreszeit, bis zu 50s vom Mittelwert abweichen [Ric98, S. 387].
- Eine **astronomische Lunation** ist das Zeitintervall zwischen zwei gleichen Mondphasen oder – präziser – zwischen zwei aufeinander folgenden Konjunktionen von Sonne und Mond (Neumond). Die mittlere Dauer einer astronomischen Lunation wird auch **synodischer Monat** genannt.

Die von Papst Gregor XIII. eingesetzte Reformkommission entschied sich, für den synodischen Monat den Wert aus den Prutenischen Tafeln [Rei51] zu verwenden:

$$29.5305924 \text{ d} \approx 29\text{d } 12\text{h } 44\text{m } 3.2\text{s} \quad (1)$$

Der Unterschied zum Wert für das Jahr 2000 beträgt nur 0.3s:

$$29.5305889 \text{ d} \approx 29\text{d } 12\text{h } 44\text{m } 2.9\text{s} \quad (2)$$

Die Dauer einer astronomischen Lunation kann vom Mittelwert bis zu 7h abweichen [Dog92, S. 576].

- Für die Kalenderrechnung ist das Zeitintervall zwischen zwei Durchgängen der Sonne durch den Frühlingspunkt relevant. Der **Frühlingspunkt** ist derjenige Schnittpunkt der Ekliptik mit dem Himmelsäquator, den die Sonne von der Südseite des Äquators zur Nordseite durchläuft. In den meisten uns bekannten Publikationen zum Thema *Kalender* wird das betrachtete Zeitintervall *tropisches Jahr* genannt. Seine Länge ist allerdings nicht konstant. Einen Mittelwert dieser Jahreslängen entnahm die Reformkommission damals den Alfonsinischen Tafeln [BB52]. Er beträgt:

$$365.242546 \text{ d} \approx 365\text{d } 5\text{h } 49\text{m } 16\text{s} \quad (3)$$

Bezogen auf das Jahr 2000 beträgt ihr Mittelwert nach der Berechnung von J. Meeus [MS92]:

$$365.242374 \text{ d} \approx 365\text{d } 5\text{h } 49\text{m } 1.1\text{s} \quad (4)$$

Nach der aktuell gültigen Definition ist das **tropische Jahr** die Zeitspanne, welche die Sonne benötigt, damit ihre mittlere ekliptikale Länge um 360 Grad zunimmt. Die aktuelle Dauer (Jahr 2000) des tropischen Jahres beträgt nach [MS92]:

$$365.242190 \text{ d} \approx 365\text{d } 5\text{h } 48\text{m } 45.2\text{s} \quad (5)$$

Ein Kalenderjahr und ein Kalendermonat enthalten stets eine ganze Anzahl Tage, und das Kalenderjahr umfasst stets eine ganze Anzahl von Kalendermonaten. Die Schaffung eines Kalenders ist somit ein Näherungsproblem, dessen Lösungen ganzzahlig sein müssen.

2 Die Osterzyklen

Im Folgenden behandeln wir zuerst die Festlegung des Osterdatums, stellen dann den Alexandrinischen Osterzyklus vor und gehen schliesslich auf Notwendigkeit und Umsetzung der Gregorianischen Reform ein.

Ostern ist das wichtigste Fest des christlichen Kirchenjahrs. Am Konzil von Nikaia im Jahr 325, das von Kaiser Konstantin zur Stärkung der Einheit der Kirche einberufen worden war, wurde auch die Frage nach dem richtigen Osterdatum diskutiert. Der jüdischen Tradition folgend, hielten die Christen daran fest, das Osterdatum an den Mondlauf zu binden. Mit dem Ziel der Einigkeit in der Osterfrage scheint in Nikaia Folgendes beschlossen worden zu sein [Sch05]:

- Ostern ist an einem Sonntag nach dem 14. Nisan zu feiern.
- Ostern ist nach dem Frühlingsäquinoktium zu feiern.

Der 14. Nisan ist ein Datum des jüdischen Lunisolarkalenders. Mondmonate beginnen bei **Neulicht**, d.h. bei der ersten Sichtbarkeit der schmalen Mondsichel nach Neumond. Weil eine astronomische Lunation ungefähr 29.5 Tage dauert, tritt der Vollmond am 14. oder 15. Nisan ein. Am 15. Nisan beginnt das jüdische Passah-Fest, die Gedenkfeier für den Auszug der Israeliten aus Ägypten.

Das **Frühlingsäquinoktium** (die Frühlings-Tagundnachtgleiche) ist der Zeitpunkt des Durchgangs der Sonne durch den Frühlingspunkt. Den ersten Vollmond, der bei oder nach dem Frühlingsäquinoktium eintritt, nennt man **Frühlingsvollmond**. Der Beschluss des Konzils von Nikaia kann somit wie folgt zusammengefasst werden:

- Ostern ist an einem Sonntag nach dem Frühlingsvollmond zu feiern.

Durch den Beschluss von Nikaia ist das genaue Datum des Osterfestes noch nicht eindeutig festgelegt. In der Folge setzte sich die Interpretation der Bischöfe von Alexandria durch. Sie entschieden sich, Ostern am *ersten* Sonntag nach dem Frühlingsvollmond zu feiern, und legten die Tagundnachtgleiche auf ein festes Datum, nämlich auf den 21. März des Julianischen Kalenders. Im 4. Jh. fiel das (astronomische) Frühlingsäquinoktium auf den 20. oder 21. März (vgl. [Sch05, S.15]). Das Datum des Frühlingsvollmondes wird traditionell **Ostergrenze** genannt. Ordnen wir die Daten eines Sonnenjahres aufsteigend linear, so gilt

$$21. \text{ März} \leq \text{Ostergrenze} < \text{Osterdatum}.$$

Das früheste Osterdatum ist somit der 22. März.

Mit der Absicht, künftige Osterdaten im Voraus berechnen zu können, hatten die führenden Kirchen in Alexandria und Rom schon im dritten Jahrhundert nach einer Gesetzmässigkeit für die Abfolge der Ostergrenzen gesucht. Wir beschreiben im Folgenden den Alexandrinischen Zyklus, der sich dank Dionysius Exiguus [Kru38, S. 59] im 6. Jh. auch in Rom durchsetzte und schliesslich von der ganzen christlichen Kirche übernommen wurde.

2.1 Der Alexandrinische Osterzyklus

In Babylon wusste man schon um 500 v. Chr., dass 235 Lunationen ziemlich genau 19 Sonnenjahren entsprechen. Die 235 Lunationen wurden wie folgt auf 19 Mondjahre verteilt: 12 **Mondgemeinjahre** mit 12 Lunationen und 7 **embolistische Mondjahre** mit 13 Lunationen. Dieser 19-jährige Zyklus wird traditionell nicht den Babyloniern zugeschrieben, sondern **Metonscher Zyklus** genannt, nach dem griechischen Astronomen *Meton*, der im 5. vorchristlichen Jh. lebte.

Auf Vorschlag des Philosophen und Mathematikers Anatolios von Alexandria, später Bischof von Laodikaia (†282), verwendeten die Alexandriner zur Bestimmung des Osterdatums den **76-jährigen Kallippischen Zyklus**, eine Verfeinerung des 19-jährigen Metonschen Zyklus. In einem Kallippischen Zyklus werden vier 19-jährige Zyklen zusammengefasst und mit 27 759 Tagen gleichgesetzt. Ein mittleres Sonnenjahr enthält somit 365.25 Tage, was mit dem mittleren Julianischen Jahr übereinstimmt. Ein Kallippischer Zyklus enthält $4 \cdot 235 = 940$ Lunationen und somit $4 \cdot 12 = 48$ Mondgemeinjahre und $4 \cdot 7 = 28$ embolistische Mondjahre.

Als Nächstes beschreiben wir, wie die 27 759 Tage auf die 76 Mondjahre verteilt wurden. Im Kalender können Lunationen nur als sog. *bürgerliche* Lunationen, welche entweder 30 oder 29 Tage enthalten, dargestellt werden. Eine Lunation heisst **voll**, wenn sie 30 Tage umfasst; sie heisst **hohl**, wenn sie aus 29 Tagen besteht. Ein Mondgemeinjahr, in dem die Monate abwechselnd voll und hohl sind, dauert $6 \cdot 30 + 6 \cdot 29 = 354$ Tage. Wird einem solchen Mondjahr ein voller Monat angehängt, so entsteht ein embolistisches Mondjahr mit 384 Tagen. Somit würden 48 Gemeinjahre und 28 embolistische Jahre

$$48 \cdot 354 + 28 \cdot 384 = 27\,744$$

Tage enthalten. Dies sind 15 Tage zu wenig. Deshalb wird jedem Mondjahr, welches einen Sonnenschalttag enthält, ein Tag hinzugefügt. Da der 76-jährige Zyklus 19 Schalttage enthält, ergibt dies nun 4 Tage zu viel. Aus diesem Grund wird schliesslich in jedem 19-jährigen *kanonischen* Teilzyklus (siehe weiter unten) dem letzten Mondjahr wieder ein Tag weggenommen. Die lateinischen Computisten¹ nannten diese Reduktion *saltus lunae*, zu deutsch **Mondsprung**.

76 Julianische Jahre	76 Mondjahre
76 · 365 + 19 = 27 759 Tage	$\underbrace{48 \cdot 354 + 28 \cdot 384}_{27\,744} + 19 - 4 = 27\,759 \text{ Tage}$

Im Folgenden legen wir dar, wie die Alexandriner aufgrund dieser Überlegungen die Ostergrenze bestimmten. Der Mondmonat begann für sie mit dem Tag, an dem das Neulicht eintrat; allerdings nicht bei Sonnenuntergang wie bei den Juden, sondern bei Sonnenaufgang. Ein einziges Neulicht musste durch Beobachtung bestimmt werden. Alle weiteren Neulichter konnten dann aufgrund des 76-jährigen Zyklus angegeben werden. Solche mit

¹ „Computus“ bedeutet allgemein Rechnen mit der Zeit; im engeren Sinne ist damit die Osterrechnung gemeint. Die „Computisten“ berechneten im Auftrag des Papstes für viele Jahre zum Voraus das Osterdatum.

Hilfe des Zyklus berechnete Monddaten nennen wir im Folgenden **zyklisch**. Der zyklische Vollmond wurde auf den 14. Tag des Mondmonats festgelegt; er trat also 13 Tage nach dem Neulicht ein. Mit **Ostermonat** bezeichnen wir die zyklische Lunation, welche die Ostergrenze und damit auch das Osterfest enthält. Im System der Alexandriner beginnt das Mondjahr mit dem Ostermonat. Schon in der Antike wusste man, dass die astronomischen Lunationen um einige Stunden vom Mittelwert abweichen können. Deshalb war es stets klar, dass zyklische und astronomische Monddaten nicht immer übereinstimmen.

Als Bindeglied zwischen Sonnen- und Mondkalender dient die Epakte. Allgemein bezeichnet man mit **Epakte** das Alter des zyklischen Mondes an einem bestimmten, stets gleich bleibenden Tag im Sonnenjahr. Das Alter des Mondes zählt die Tage im aktuellen Mondmonat vom Neulicht bis zum betreffenden Tag. Am Tag des zyklischen Neulichts ist der Mond einen Tag, am Tag des zyklischen Vollmonds 14 Tage alt. Das Alter des Mondes hat also nicht kardinalen sondern ordinalen Charakter. Die Epaktenrechnung beruht auf der Tatsache, dass das Mondgemeinjahr mit seinen 354 Tagen 11 Tage kürzer, das embolistische Jahr mit seinen 384 Tagen, 19 Tage länger ist als das Sonnengemeinjahr von 365 Tagen.

Die **alexandrinische Epakte** η ist das Mondalter am 22. März, dem frühest möglichen Osterdatum. Wenn die Epakte eines Jahres bekannt ist, dann kann die zugehörige Ostergrenze bestimmt werden: Gilt z.B. für ein Jahr mit Jahreszahl j , dass die Epakte $\eta = 11$ ist, so ist der 22. März der 11. Tag des Ostermonats. Das zyklische Neulicht, welches den Beginn des Ostermonats markiert, fällt somit auf den 12. März, und 13 Tage später, am 25. März, ist die Ostergrenze. Weil das Mondgemeinjahr um 11 Tage kürzer ist als das Sonnenjahr, ist das Mondalter am 22. März des folgenden Jahres um 11 grösser, beträgt also $\eta = 22$. Somit war am 1. März ein zyklisches Neulicht. Der 13 Tage später, am 14. März, eintretende zyklische Vollmond ist allerdings noch nicht der Frühlingsvollmond. Es wird ein zusätzlicher voller Mondmonat eingeschaltet, wodurch das vorhergehende Mondjahr embolistisch wird (mit 384 Tagen). Der Ostermonat beginnt somit erst am 31. März, und die Ostergrenze ist am 13. April. Es ist nicht möglich, dass die Epakte im Jahr $j + 2$ den Wert $\eta = 33 = 22 + 11$ hat, denn inzwischen (nach 30 Tagen) ist bereits wieder ein zyklisches Neulicht eingetreten. Die Epakte für das Jahr $j + 2$ ist $\eta = 3 = 33 - 30$. Sie ist also nicht um 11 Tage grösser, sondern um 19 Tage kleiner als im Vorjahr. Der Ostermonat des Jahres $j + 2$ beginnt somit am 20. März, und die Ostergrenze ist am 2. April. Bei dieser Betrachtung können die Sonnenschalttage ignoriert werden, da sie ja auch den entsprechenden Mondjahren angehängt werden: $366 - 355 = 11$ bzw. $366 - 385 = -19$. Wir halten fest, dass die Epakte eines beliebigen Jahres, modulo 30 gerechnet, stets um 11 grösser ist als diejenige des Vorjahrs. Diese Berechnung ist deshalb korrekt, weil die Alexandriner den Ostermonat stets als hohl, die vorhergehende Lunation jedoch stets als voll angenommen hatten.

Für die Berechnung der Epakte wurde der Begriff der Goldenen Zahl eingeführt: Ein 19-jährigen Zyklus heisst **kanonisch**, wenn die Jahreszahl des ersten Zyklusjahrs in der christlichen Zeitrechnung durch 19 ohne Rest teilbar ist. Z.B. war der im Jahr 304 beginnende Zyklus kanonisch: $304 = 16 \cdot 19$. Die **Goldene Zahl** γ gibt für jedes Jahr die Position im zugehörigen kanonischen Zyklus an. Bezeichnet j die Jahreszahl, so gilt:

$$\gamma = 1 + j \bmod 19 \quad (6)$$

In dieser Arbeit bezeichnet $a \bmod b$ stets den (normierten) Rest von a bei Division durch b . Also gilt stets $0 \leq a \bmod b < b$, $a, b \in \mathbb{Z}$, $b > 0$. Beispielsweise ist $311 \bmod 19 = 7$, und die Goldene Zahl für das Jahr 311 ist gleich 8.

Wie wir gesehen haben, wird das letzte Jahr jedes kanonischen 19-jährigen Teilzyklus um einen Tag gekürzt (Mondsprung). Ist das letzte Jahr des 19-jährigen Zyklus ein Mondgemeinjahr, so enthält es 353 Tage, ist es ein embolistisches Jahr, so hat es 383 Tage. Der Mondsprung hat zur Folge, dass die Epakte beim Übergang zum ersten Jahr des neuen Zyklus entweder um 12 Tage zu- oder um 18 Tage abnimmt. Wegen $-18 \bmod 30 = 12$ beträgt die aufsummierte Epaktendifferenz $(18 \cdot 11 + 12) \bmod 30 = 210 \bmod 30 = 0$ Tage. Folglich hat jedes erste Jahr eines kanonischen 19-jährigen Zyklus die gleiche Epakte wie das erste Jahr des vorhergehenden Zyklus. Die geschickte Konstruktion der Alexandriner hat also zur Folge, dass sowohl die Epakten als auch die Ostergrenzen sich nicht erst nach 76, sondern schon nach 19 Jahren wiederholen! Dies gilt, obwohl die Dauer eines kanonischen Zyklus nicht konstant ist: Sie beträgt 6939 oder 6940 Tage, je nachdem ob der Zyklus vier oder fünf Schalttage enthält. Für die Bestimmung aller weiteren Ostergrenzen genügte es also, diejenigen eines einzigen kanonischen 19-jährigen Zyklus zu kennen.

Bemerkungen:

- Tabelle 1 stellt den kanonischen Zyklus dar, welcher mit dem Jahr 304 begann ($304 = 19 \cdot 16$; $\gamma(304) = 1$). Für jenes Jahr trat am 23. März ein zyklisches Neulicht ein; d.h., die Epakte war $\eta = 0$. Mit diesem Neulicht begann der Ostermonat, und 13 Tage später, am 5. April, war die Ostergrenze. Diese Angaben genügen, wie oben beschrieben, für die Bestimmung aller Epakten und Ostergrenzen des Zyklus von Tabelle 1. Auf Epakte 0 folgte Epakte 11 für das Jahr 305, Epakte 22 für das Jahr 306, Epakte $3 = 33 \bmod 30$, usw. Entsprechend fiel die Ostergrenze im Jahr 305 auf den 25. März, im Jahr 306 auf den 13. April und im Jahr 307 auf den 2. April, usw.
- Der Tabelle entnehmen wir, dass die alexandrinische Epakte η auf einfache Weise mit der Goldenen Zahl γ zusammenhängt. Es gilt nämlich

$$\eta = (11 \cdot (\gamma - 1)) \bmod 30 \quad (7)$$

- Die Daten von Tabelle 1 sind in den Festbriefen des Bischofs Athanasius von Alexandria (298–373) belegt. (Vgl. [Sch05, S. 13].)
- Anstelle von Epakte 0 verwendeten die Alexandriner Epakte 30. Dionysius Exiguus ersetzte Epakte 30 dann durch „Nulla“ (vgl. [Sch05, S. 14] und [Kru38, S. 69]). Das Zahlzeichen „0“ war zu jener Zeit den Lateinern noch nicht geläufig.
- Bis zur Gregorianischen Reform (1582) wiederholten sich die in der Tabelle angegebenen Epakten und Ostergrenzen in jedem kanonischen 19-jährigen Zyklus.
- Beim Nachrechnen stellte man fest, dass die in Tabelle 1 angegebenen Ostergrenzen gegenüber den astronomischen Vollmonden fast durchwegs um einen bis zwei Tage zu früh eintraten (vgl. [Sch05, S. 12/13]).
- In Alexandria wurde zu jener Zeit noch nicht die Christliche Zeitrechnung, sondern diejenige des römischen Kaisers Diokletian verwendet; letztere begann am 29. August 284.

Christliche Ära Jahreszahl j	Goldene Zahl γ	Epakte η	Ostergrenze
304	1	0	5. April
305	2	11	25. März
306	3	22	13. April
307	4	3	2. April
308	5	14	22. März
309	6	25	10. April
310	7	6	30. März
311	8	17	18. April
312	9	28	7. April
313	10	9	27. März
314	11	20	15. April
315	12	1	4. April
316	13	12	24. März
317	14	23	12. April
318	15	4	1. April
319	16	15	21. März
320	17	26	9. April
321	18	7	29. März
322	19	18	17. April

Tabelle 1 Kanonischer Zyklus von 304 bis 322

2.2 Notwendigkeit und Umsetzung der Gregorianischen Reform

Die Abweichung von ca. 11 m 15 s des Julianischen Jahres gegenüber dem tropischen Jahr, hatte sich vom 4. bis zum 16. Jahrhundert zu zehn Tagen aufsummiert; das astronomische Äquinoktium war zum 11. März abgewandert. Zur Bestimmung des Osterdatums verwendete die römische Kirche im 16. Jahrhundert jedoch immer noch den Alexandrinischen Osterzyklus mit dem 21. März als Tagundnachtgleiche. Dies hatte beispielsweise zur Folge, dass in Jahren mit $\gamma = 8$ die zyklische Ostergrenze auf den 18. April fiel, obwohl der vorangehende zyklische Vollmond vom 19. März der Frühlingsvollmond gewesen wäre. Ostern wurde in solchen Jahren vier oder sogar fünf Wochen zu spät gefeiert (z.B. im Jahr 1546 am 25. April statt am 21. März). Solche drastischen Fehler wollte die christliche Kirche nicht länger tolerieren. Gestützt auf einen Vorschlag des Mediziners und Astronomen Aloysius Lilius (1510–1574), berief Papst Gregor XIII. im Jahr 1576 eine Kommission zur Reform des Kalenders. Per Dekret liess der Papst im Oktober 1582 zehn Tage ausfallen: Auf Donnerstag, den 4. Oktober folgte Freitag, der 15. Oktober; d.h., die Abfolge der Wochentage wurde nicht angetastet. Dank Fortschritten in der Astronomie war es auch möglich geworden, für die Dauer des tropischen Jahres einen genaueren Wert anzugeben (vgl. Kapitel 1). So konnte die Reformkommission auch eine Regel angeben, dank der

sich die Tagundnachtgleiche im Kalender von nun an nicht mehr rückwärts bewegt – oder zumindest viel langsamer: In jedem Zeitraum von 400 Jahren entfallen drei Schalttage. Genauer ist dies der Fall in den Jahren, deren Jahreszahl durch 100 aber nicht durch 400 ohne Rest teilbar ist, also in den Jahren 1700, 1800, 1900, 2100, 2200, ... aber nicht in den Jahren 1600 oder 2000, usw. Jede solche Korrektur (sog. **Sonnenkorrektur** oder **-angleichung**) findet also in einem **Säkularjahr** statt; d.h., in einem Jahr, dessen Jahreszahl in der Christlichen Zeitrechnung durch 100 ohne Rest teilbar ist.

Die mittlere Länge des Gregorianischen Jahres beträgt somit

$$\left(365.25 - \frac{3}{400}\right) \text{ d} = 365.2425 \text{ d} \quad (8)$$

Dieser Teil der Gregorianischen Reform ist weitgehend bekannt. Weniger bekannt ist, dass die Bestimmung des Osterdatums weiterhin auf dem 19-jährigen Metonschen Zyklus beruht. Letzterer musste allerdings auch angepasst werden: Die Ungenauigkeit dieses Zyklus hatte sich zwischen dem vierten und dem 16. Jh. zu vier Tagen aufsummiert. Dass schon zur Zeit des Konzils von Nikaia die zyklischen Vollmonde mindestens einen Tag zu früh eintraten, scheint der Reformkommission bekannt gewesen zu sein. Sie entschied sich deshalb, die zyklischen Monddaten nur um drei Tage zurückzusetzen (Vgl. [Cla03, S. 18ff] und [Cla03, Kap. IX, 12]). Es wurden zudem neue Regeln erlassen, damit die zyklischen Monddaten sich in Zukunft nicht mehr wesentlich von den astronomischen entfernten: Die mittlere alexandrinische Lunation dauert $27759/940 \text{ d} \approx 29.5308511 \text{ d}$ und ist damit gegenüber dem synodischen Monat (29.5305924 d) um 0.0002587 d zu lang (vgl. Kapitel 1). Für ein mittleres Julianisches Jahr macht dies ca. 0.0032 d , und in 312.5 Jahren einen ganzen Tag aus. Man beachte, dass $8 \cdot 312.5 = 2500$ Jahre ergibt. Clavius, der federführende Mathematiker der Reformkommission, schlug deshalb vor, die Abweichung der zyklischen von den astronomischen Monddaten acht Mal innerhalb eines Zyklus von 2500 Jahren in Säkularjahren zu korrigieren (sog. **Mondkorrektur** oder **-angleichung**), und zwar sieben Mal nach je 300 Jahren und ein letztes Mal nach weiteren 400 Jahren. Die erste Korrektur fand im Jahr 1800 statt, die weiteren sollen in den Jahren 2100, 2400, 2700, ... die siebte im Jahr 3900 und die achte im Jahr 4300 stattfinden, usw.

Die Umsetzung der soeben beschriebenen Änderungen wurde mit Hilfe der Epakten erreicht. Die Bindung der letzteren an die Goldene Zahl (vgl. Formel 7) wurde gelockert, damit sie flexibler gehandhabt werden können. Die **Gregorianische Epakte** bezeichnet im Gregorianischen Kalender das Alter des zyklischen Mondes am *31. Dezember des Vorjahres*. Bei Clavius [Cla03, Kap. IX, 14] heisst es: „Denn die [gregorianischen] Epakten sind die Zahlen der Tage, die im Monat Dezember nach dem letzten Mondmonat des Jahres übrig bleiben“.

Die **Säkularkorrekturen**, d.h. die Sonnen- und Mondangleichungen, reflektieren sich in der Gregorianischen Epakte wie folgt:

- Wird in einem Säkularjahr der Schalttag ausgelassen (Sonnenangleichung), so muss die Epakte um einen Tag vermindert werden.
- Wird in einem Säkularjahr das Mondjahr angeglichen (Mondangleichung), so muss die Epakte um einen Tag erhöht werden.

Parallel zum neuen Bezugstag der Epakte beginnt das Gregorianische Mondjahr frühestens am 3. Dezember des Vorjahres und spätestens am 1. Januar, und zwar mit einer vollen Lutation.² Endet der 12. Monat eines Mondjahres vor dem 2. Dezember, so wird ein zusätzlicher Mondmonat eingeschaltet. Das Jahr ist dann ein embolistisches Mondjahr (vgl. [Cla03, Kap. XVI]).

Im Folgenden nennen wir einen kanonischen 19-jährigen Zyklus **regulär**, falls er kein Säkularjahr enthält, in welchem entweder eine Sonnen- oder eine Mondangleichung stattfindet. Andernfalls nennen wir den Zyklus **irregulär**. Z.B. ist der kanonische Zyklus, der im Jahr 1995 begann, regulär, denn im Jahr 2000 fand keine Korrektur statt. Der kanonische Zyklus, welcher im Jahr 2185 beginnen wird, ist hingegen irregulär, weil im Jahr 2200 eine Sonnenangleichung, aber keine Mondangleichung stattfindet. Wir werden im Abschnitt 3.7 auf die irregulären Zyklen zurückkommen.

Ein regulärer kanonischer Zyklus enthält 6935 Tage plus vier oder fünf Schalttage. Auch nach der Reform wird, wie bei den Alexandrinern, jedem Mondjahr, welches einem Julianischen Sonnenschaltjahr entspricht, ein Tag hinzugefügt. Gemäss [Cla03, Kap. 8, S. 87] geschieht dies am 29. Februar: Der zyklische Mondmonat, welcher den 29. Februar enthält, wird um einen Tag verlängert, egal ob dieser Monat in einem Gemeinjahr voll oder hohl wäre. Dank diesem Kunstgriff können die Sonnenschalttage ignoriert werden. Damit ergeben sich künstliche 19-jährige Zyklen, welche je 6935 d enthalten. Ein solcher Zyklus von 6935 Tagen enthält 120 volle und 115 hohle Monate.

Als Konsequenz der Säkularkorrekturen sind, im Gegensatz zum Alexandrinischen Osterzyklus, nach der Gregorianischen Reform im Laufe der Jahrhunderte sämtliche Epakten möglich. Zudem kann jede Epakte an jeder Stelle und somit insbesondere auch am Anfang (und am Ende) eines kanonischen Zyklus stehen. Insgesamt sind also 30 verschiedene reguläre kanonische Zyklen möglich.

3 Der immerwährende Neulichtkalender

Dieses Kapitel ist dem Neulichtkalender des Clavius [Cla03, S. 36–47] gewidmet. Dieser Kalender, der weitgehend auf der Vorarbeit des Aloysius Lilius beruht (vgl. Abschnitt 2.2), ermöglicht es, bei gegebener Epakte die zyklischen Neulichter des ganzen Jahres zu bestimmen.

3.1 Neulichter und Epakten

Im Gegensatz zum schon bestehenden Neulichtkalender, der auf den Goldenen Zahlen beruhte, basiert der von Lilius und Clavius eingeführte immerwährende Neulichtkalender auf den Epakten. *Genauer wird jedem Tag des Sonnenjahrs diejenige Epakte zugeordnet, bei welcher am betreffenden Tag ein zyklisches Neulicht eintritt.* Ausnahmen sind der 29. Februar, dem keine Epakte zugeordnet wird, sowie die doppelten Mondtage (siehe Abschnitt 3.2). Tabelle 2 zeigt den vollständigen Neulichtkalender. Wir beschreiben nun sukzessive, wie dieser Kalender aufgebaut ist.

²Es ist allerdings zu bemerken, dass es aufgrund des Mondsprungs Ausnahmen gibt: Die Jahre mit $\gamma = 1$ und Epakte $\varepsilon \geq 2$ beginnen mit einer hohlen Lutation (vgl. Abschnitt 3.8).

Jedes zyklische Neulicht, welches vom 3. Dezember bis zum 1. Januar eintritt, markiert den Beginn eines Mondjahrs. Tritt am 3. *Dezember* ein Neulicht ein, so ist der Mond am 31. Dezember 29 Tage alt: Gemäss Definition der Gregorianischen Epakte wird dem anschliessenden Sonnenjahr Epakte 29 zugeordnet. Wie schon erwähnt, ist die erste Lunation voll, also tritt 30 Tage später, d.h. am 2. Januar das nächste zyklische Neulicht ein: Im Neulichtkalender wird dem 2. Januar Epakte 29 zugeordnet. Für das Neulicht des 4. *Dezember* ist der Mond am 31. Dezember 28 Tage alt. Diesem Mondjahr wird Epakte 28 zugeordnet. Die volle erste Lunation dieses Jahres geht am 2. Januar zu Ende, und am 3. Januar ist wieder Neulicht. Dem 3. Januar wird also Epakte 28 zugeordnet. Dem Mondjahr, welches am 5. *Dezember* beginnt, wird Epakte 27 zugeordnet. Die (volle) erste Lunation endet am 3. Januar, und am folgenden Tag beginnt die zweite Lunation: Dem 4. Januar wird Epakte 27 zugeordnet, usw. Wir erkennen, warum die Epakten in der Januar-Spalte von Tag zu Tag um eins abnehmen.

Dem Mondjahr, welches am 31. *Dezember* beginnt, wird Epakte 1 zugeordnet. Die erste Lunation endet am 29. Januar, und am folgenden Tag ist Neulicht: Dem 30. Januar wird ebenfalls Epakte 1 zugeordnet. Dem Mondjahr, welches am 1. *Januar* beginnt, wird Epakte 0 zugeordnet. Die zweite Lunation beginnt am 31. Januar. Im Neulichtkalender wird sowohl dem 1. als auch dem 31. Januar Epakte 0 zugeordnet. Wie dem 2. Januar, so wird auch 30 Tage später dem 1. Februar die Epakte 29 zugeordnet, usw.

Um festzulegen, ob eine zyklische Lunation 30 oder 29 Tage hat, gibt es zwei offensichtliche Vorgehensweisen: Entweder man nimmt zunächst an, dass alle Lunationen 29 Tage haben, und fügt nun zu gewissen Lunationen einen Tag hinzu (ähnlich wie beim 29. Februar im Sonnenkalender), oder *man gibt zunächst allen Lunationen 30 Tage und nimmt dann den hohlen einen Tag weg, bzw. man zählt einen Tag doppelt*. Bei der Schaffung des Neulichtkalenders wurde der zweite Weg begangen, indem den folgenden Tagen sowohl Epakte 24 als auch Epakte 25 zugeordnet wurden:

dem 5. Februar, 5. April, 3. Juni, 1. August, 29. September und 27. November.

Wir nennen diese Tage **doppelte Mondtage**. Wie wir gleich sehen werden, wird mit dieser Zuordnung bestimmt, welchen Lunationen ein Tag weggenommen wird, d.h. welche Lunationen hohl sind. Mit der Festlegung der doppelten Mondtage, die wir im Abschnitt 3.3 begründen werden, und mit der Einführung von Epakte xxv (einer Variante von Epakte 25, vgl. Abschnitt 3.4) ist der Neulichtkalender vollständig bestimmt (siehe Tabelle 2).

3.2 Lunationen mit doppelten Mondtagen

In diesem Abschnitt zeigen wir, dass – abgesehen von zwei Ausnahmen – alle zyklischen Lunationen, welche einen doppelten Mondtag enthalten, hohl sind. Als Beispiel für den Regelfall nehmen wir Epakte 27 und die Lunation, welche den 5. April als doppelten Mondtag enthält (vgl. Tabelle 3): Bei dieser Epakte tritt am 3. April ein zyklisches Neulicht ein. Der 4. April ist also der zweite Tag, der 5. April sowohl der dritte als auch der vierte Tag dieser Lunation. Am 6. April ist der 5. Tag, usw. Am 30. April ist der 29. Tag, am 1. Mai der 30. Tag. Am 2. Mai tritt das nächste zyklische Neulicht ein. Die doppelte Zählung des 5. April führt also dazu, dass die Lunation, welche am 3. April beginnt, am

Monat	Januar	Februar	März	April	Mai	Juni	Juli	August	September	Oktober	November	Dezember
Tag	Neulicht bei Epakte											
1	0	29	0	29	28	27	26	25 24	23	22	21	20
2	29	28	29	28	27	26 xxv	25 xxv	23	22	21	20	19
3	28	27	28	27	26	25 24	24	22	21	20	19	18
4	27	26 xxv	27	26 xxv	25 xxv	23	23	21	20	19	18	17
5	26	25 24	26	25 24	24	22	22	20	19	18	17	16
6	25 xxv	23	25 xxv	23	23	21	21	19	18	17	16	15
7	24	22	24	22	22	20	20	18	17	16	15	14
8	23	21	23	21	21	19	19	17	16	15	14	13
9	22	20	22	20	20	18	18	16	15	14	13	12
10	21	19	21	19	19	17	17	15	14	13	12	11
11	20	18	20	18	18	16	16	14	13	12	11	10
12	19	17	19	17	17	15	15	13	12	11	10	9
13	18	16	18	16	16	14	14	12	11	10	9	8
14	17	15	17	15	15	13	13	11	10	9	8	7
15	16	14	16	14	14	12	12	10	9	8	7	6
16	15	13	15	13	13	11	11	9	8	7	6	5
17	14	12	14	12	12	10	10	8	7	6	5	4
18	13	11	13	11	11	9	9	7	6	5	4	3
19	12	10	12	10	10	8	8	6	5	4	3	2
20	11	9	11	9	9	7	7	5	4	3	2	1
21	10	8	10	8	8	6	6	4	3	2	1	0
22	9	7	9	7	7	5	5	3	2	1	0	29
23	8	6	8	6	6	4	4	2	1	0	29	28
24	7	5	7	5	5	3	3	1	0	29	28	27
25	6	4	6	4	4	2	2	0	29	28	27	26
26	5	3	5	3	3	1	1	29	28	27	26 xxv	25 xxv
27	4	2	4	2	2	0	0	28	27	26	25 24	24
28	3	1	3	1	1	29	29	27	26 xxv	25 xxv	23	23
29	2		2	0	0	28	28	26	25 24	24	22	22
30	1		1	29	29	27	27	25 xxv	23	23	21	21
31	0		0		28		26 xxv	24		22		20

Tabelle 2 Der immerwährende Neulichtkalender des Clavius

1. Mai zu Ende geht und somit hohl ist. Dieselben Überlegungen gelten für alle zyklischen Lunationen mit einem doppelten Montag, falls letzterer nicht mit dem zyklischen Neulicht zusammenfällt.

Datum	Neulicht bei Epakte	Alter des Mondes bei Epakte 27
1. April	29	
2. April	28	
3. April	27	1. Tag (Neulicht)
4. April	26 xxv	2. Tag
5. April	25 und 24	3. und 4. Tag
6. April	23	5. Tag
⋮	⋮	⋮
29. April	0	28. Tag
30. April	29	29. Tag
1. Mai	28	30. Tag
2. Mai	27	1. Tag (Neulicht)
3. Mai	26	
⋮	⋮	

Tabelle 3 Epakte 27 mit dem 5. April als doppeltem Montag

voll, und bei Epakte 25 sind alle solchen Lunationen hohl. Damit ist die erste der beiden am Anfang dieses Abschnitts erwähnten Ausnahmen begründet. Die zweite Ausnahme werden wir im Abschnitt 3.4 aufzeigen.

3.3 Die ausgezeichnete Rolle des 5. April

Papst Gregor XIII. wollte möglichst viele „der alten kirchlichen Riten unversehrt“ lassen (vgl. [Clavius, S. 13]). Erstens soll die Ostergrenze nie nach dem 18. April eintreten, und zweitens sollen möglichst alle Ostermonate hohl sein. Wir werden jetzt erläutern, dass mit der Festlegung des 5. April als doppelten Montag das erste Ziel ganz und das zweite weitgehend erreicht wird. Wenn ein doppelter Montag festgelegt ist, ergeben sich die restlichen aus der Tatsache, dass der Abstand zwischen zwei doppelten Montagen 59 (= 29 + 30) Tage betragen muss, damit ein hohler von einem vollen Monat gefolgt wird.

- Bekanntlich tritt die Ostergrenze 13 Tage nach Beginn des Ostermonats ein (vgl. Abschnitt 2.1). Damit diese nach dem 20. März und vor dem 19. April stattfindet, muss der Ostermonat bei jeder Epakte nach dem 7. März und vor dem 6. April beginnen. Dies gilt insbesondere für Epakte 24, bei welcher am 7. März ein Neulicht eintritt, welches für die Ostergrenze zu früh ist. Wäre der zweite doppelte Montag nach

Besonderes Augenmerk müssen wir auf die Epakten 24 und 25 richten: Für diese Epaktenwerte fallen die doppelten Montage mit dem Neulicht zusammen. In dieser Situation stellt sich die Frage, ob der mit diesem Neulicht beginnende Mondmonat voll oder hohl ist. Als Beispiel nehmen wir das am 3. Juni eintretende Neulicht. Betrachten wir zuerst Epakte 24: Wäre der 3. Juni sowohl der erste als auch der zweite Tag der Lunation, so hätte diese bis zum 2. Juli 31 Tage (vgl. Tabelle 4). Bei der Gregorianischen Zählung enthält jedoch jede zyklische Lunation genau 30 Tage. Dies bedeutet dass der 3. Juni für Epakte 24 nicht doppelt gezählt werden kann, und dass dieser Monat voll ist.

Bei Epakte 25 hingegen müssen wir den 3. Juni doppelt zählen, damit der 1. Juli (vgl. Tabelle 4) der 30. Tag der Lunation ist. Dieser Mondmonat ist also hohl. Diese Überlegungen lassen sich auf alle Lunationen übertragen: Somit sind bei Epakte 24 alle Lunationen mit einem doppelten Montag

Monat	Neulicht bei Epakte	Alter des Mondes bei Epakte 24	Alter des Mondes bei Epakte 25
1. Juni	27		
2. Juni	26 xxv		
3. Juni	25 und 24	1. Tag (Neulicht)	1. Tag (Neulicht) und 2. Tag
4. Juni	23	2. Tag	3. Tag
5. Juni	22	3. Tag	4. Tag
6. Juni	21	4. Tag	5. Tag
⋮	⋮	⋮	⋮
28. Juni	29	26. Tag	27. Tag
29. Juni	28	27. Tag	28. Tag
30. Juni	27	28. Tag	29. Tag
1. Juli	26	29. Tag	30. Tag
2. Juli	25 xxv	30. Tag	1. Tag (Neulicht)
3. Juli	24	1. Tag (Neulicht)	2. Tag
4. Juli	23	2. Tag	3. Tag
⋮	⋮	⋮	⋮

Tabelle 4 Epakten 24 und 25 mit dem 3. Juni

dem 5. April, so wäre im Neulichtkalender die Epakte 24 am 6. April eingetragen. Die Obergrenze wäre dann am 19. April, was die Reformkommission ja verhindern wollte. Damit die Obergrenze stets am 18. April oder früher eintritt, ist somit notwendig und hinreichend, dass der doppelte Montag am 5. April oder früher eintritt.

- Angenommen, der doppelte Montag wäre vor dem 5. April, also z.B. am 3. April. Dann wären im Neulichtkalender an diesem Tag die Epakten 27 und 26 eingetragen. Folglich wäre der Monat zu Epakte 27 hohl und die Monate zu den Epakten 26, 25 und 24 wären alle voll. Allgemein wären so viele Ostermonate voll, wie es Tage hat vom doppelten Montag bis und mit dem 5. April. Wenn der doppelte Montag am 5. April ist, mit den Epakten 24 und 25, so ist nur der Ostermonat zu Epakte 24 voll. Damit sind möglichst viele Ostermonate hohl.

3.4 Die Epakte xxv

Im Folgenden wollen wir erklären, was die Reformkommission dazu bewog, eine zweite Variante von Epakte 25 zu definieren. Auch in diesem Fall sollte der Tradition Rechnung getragen werden. Im Alexandrinischen Computus konnte im selben kanonischen 19-jährigen Zyklus die gleiche Obergrenze nie zweimal vorkommen. Im Neulichtkalender des Clavius tritt die Obergrenze sowohl bei Epakte 24 als auch bei Epakte 25 am 18. April ein. Erscheint Epakte 24 innerhalb der ersten acht Jahre eines regulären kanonischen Zyklus,

so zeigt eine leichte Rechnung, dass 11 Jahre später auch Epakte 25 vorkommen wird. Damit käme im gleichen Zyklus zweimal dieselbe Ostergrenze vor. Um dies zu verhindern, wurde für $\gamma \geq 12$ eine zweite Version von Epakte 25 eingeführt, die wir hier mit xxv bezeichnen. (Dieser Ausnahmefall ist bei Clavius arabisch geschrieben, während alle anderen Epaktenwerte mit römischen Zahlzeichen dargestellt werden [Cla03, S. 100].) Wie wir Tabelle 2 entnehmen, fallen bei Epakte xxv pro Jahr sechs zyklische Neulichter mit den Neulichtern der Epakte 26 zusammen. Insbesondere beginnt der Ostermonat bei Epakte xxv ebenfalls am 4. April und die Ostergrenze ist am 17. April. Somit kann die Ostergrenze nie zweimal im selben regulären kanonischen Zyklus auf den 18. April fallen.

Bei Epakte xxv treten die sechs zyklischen Neulichter vor doppelten Mondtagen einen Tag früher ein als bei Epakte 25, während die sechs anderen Neulichter der Epakten 25 und xxv auf den gleichen Tag fallen. Daraus folgt, dass bei Epakte xxv alle Lunationen, welche einen doppelten Montag enthalten, voll sind. Insbesondere ist auch der Ostermonat voll. Damit ist auch der zweite Ausnahmefall von Abschnitt 3.2 begründet.

Sowohl bei Epakte xxv als auch bei Epakte 26 ist die Ostergrenze am 17. April. Kommen aber Epakte 25 und 26 im selben regulären kanonischen Zyklus vor, so erscheint Epakte 26 ebenfalls elf Jahre nach Epakte 25. Dies ist jedoch nur möglich, wenn Epakte 25 in der ersten Hälfte eines solchen Zyklus auftritt. Die Epakte xxv kommt jedoch nur vor, wenn $\gamma \geq 12$ ist; also können die Epakten xxv und 26 nie im selben Zyklus auftreten.

Interessant ist, dass das Osterfest selbst innerhalb eines regulären kanonischen Zyklus durchaus zweimal auf dasselbe Datum fallen kann! Z.B. wurde Ostern sowohl im Jahr 1998 ($\gamma = 4$) als auch im Jahr 2009 ($\gamma = 15$) am 12. April gefeiert.

3.5 Mondgemeinjahre und embolistische Jahre

Ob ein Mondjahr ein Gemeinjahr oder embolistisch ist, kann ebenfalls dem Neulichtkalender entnommen werden. Wir erinnern daran, dass Mondjahre frühestens am 3. Dezember und spätestens am 1. Januar beginnen. Bei Epakte $\varepsilon \leq 17$ beginnt das Mondjahr am 15. Dezember oder später, und der 12. Monat endet am 3. Dezember oder später. Es wird somit kein zusätzlicher Monat angefügt, also ist es ein Mondgemeinjahr. Bei Epakte $\varepsilon \geq 19$ beginnt das Mondjahr am 13. Dezember oder früher und der 12. Monat endet am 1. Dezember oder früher. Es wird ein zusätzlicher Mondmonat eingeschaltet. Also handelt es sich um ein embolistisches Jahr. Bei Epakte 18 und Goldener Zahl $\gamma \leq 18$ beginnt das Mondjahr am 14. Dezember und die 12. Lunation endet am 2. Dezember. Das darauf folgende Mondjahr beginnt am 3. Dezember mit Epakte 29: Das alte Jahr ist also ein Mondgemeinjahr. Falls das Jahr mit Epakte 18 jedoch das letzte Jahr eines kanonischen Zyklus ist ($\gamma = 19$), so ist die Epakte des folgenden Jahres gleich 0 (Mondsprung), und das neue Mondjahr beginnt erst am 1. Januar. Also muss ein zusätzlicher (hohler) Mondmonat angefügt werden: Das Mondjahr wird embolistisch.

Zusammengefasst gilt:

- Jedes Mondjahr mit einer Epakte $\varepsilon \leq 17$ ist ein Gemeinjahr.
- Jedes Mondjahr mit einer Epakte $\varepsilon \geq 19$ ist ein embolistisches Jahr.

- Für ein Mondjahr mit Epakte $\varepsilon = 18$ gilt:
 - Ist $\gamma \leq 18$, so ist es ein Gemeinjahr;
 - Ist $\gamma = 19$, so ist es ein embolistisches Jahr.

3.6 Zur Länge der regulären kanonischen Zyklen

Wir zeigen im Folgenden, dass jeder reguläre kanonische Zyklus 120 volle und 115 hohle Lunationen und somit 6935 Tage enthält, wobei, wie oben erläutert, die Sonnenschalttage nicht gezählt werden. Um dies einzusehen, zählen wir die hohlen Lunationen. Gemäss Neulichtkalender und der Festlegung des Mondjahresbeginns enthält jedes Mondjahr sechs doppelte Mondtage. Zu jedem doppelten Montag gehört eine hohle Lunation: Für alle Epakten, ausser für 24 und xxv, ist diejenige Lunation hohl, welche den doppelten Montag enthält (vgl. Abschnitt 3.2). Im Fall der Epakten 24 und xxv ist die Lunation mit dem doppelten Montag voll (vgl. Abschnitte 3.2 und 3.4). Wir entnehmen dem Neulichtkalender, dass dann die vorangehende Lunation stets hohl ist. In jedem regulären kanonischen Zyklus verursacht der Mondsprung eine weitere hohle Lunation, entweder im ersten oder im letzten Jahr des Zyklus. Alle anderen Lunationen sind voll. Also enthält jeder Zyklus genau $19 \cdot 6 + 1 = 115$ hohle und $235 - 115 = 120$ volle Lunationen.

3.7 Irreguläre kanonische Zyklen

In irregulären kanonischen Zyklen kommt es immer wieder vor, dass zweimal dieselben Ostergrenzen auftreten.

Beispiele:

1. Schon im ersten irregulären kanonischen Zyklus, der von 1691 bis 1709 dauerte, kamen acht verschiedene Ostergrenzen je zweimal vor, nämlich

12. April	1. April	21. März	9. April	29. März	17. April	6. April	26. März
1691	1692	1693	1694	1695	1696	1697	1698
1702	1703	1704	1705	1706	1707	1708	1709

2. Auch in den irregulären Zyklen um die Jahre 2200, 2300, 2500, 2600, ... wird es zu Wiederholungen der Ostergrenze kommen.
3. Auch im Zyklus, der von 3097 bis 3115 dauert, werden Wiederholungen eintreten, nämlich in den Jahren 3098 und 3109 bzw. 3099 und 3110. Interessant ist, dass in diesem Zyklus sowohl Epakte 25 (im Jahr 3097) als auch Epakte xxv (im Jahr 3108) vorkommen werden.
4. Im Zyklus, der von 3591 bis 3609 dauert, werden sowohl Epakte 25 (im Jahr 3594) als auch Epakte 24 (im Jahr 3602) erscheinen. In beiden Fällen wird die Ostergrenze auf den 18. April fallen.

3.8 Bemerkungen zur Epaktendefinition

1. Wir erinnern daran, dass die Gregorianische Epakte ε definiert wurde als das Alter des zyklischen Mondes am 31. Dezember des Vorjahres (vgl. Abschnitt 2.2).

2. Die jährliche Zunahme der Gregorianischen Epakte um 11 Tage (modulo 30) ist im Neulichtkalender abgebildet. Beim Mondsprung sowie in den Säkularjahren mit Mondangleichung beträgt die Zunahme jedoch 12 Tage (modulo 30).
3. In diesen Ausnahmefällen kann es vorkommen, dass die Epakte eines Jahres nicht mit dem Mondalter am 31. Dezember übereinstimmt. Bei Clavius heisst es: „Doch geschieht es zuweilen, dass die Epakte eines Jahres um eine Einheit grösser ist als die Zahl der Tage, die nach dem letzten Mondmonat des vorhergehenden Jahres übrig bleiben“ [Cla03, Kapitel IX, 14].
4. Dies ist der Fall für ein Jahr mit Epakte $\varepsilon \geq 2$, falls es sich um ein erstes Jahr eines kanonischen Zyklus oder um ein Säkularjahr mit einer Mondangleichung (z.B. das Jahr 2400) handelt. Als Folge davon ist in solchen Jahren die erste Lunation hohl.
5. Für Jahre mit $\gamma = 1$ und $\varepsilon \leq 1$ wird die Epaktendefinition korrekt angewendet.
 - Für ein Jahr mit $\gamma = 1$ und $\varepsilon = 0$ hat das Vorjahr Epakte 18 und ist embolistisch (vgl. Abschnitt 3.5) mit einem hohlen letzten Monat. Das neue Jahr beginnt am 1. Januar, und der zyklische Mond ist am 31. Dezember 0 Tage alt.
 - Für ein Jahr mit $\gamma = 1$ und $\varepsilon = 1$ hat das Vorjahr Epakte 19 und ist embolistisch (vgl. Abschnitt 3.5). Damit das Jahr am 31. Dezember beginnen kann, wird dem 13. Monat des Vorjahres ein Tag weggenommen.

Dank

Diese Publikation ist im Zusammenhang mit einem Buchprojekt zum Thema *Kalendermathematik* entstanden. Wir danken Norbert Hungerbühler für seine ideelle und finanzielle Unterstützung sowohl des Buchprojekts als auch dieser Arbeit. Das Buchprojekt steht unter dem Patronat der Deutschschweizerischen Mathematik-Kommission (DMK). Projektleiterin ist Daniela Grawehr, die Präsidentin der DMK; das Buch wird beim Carl Hanser-Verlag erscheinen. Wir danken Daniela und dem Carl Hanser-Verlag für die Bereitschaft, diese separate Publikation zu unterstützen. Bedanken möchten wir uns nicht zuletzt beim Altphilologen Karl Philipp. Er hat für uns viele Seiten aus der „Explicatio“ und insbesondere die beiden in dieser Arbeit zitierten Stellen (vgl. S. 52 und 60) übersetzt.

Ausblick

In diesem ersten Teil haben wir zunächst den Aufbau des Alexandrinischen Osterzyklus erklärt. Nach Darlegung der Beweggründe haben wir die Gregorianische Reform und insbesondere die Struktur des Neulichtkalenders erläutert. Letzterer erlaubt es uns, bei gegebener Epakte die Ostergrenze zu bestimmen. Im zweiten Teil [AH17] werden wir zunächst die Mathematik entwickeln, wie S Schaltungen auf N Jahre gleichmässig verteilt werden können. Mit diesem mathematischen Hilfsmittel und den Ergebnissen des ersten Teils leiten wir dann Formeln her für die Bestimmung von Epakte, Ostergrenze und Osterdatum eines beliebigen Jahres.

Literatur

- [AH17] ALBERTINI, CLAUDIA und MARTIN HUBER: *Die Gregorianische Kalenderreform, Teil 2*. Elemente der Mathematik, zur Publikation eingereicht 2017.
- [BB52] BEN MOSE, JEHUDA und ISAAK BEN SID: *Tabulae Alfonsinae*. Toledo, 1252.
- [Cla03] CLAVIUS, CHRISTOPHORUS: *Romani Calendarii a Gregorio XIII. P. M. restituti explicatio*. Rom, 1603.
- [Dog92] DOGGETT, L.E.: *Explanatory Supplement to the Astronomical Almanac*. University Science Books, 1992.
- [Kru38] KRUSCH, BRUNO: *Studien zur christlich-mittelalterlichen Chronologie: Die Entstehung unserer heutigen Zeitrechnung*. Preußische Akademie der Wissenschaften, Berlin, 1938.
- [MS92] MEEUS, JEAN und DENIS SAVOIE: *The history of the tropical year*. J. Br. Astron. Assoc., 102(1):40–42, 1992.
- [Rei51] REINHOLD, ERASMUS: *Prutenicae tabulae coelestium motuum*. Wittenberg, 1551.
- [Ric98] RICHARDS, E.G.: *Mapping Time – The Calendar and its History*. Oxford University Press, Oxford, 1998.
- [Sch05] SCHWARTZ, EDUARD: *Christliche und jüdische Ostertafeln. Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen*. Weidmannsche Buchhandlung, Berlin, 1905.

Claudia Albertini
Pädagogische Hochschule Zürich
Lagerstrasse 2
CH-8090 Zürich
claudia.albertini@phzh.ch

Martin Huber
Kienastewiesweg 32
CH-8053 Zürich
hu_ma@bluewin.ch