Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Band: 72 (2017)
Heft: 3

Artikel: Die Gregorianische Kalenderreform, Teil 2
Autor: Albertini, Claudia / Huber, Martin
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-730836

Elem. Math. 72 (2017) 89 – 102
0013-6018/17/030089-14
DOI 10.4171/EM/331

Elemente der Mathematik

Die Gregorianische Kalenderreform, Teil 2

Claudia Albertini und Martin Huber

Claudia Albertini erwarb 1986 das Primarlehrerpatent. Anschliessend studierte sie Mathematik an der Universität Zürich und schloss 1996 mit dem Doktorat ab. Von 1996 bis 2003 unterrichtete sie Mathematik an der Kantonsschule Zürcher Oberland. Seit 2003 ist sie an der PH Zürich als Dozentin für Mathematik und Mathematikdidaktik tätig. Seit 2007 ist sie auch Lehrbeauftragte an der Universität Zürich und hält Vorlesungen für zukünftige Sekundarlehrpersonen.

Martin Huber studierte Mathematik an der ETH Zürich und doktorierte dort 1976. Mit einem Stipendium des Schweizerischen Nationalfonds arbeitete er von 1978 bis 1980 an verschiedenen US-amerikanischen Universitäten im Bereich der Algebra. Bis 1985 war er dann an der Universität Freiburg im Breisgau tätig, wo er sich 1982 habilitierte. In den Jahren 1983 bis 2013 hielt er Vorlesungen an der Universität Zürich für künftige Sekundarlehrpersonen. Ab 1987 bis zu seiner Pensionierung 2014 wirkte er als Dozent an der FH Winterthur.

Zusammen mit Teil 1 bildet diese Publikation eine überarbeitete und erweiterte Fassung eines Vortrags, den die Autoren im November 2016 im *Kolloquium für Mathematik, Informatik und Unterricht* an der ETH Zürich gehalten haben.

1 Verteilung von Schaltungen

Beim Herstellen eines Kalenders geht es oft darum, S Schaltungen auf einen Zyklus von N Zeiteinheiten (im Folgenden meistens Jahre) zu verteilen. Z.B. müssen im Metonschen Zyklus 7 embolistische Jahre (Mondschaltjahre) auf 19 Mondjahre verteilt werden.

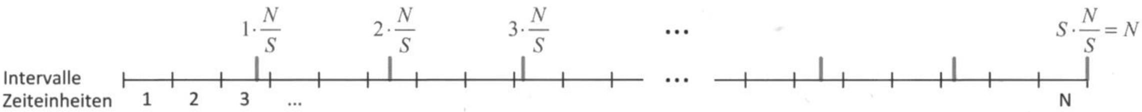
Die Gregorianische Reform, dank der das Frühlingsäquinoktium und damit das Datum des Osterfestes im Kalender wieder an den richtigen Platz gerückt wurde, ist im letzten Heft, im ersten Teil dieser Arbeit, beschrieben worden. Aus dieser Beschreibung gewinnen die Autoren im vorliegenden zweiten Teil eine Formel zur Berechnung des Osterdatums, welche auf der Goldenen Zahl und der Epakte beruht. Die Neuerungen der Gregorianischen Reform (Neulichtkalender, Sonnen- und Mondangleichung) werden hier mathematisch modelliert und daraus die Osterformel entwickelt. Dieser historisch motivierte Zugang hat den Vorteil, dass alle in der Formel vorkommenden Grössen inhaltlich begründet sind. Im Gegensatz zu den anderen bekannten Osterformeln handelt es sich also nicht um eine Präzisierung oder Vereinfachung der berühmten Gaußschen Osterformel.

Für beliebige Zahlen $x \in \mathbb{R}$ werden wir die folgenden Bezeichnungen verwenden:

- $\lceil x \rceil$ für die kleinste ganze Zahl, welche grösser oder gleich x ist;
- $\lfloor x \rfloor$ für die grösste ganze Zahl, welche kleiner oder gleich x ist.

1.1 Die kanonische Verteilung von Schaltungen

Zerlegt man das Zeitintervall $[0, N]$ in S gleich lange Teilintervalle, so sind die Zeitpunkte $m \cdot \frac{N}{S}$, $1 \leqslant m \leqslant S$, deren Endpunkte.



Figur 1: Zerlegung in S gleich lange Teilintervalle

Für jeden Index m, $1 \leqslant m \leqslant S$, definieren wir die Zahl $k_m \in \mathbb{N}$ dadurch, dass der m-te Zeitpunkt $m \cdot \frac{N}{S}$ in die k_m-te Zeiteinheit $]k_m - 1, k_m]$ fällt.
Somit gilt:

$$k_m - 1 < m \cdot \frac{N}{S} \leqslant k_m, \quad 1 \leqslant m \leqslant S \tag{1}$$

und folglich:

$$k_m = \left\lceil m \cdot \frac{N}{S} \right\rceil, \quad 1 \leqslant m \leqslant S. \tag{2}$$

Definition. Die Folge $k_1 \leqslant k_2 \leqslant k_3 \leqslant \cdots \leqslant k_S$ nennen wir **kanonische Verteilung** von S Schaltungen auf N Zeiteinheiten. Dabei findet die m-te Schaltung in der k_m-ten Zeiteinheit statt.

Beispiel. Die kanonische Verteilung im Metonschen Zyklus ($N = 19$, $S = 7$) lautet: $3 \leqslant 6 \leqslant 9 \leqslant 11 \leqslant 14 \leqslant 17 \leqslant 19$, denn:

k_1	k_2	k_3	k_4	k_5	k_6	k_7
$\lceil 1 \cdot \frac{19}{7} \rceil$	$\lceil 2 \cdot \frac{19}{7} \rceil$	$\lceil 3 \cdot \frac{19}{7} \rceil$	$\lceil 4 \cdot \frac{19}{7} \rceil$	$\lceil 5 \cdot \frac{19}{7} \rceil$	$\lceil 6 \cdot \frac{19}{7} \rceil$	$\lceil 7 \cdot \frac{19}{7} \rceil$
3	6	9	11	14	17	19

Tabelle 1: Kanonische Verteilung im Metonschen Zyklus

Definition. Die aufsteigende Folge $(k_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit

$$k_n = \left\lceil n \cdot \frac{N}{S} \right\rceil, \quad n \in \mathbb{N} \tag{3}$$

nennen wir **zyklische Fortsetzung** der kanonischen Verteilung.

Beispiel. Die zyklische Fortsetzung der kanonischen Verteilung im Metonschen Zyklus sieht wie folgt aus:

k_1	k_2	k_3	k_4	k_5	k_6	k_7	k_8	k_9	k_{10}	k_{11}	k_{12}	k_{13}	k_{14}	k_{15}	k_{16}	k_{17}	...
3	6	9	11	14	17	19	22	25	28	30	33	36	38	41	44	47	...

Tabelle 2: Zyklische Fortsetzung der kanonischen Verteilung im Metonschen Zyklus

Hier gilt z.B.: $k_{17} = k_3 + 2 \cdot 19 = 9 + 38 = 47$, wobei $17 = 3 + 2 \cdot 7$.

Allgemeiner Fall: Zu jedem Index $n > S$ gibt es eindeutige Zahlen $i, m \in \mathbb{N}$ mit $1 \leqslant m \leqslant S$, so dass $n = m + i \cdot S$, und es gilt:

$$\begin{aligned} k_n = k_{m+i\cdot S} &= \left\lceil (m + i \cdot S) \cdot \frac{N}{S} \right\rceil \\ &= \left\lceil m \cdot \frac{N}{S} + i \cdot N \right\rceil = \left\lceil m \cdot \frac{N}{S} \right\rceil + i \cdot N \\ &= k_m + i \cdot N. \end{aligned} \tag{4}$$

Es stellen sich nun bei gegebener Zeiteinheit j die folgenden Fragen:

1. Wie viele Schaltungen haben bis und mit der Zeiteinheit j stattgefunden?
2. Wird in der Zeiteinheit j geschaltet?

Bis und mit der Zeiteinheit j haben n Schaltungen stattgefunden, falls $k_n \leqslant j < k_{n+1}$. Es gilt:

$$\begin{aligned} k_n \leqslant j < k_{n+1} \quad &\overset{(3)}{\Leftrightarrow} \quad \left\lceil n \cdot \frac{N}{S} \right\rceil \leqslant j < \left\lceil (n+1) \cdot \frac{N}{S} \right\rceil \\ &\Leftrightarrow \quad n \cdot \frac{N}{S} \leqslant j < (n+1) \cdot \frac{N}{S} \\ &\Leftrightarrow \quad n \leqslant j \cdot \frac{S}{N} < n + 1 \\ &\Leftrightarrow \quad n = \left\lfloor j \cdot \frac{S}{N} \right\rfloor. \end{aligned}$$

Damit können wir beide Fragen beantworten:

1. Bis und mit der Zeiteinheit j haben
$$n = \left\lfloor j \cdot \frac{S}{N} \right\rfloor \tag{5}$$
Schaltungen stattgefunden.
2. In der Zeiteinheit j findet genau dann eine Schaltung statt, wenn
$$\left\lfloor j \cdot \frac{S}{N} \right\rfloor - \left\lfloor (j-1) \cdot \frac{S}{N} \right\rfloor = 1. \tag{6}$$

Definition. Die Funktion
$$s : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}; \; j \mapsto \left\lfloor j \cdot \frac{S}{N} \right\rfloor, \tag{7}$$
welche jeder Zeiteinheit j die Anzahl Schaltungen bis und mit der Zeiteinheit j zuordnet, nennen wir die **kanonische Schaltfunktion**.

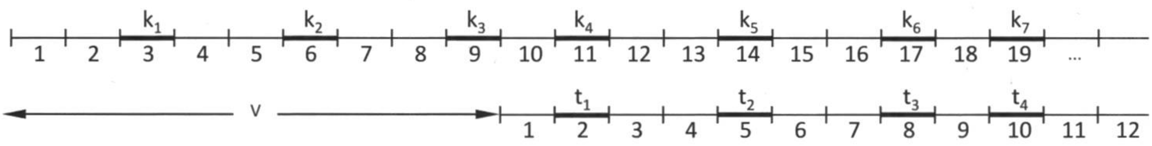
1.2 Möglichst gleichmässige Verteilung von Schaltungen

Beispiel. Die Verteilung $(t_m)_{1\leqslant m\leqslant 7}$ im Metonschen Zyklus ($N=19,\ S=7$), gegeben durch

t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6	t_7
2	5	8	10	13	16	19

Tabelle 3: Verteilung $(t_m)_{1\leqslant m\leqslant 7}$ im Metonschen Zyklus

geht aus der kanonischen Verteilung $(k_m)_{1\leqslant m\leqslant 7}$ durch eine Verschiebung um $v=9$ Jahre hervor:



Figur 2: Vergleich von $(t_m)_{1\leqslant m\leqslant 7}$ mit der kanonischen Verteilung

Bei der kanonischen Verteilung haben nach Formel (5) bis und mit dem 9. Jahr $\lfloor 9\cdot\frac{7}{19}\rfloor=3$ Schaltungen stattgefunden. Es gilt:

$$t_m = k_{m+3} - 9 = \left\lceil (m+3)\cdot\frac{19}{7}\right\rceil - 9,\ 1\leqslant m\leqslant 7.$$

Definition. Eine Folge $t_1 \leqslant \cdots \leqslant t_S$ nennen wir **möglichst gleichmässige Verteilung** von S Schaltungen auf N Zeiteinheiten, wenn es Zahlen $v, d \in \mathbb{N}_0$ gibt, so dass

$$t_m = k_{m+d} - v = \left\lceil (m+d)\cdot\frac{N}{S}\right\rceil - v, \quad 1\leqslant m\leqslant S. \tag{8}$$

Die Verteilung $t_1 \leqslant \cdots \leqslant t_S$ geht durch Verschiebung um v Zeiteinheiten aus der kanonischen hervor. Die Zahl d ist die Indexverschiebung und kann durch v bestimmt werden. Nach Formel (5) gilt:

$$d = \left\lfloor v\cdot\frac{S}{N}\right\rfloor. \tag{9}$$

Beispiele:

1. Die kanonische Verteilung ist möglichst gleichmässig (man wähle $v=0$ und $d=0$).
2. Die Verteilung $2\leqslant 4\leqslant 6\leqslant 8\leqslant 10\leqslant 12\leqslant 14$ ist nicht möglichst gleichmässig.
3. Wie oben erläutert, ist die Verteilung $2\leqslant 5\leqslant 8\leqslant 10\leqslant 13\leqslant 16\leqslant 19$ im Metonschen Zyklus möglichst gleichmässig.

Auch die Verteilung $t_1 \leqslant \cdots \leqslant t_S$ kann zyklisch fortgesetzt werden:

t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6	t_7	t_8	t_9	t_{10}	t_{11}	t_{12}	t_{13}	t_{14}	t_{15}	t_{16}	t_{17}	...
2	5	8	10	13	16	19	21	24	27	29	32	35	38	40	43	46	...

Tabelle 4: Fortsetzung der Verteilung $2 \leqslant 5 \leqslant 8 \leqslant \cdots \leqslant 19$

Zurück zum allgemeinen Fall:

Definitionen. Jede möglichst gleichmässige Verteilung $t_1 \leqslant \cdots \leqslant t_S$, gegeben durch N, S, v und $d(v)$, kann zyklisch fortgesetzt werden. Die **zyklische Fortsetzung** $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wird definiert durch:

$$t_n = \left\lceil (n+d) \cdot \frac{N}{S} \right\rceil - v, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{10}$$

Eine solche Fortsetzung nennen wir ebenfalls **möglichst gleichmässig**.

Für jede zyklische Fortsetzung gilt (vgl. Formel (4)):

$$t_n = t_m + i \cdot N, \quad \text{wobei} \quad n = m + i \cdot S \quad \text{und} \quad 1 \leqslant m \leqslant S. \tag{11}$$

Auch für die zyklische Fortsetzung einer beliebigen möglichst gleichmässigen Verteilung $(t_m)_{1\leqslant m\leqslant S}$ betrachten wir die beiden Fragen am Ende von Abschnitt 1.1.

Bis und mit der Zeiteinheit j haben n Schaltungen stattgefunden, falls $t_n \leqslant j < t_{n+1}$. Wir schliessen:

$$\begin{aligned}
t_n \leqslant j < t_{n+1} \quad &\overset{(10)}{\Leftrightarrow} \quad \left\lceil (n+d) \cdot \frac{N}{S} \right\rceil - v \leqslant j < \left\lceil (n+1+d) \cdot \frac{N}{S} \right\rceil - v \\
&\Leftrightarrow \quad (n+d) \cdot \frac{N}{S} - v \leqslant j < (n+1+d) \cdot \frac{N}{S} - v \\
&\Leftrightarrow \quad (n+d) \cdot \frac{N}{S} \leqslant j + v < (n+1+d) \cdot \frac{N}{S} \\
&\Leftrightarrow \quad n + d \leqslant (j+v) \cdot \frac{S}{N} < n + 1 + d \\
&\Leftrightarrow \quad n \leqslant (j+v) \cdot \frac{S}{N} - d < n + 1 \\
&\Leftrightarrow \quad n = \left\lfloor (j+v) \cdot \frac{S}{N} \right\rfloor - d.
\end{aligned}$$

Damit können wir beide Fragen beantworten:

1. Bis und mit der Zeiteinheit j finden

$$\left\lfloor (j+v) \cdot \frac{S}{N} \right\rfloor - d \tag{12}$$

   Schaltungen statt.

2. In der Zeiteinheit j findet genau dann eine Schaltung statt, wenn

$$\left\lfloor (j+v) \cdot \frac{S}{N} \right\rfloor - \left\lfloor (j+v-1) \cdot \frac{S}{N} \right\rfloor = 1. \tag{13}$$

Definition. Die Funktion

$$s : \mathbb{N} \to \mathbb{Z};\ j \mapsto \left\lfloor (j + \upsilon) \cdot \frac{S}{N} \right\rfloor - d,$$

welche jeder Zeiteinheit j die Anzahl Schaltungen bis und mit der Zeiteinheit j zuordnet, nennen wir die zu N, S, υ und d gehörige **Schaltfunktion**.

1.3 Verteilung von Schaltungen, die im Jahr j_0 beginnen

Es kommt vor, dass innerhalb einer Zeitrechnung erst ab einem bestimmten Jahr neue Schaltregeln eingeführt werden. Sollen, ausgehend von der kanonischen Schaltfunktion

$$j \mapsto \left\lfloor j \cdot \frac{S}{N} \right\rfloor$$

Schaltungen erst ab einem Jahr j_0 stattfinden, so ist die neue Schaltfunktion $s : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ gegeben durch:

$$s(j) = \left\lfloor (j - (j_0 - k_1)) \cdot \frac{S}{N} \right\rfloor, \tag{14}$$

wobei $k_1 = \lceil 1 \cdot \frac{N}{S} \rceil$ dasjenige Jahr bezeichnet, in dem die erste kanonische Schaltung stattfindet.

Beispiel. Soll im Metonschen Zyklus die erste Schaltung im Jahr 1000 der Christlichen Zeitrechnung stattfinden, so lautet die neue Schaltfunktion ($k_1 = 3$):

$$j \mapsto \left\lfloor (j - 997) \cdot \frac{7}{19} \right\rfloor .$$

Allgemeiner: Sollen, ausgehend von der Schaltfunktion einer möglichst gleichmässigen Verteilung

$$j \mapsto \left\lfloor (j + \upsilon) \cdot \frac{S}{N} \right\rfloor - d$$

Schaltungen erst ab einem Jahr j_0 stattfinden, so verändert sich die Schaltfunktion wie folgt:

$$j \mapsto \left\lfloor (j + \upsilon - (j_0 - t_1)) \cdot \frac{S}{N} \right\rfloor - d, \tag{15}$$

wobei $t_1 = \lceil (1 + d) \cdot \frac{N}{S} \rceil - \upsilon$, das Jahr der ersten Schaltung der gegebenen Verteilung ist.

Etwas komplizierter ist die Formalisierung der neuen Schaltregeln nach der Gregorianischen Reform (1582).

Beispiel. Innerhalb von 400 Jahren sollen drei Schalttage ausfallen, und zwar in den Säkularjahren 1700, 1800 und 1900 und dann erst wieder im Jahr 2100 (vgl. Teil 1, Abschnitt 2.2 [AH17]). Für diese spezielle Situation betrachten wir zunächst die Schaltfunktion $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ mit

$$\sigma(j) = \left\lfloor \left\lfloor \frac{j}{100} \right\rfloor \cdot \frac{3}{4} \right\rfloor .$$

Zur Abkürzung definieren wir für ein beliebiges Jahr j die **Säkularzahl** $J = \left\lfloor \frac{j}{100} \right\rfloor$. Die Schaltfunktion σ kann somit dargestellt werden als

$$\sigma(j) = \left\lfloor J \cdot \frac{3}{4} \right\rfloor .$$

In der nachstehenden Wertetabelle haben wir die für natürliche Zahlen unübliche Intervallschreibweise verwendet.

j	[1,100[	[100,200[	[200,300[	[300,400[	[400,500[	[500,600[	[600,700[	...
$J = \left\lfloor \frac{j}{100} \right\rfloor$	0	1	**2**	**3**	**4**	5	**6**	...
$\sigma(j)$	0	0	**1**	**2**	**3**	3	**4**	...

Tabelle 5: Wertetabelle der Funktion σ

Die Schaltungen finden in den Jahren j mit $\sigma(j) - \sigma(j-1) = 1$ statt. Dies sind die Säkularjahre 200, 300, 400, 600, 700, 800,... Wir wollen aber, dass die erste Schaltung nicht im Jahr 200, sondern im Jahr 1700 stattfindet. D.h. wir vermindern das Argument um 1500 Jahre und erhalten so die Schaltfunktion $\sigma_G : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ mit

$$\sigma_G(j) = \left\lfloor (J-15) \cdot \frac{3}{4} \right\rfloor , \tag{16}$$

welche nun die Schaltungen zum richtigen Zeitpunkt bringt, nämlich in den Jahren 1700, 1800, 1900, 2100,...

2 Berechnung des Osterdatums

Wir verwenden die folgenden Bezeichnungen und Definitionen (vgl. Teil 1, Kapitel 2 [AH17]):

- j ist die *Jahreszahl in der christlichen Zeitrechnung*.
- Zum Jahr j gehört die *Säkularzahl* $J = \left\lfloor \frac{j}{100} \right\rfloor$ (vgl. Abschnitt 1.3).
- $\gamma(j)$ steht für die *Goldene Zahl*: die Position des Jahres j im zugehörigen kanonischen 19-jährigen Zyklus;
- $\varepsilon(j)$ bedeutet die *Gregorianische Epakte*: das Alter des zyklischen Mondes am 31. Dezember des Vorjahres (vgl. Teil 1, Abschnitte 2.2 und 3.8);
- $\eta(j)$ ist die *Alexandrinische Epakte*: das Mondalter am 22. März des Jahres j.

Falls die Abhängigkeit der Gregorianischen Epakte vom betreffenden Jahr j wesentlich ist, schreiben wir $\varepsilon(j)$, sonst ε. Dasselbe gilt für die Goldene Zahl und die Alexandrinische Epakte.

Bekannt sind die Formeln für die Berechnung der Goldenen Zahl (Teil 1, Formel (6)) und der Alexandrinischen Epakte (Teil 1, Formel (7))

- $\gamma(j) = 1 + j \bmod 19$
- $\eta(j) = ((\gamma(j) - 1) \cdot 11) \bmod 30$

2.1 Die Gregorianische Epakte

Wie wir dem Neulichtkalender (vgl. Teil 1, Kapitel 3 [AH17]) leicht entnehmen können, stimmt das Alter des zyklischen Mondes am 30. März mit der Gregorianischen Epakte ε des betreffenden Jahres überein. Z.B. ist für ein Jahr mit Epakte 5 der zyklische Mond am 30. März 5 Tage alt. Im Gegensatz zur Definition von ε gibt es hier keine Ausnahmen (vgl. Teil 1, Abschnitt 3.8). Da die Alexandrinische Epakte η das Mondalter am 22. März bedeutet, ist der Mond im Julianischen Kalender am 30. März $\eta + 8$ Tage alt. Anlässlich der Gregorianischen Reform ist das Alter des zyklischen Mondes um $7 = 10 - 3$ Tage zurückgesetzt worden: Zehn Tage des Sonnenkalenders wurden ausgelassen und der zyklische Mond wurde um drei Tage korrigiert. Die neuen zyklischen Monddaten stimmen seither mit den astronomischen Daten recht gut überein. Also war der neue zyklische Mond in den Jahren 1583 bis 1699 (vor der ersten Sonnenangleichung) am 30. März des Gregorianischen Kalenders $\eta + 8 - 7 = \eta + 1$ Tage alt, wobei bei den Epakten stets modulo 30 zu rechnen ist. Für die Jahre 1583 bis 1699 gilt somit

$$\varepsilon = (\eta + 1) \bmod 30 = ((\gamma - 1) \cdot 11 + 1) \bmod 30. \tag{17}$$

Im Folgenden werden wir für die Berechnung der Epakte eines beliebigen Jahres j eine Formel herleiten. Da wir uns dabei auf das Jahr 1583 beziehen, müssen wir sämtliche bis und mit dem Jahr j stattgefundenen Sonnen- und Mondkorrekturen berücksichtigen.

1. Nach Teil 1, Abschnitt 2.2 wird in jedem Säkularjahr, dessen Jahreszahl durch 400 nicht ohne Rest teilbar ist, von der Epakte ein Tag subtrahiert (Sonnenangleichung). Für ein beliebiges Jahr mit Säkularzahl J kann diese Angleichung aus $-\left\lfloor (J - 15) \cdot \frac{3}{4} \right\rfloor$ berechnet werden (vgl. Formel (16)). Für das Jahr 2435 gilt z.B. $-\left\lfloor (24 - 15) \cdot \frac{3}{4} \right\rfloor = -6$, denn für die Säkularjahre 1700, 1800, 1900, 2100, 2200 und 2300 muss je ein Tag subtrahiert werden.
2. Ebenfalls nach Teil 1, Abschnitt 2.2 wird in 2500 Jahren den Säkularjahren 8mal (beginnend mit dem Jahr 1800 und mit den Abständen von sieben mal drei und einmal vier Säkularjahren) zur Epakte jeweils ein Tag addiert (Mondangleichung). Für ein Jahr mit Säkularzahl J berechnet sich diese Korrektur aus $+\left\lfloor (J - 14) \cdot \frac{8}{25} \right\rfloor$ (vgl. Formel (16)). Für das Jahr 2435 beträgt sie beispielsweise $+\left\lfloor (24 - 14) \cdot \frac{8}{25} \right\rfloor = 3$, denn für die Jahre 1800, 2100 und 2400 wurde bzw. wird je ein Tag addiert. Insgesamt erhalten wir für die Gregorianische Epakte die folgende Formel:

Satz 2.1

$$\varepsilon(j) = \left((\gamma(j) - 1) \cdot 11 + 1 - \left\lfloor (J - 15) \cdot \frac{3}{4} \right\rfloor + \left\lfloor (J - 14) \cdot \frac{8}{25} \right\rfloor \right) \bmod 30. \qquad \square$$

Diese Formel entspricht dem Inhalt von Kapitel XI der „Explicatio“ [Cla03, S. 105–133], welches vorwiegend aus Tabellen besteht (Tabula Epactarum expansa, S. 110/111 und Tabula Aequationis, S. 112–131). Im 16. Jahrhundert war man noch nicht in der Lage, eine solche Formel aufzustellen.

Figur 3: Tabelle zur Bestimmung der Gregorianischen Epakte aus der „Explicatio“ [Cla03, S. 110/111] unter Berücksichtigung der Sonnen- und Mondangleichungen. Die Zuordnung zwischen den Buchstaben in der ersten Spalte und den Jahrhunderten ist in weiteren Tabellen (Tabula Aequationis [Cla03, S. 112ff]) festgelegt.

Beispiele:

Jahr	Goldene Zahl	Sonnenangleichung	Mondangleichung	Epakte
$j = 1702$:	$\gamma = 12$	$\left\lfloor (J-15)\cdot\frac{3}{4} \right\rfloor = 1$	$\left\lfloor (J-14)\cdot\frac{8}{25} \right\rfloor = 0$	$\varepsilon = (122-1) \bmod 30 = 1$
$j = 1965$:	$\gamma = 9$	$\left\lfloor (J-15)\cdot\frac{3}{4} \right\rfloor = 3$	$\left\lfloor (J-14)\cdot\frac{8}{25} \right\rfloor = 1$	$\varepsilon = (89-3+1) \bmod 30 = 27$
$j = 2016$:	$\gamma = 3$	$\left\lfloor (J-15)\cdot\frac{3}{4} \right\rfloor = 3$	$\left\lfloor (J-14)\cdot\frac{8}{25} \right\rfloor = 1$	$\varepsilon = (23-3+1) \bmod 30 = 21$
$j = 2435$:	$\gamma = 4$	$\left\lfloor (J-15)\cdot\frac{3}{4} \right\rfloor = 6$	$\left\lfloor (J-14)\cdot\frac{8}{25} \right\rfloor = 3$	$\varepsilon = (34-6+3) \bmod 30 = 1$
$j = 3097$:	$\gamma = 1$	$\left\lfloor (J-15)\cdot\frac{3}{4} \right\rfloor = 11$	$\left\lfloor (J-14)\cdot\frac{8}{25} \right\rfloor = 5$	$\varepsilon = (1-11+5) \bmod 30 = 25$

Tabelle 6: Beispiele Gregorianischer Epakten

2.2 Die Ostergrenze

Wie weiter oben gezeigt, kann die Gregorianische Epakte ε als das Alter des zyklischen Mondes am *30. März* interpretiert werden. In einem Jahr mit Epakte ε tritt somit ε Tage vor dem *31. März* ein zyklisches Neulicht und 13 Tage später ein zyklischer Vollmond ein.

1. Wenn die Epakte kleiner als 24 ist, so fällt die Ostergrenze auf den Tag $31-\varepsilon+13 = 44-\varepsilon$ als Märzdatum. Die Ostergrenze fällt z.B. für Epakte $\varepsilon = 19$ auf den 25. März $(44-19 = 25)$ und für Epakte $\varepsilon = 5$ auf den 8. April $(44-5 = 39\,;\;\; 39-31 = 8)$.

2. Für Epakte $\geqslant$ 24 ist $44 - \varepsilon$ ein Datum vor dem 21. März, und es braucht einen zusätzlichen zyklischen Mondmonat, um zur Ostergrenze zu gelangen. Für die Bestimmung der Ostergrenze ist entscheidend, ob dieser zusätzliche Mondmonat *voll* (30 Tage) oder *hohl* (29 Tage) ist. In den Abschnitten 3.2 und 3.4 von Teil 1 haben wir festgestellt, dass der anschliessende Ostermonat nur für die Epakten 24 und xxv voll ist. Dies bedeutet umgekehrt, dass der dem Ostermonat vorangehende zusätzliche Mondmonat für diese Epakten hohl und für alle anderen voll ist.

Für jedes Jahr j unserer Zeitrechnung lässt sich die Ostergrenze $OG(j)$, als Märzdatum, mit Hilfe der Goldenen Zahl $\gamma(j)$ und der Epakte $\varepsilon(j)$ wie folgt berechnen:

Satz 2.2

$$OG(j) = 44 - \varepsilon(j) + \left\lfloor \frac{\varepsilon(j)}{24} \right\rfloor \cdot 29 + \left\lfloor \frac{\varepsilon(j)}{25} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{\gamma(j)}{12} \right\rfloor \left(\left\lfloor \frac{\varepsilon(j)}{25} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{\varepsilon(j)}{26} \right\rfloor \right).$$

Beweis.

- Für Epaktenwerte ε mit $\varepsilon < 24$ reduziert sich die Formel zu $OG = 44 - \varepsilon$. Alle weiteren Terme werden in diesem Fall zu Null.
- Für $\varepsilon \geqslant 24$ kommt ein zusätzlicher Mondmonat hinzu. Der Summand $\left\lfloor \frac{\varepsilon(j)}{24} \right\rfloor \cdot 29$ bedeutet, dass für $\varepsilon \geqslant 24$ mindestens 29 Tage addiert werden.
  - Für $\varepsilon = 24$ ist der zusätzliche Mondmonat hohl. Deshalb wird in der Formel von Satz 2.2 nichts mehr addiert, denn wegen $\left\lfloor \frac{\varepsilon(j)}{25} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{\varepsilon(j)}{26} \right\rfloor = 0$ verschwinden die letzten beiden Summanden.
  - Für $\varepsilon = 25$ und $\gamma \geqslant 12$ sind wir im Fall $\varepsilon =$ xxv. Auch in diesem Fall ist der zusätzliche Monat hohl und auch hier wird in der Formel nichts hinzugefügt, denn die letzten beiden Summanden heben sich gegenseitig auf: $\left\lfloor \frac{25}{25} \right\rfloor = 1$ und $\left\lfloor \frac{\gamma(j)}{12} \right\rfloor \left(\left\lfloor \frac{\varepsilon(j)}{25} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{\varepsilon(j)}{26} \right\rfloor \right) = 1$.
  - Für $\varepsilon = 25$ und $\gamma < 12$ ist der zusätzliche Mondmonat voll. Da $\left\lfloor \frac{25}{25} \right\rfloor = 1$ und $\left\lfloor \frac{\gamma}{12} \right\rfloor = 0$, ergeben die letzten beiden Summanden den Wert 1: Es wird ein Tag hinzugefügt.
  - Für Werte ε mit $\varepsilon \geqslant 26$ ist der zusätzliche Mondmonat ebenfalls voll. Für solche ε gilt $\left\lfloor \frac{\varepsilon(j)}{25} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{\varepsilon(j)}{26} \right\rfloor = 1$, und die Summe der letzten beiden Summanden ist wieder gleich 1. $\square$

Bemerkung. Dank einer Idee von Lichtenberg [Lic97] kann im Satz 2.2 auf die üblichen Ausnahmeregeln verzichtet werden.

Die Formel von Satz 2.2 lässt sich noch etwas vereinfachen. Wir verwenden das folgende Hilfsresultat:

Lemma 2.3

$$\left\lfloor \frac{\varepsilon(j)}{25} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{\gamma(j)}{12} \right\rfloor \left(\left\lfloor \frac{\varepsilon(j)}{25} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{\varepsilon(j)}{26} \right\rfloor \right) = \left\lfloor \frac{\varepsilon(j) - \left\lfloor \frac{\gamma(j)}{12} \right\rfloor}{25} \right\rfloor.$$

Beweis.

- Für Epaktenwerte $\varepsilon \leqslant 24$ verschwinden beide Seiten der Gleichung.
- Für $\varepsilon = 25$ gibt es wieder zwei Fälle zu unterscheiden:
  - Ist $\gamma < 12$, so gilt $\left\lfloor \frac{\gamma}{12} \right\rfloor = 0$, also sind beide Seiten gleich $\left\lfloor \frac{\varepsilon(j)}{25} \right\rfloor = 1$.
  - Ist jedoch $\gamma \geqslant 12$, so ist $\left\lfloor \frac{\gamma}{12} \right\rfloor = 1$ und beide Seiten sind gleich Null – wir sind im Fall der Epakte xxv.
- Im Fall von $\varepsilon \geqslant 26$ ist die linke Seite gleich 1. Aber auch $\left\lfloor \frac{\varepsilon - \lfloor \frac{\gamma}{12} \rfloor}{25} \right\rfloor = 1$, denn für solche ε gilt stets $\varepsilon - \left\lfloor \frac{\gamma}{12} \right\rfloor \geqslant 25$. □

Die Formel für die Ostergrenze des Jahres j lässt sich somit wie folgt darstellen:

Korollar 2.4

$$OG(j) = 44 - \varepsilon(j) + \left\lfloor \frac{\varepsilon(j)}{24} \right\rfloor \cdot 29 + \left\lfloor \frac{\varepsilon(j) - \left\lfloor \frac{\gamma(j)}{12} \right\rfloor}{25} \right\rfloor . \qquad \square$$

Beispiele:

- $j = 1702$: Nach Tabelle 6 ist $\varepsilon = 1$. Die Formel von Satz 2 (bzw. von Korollar 4) ergibt dann $OG = 44 - 1 = 43$. Die Ostergrenze war somit am 12. April.
- $j = 1965$: Gemäss Tabelle 6 gilt $\varepsilon = 27$. Nach der Formel von Satz 2 (Korollar 4) ist dann $OG = 44 - 27 + 30 = 47$. Die Ostergrenze war somit am 16. April.
- $j = 2016$: Tabelle 6 liefert $\varepsilon = 21$. Die Formel ergibt dann $OG = 44 - 21 = 23$. Die Ostergrenze war am 23. März.
- $j = 2435$: Es gilt $\varepsilon = 1$ (vgl. Tabelle 6), also dieselbe Epakte wie im Jahre 1702. Dann stimmen auch die Ostergrenzen überein: $OG = 44 - 1 = 43$, der 12. April.
- $j = 3097$: Gemäss Tabelle 6 ist $\varepsilon = 25$. Wegen $\gamma = 1$ sind wir nicht im Fall xxv. Es folgt $OG = 44 - 25 + 30 = 49$. Die Ostergrenze wird am 18. April eintreten.

2.3 Das Osterdatum

Wir nummerieren die Wochentage wie folgt:

0	1	2	3	4	5	6
Sonntag	Montag	Dienstag	Mittwoch	Donnerstag	Freitag	Samstag

Tabelle 7: Nummerierung der Wochentage

Wir beziehen uns im Folgenden nicht auf das Jahr 1583 sondern auf das darauffolgende Säkularjahr. Die Formel, die wir herleiten, kann dadurch etwas übersichtlicher gestaltet werden, und ist dennoch auch für die Jahre von 1583 bis 1599 gültig.

Mit der Information, dass der 29. Februar 1600 ein Dienstag war (Wochentagsnummer 2) bestimmen wir für ein beliebiges Jahr j (mit $j \geqslant 1600$) die **Wochentagsnummer** $w_0(j)$ **des 0. März** (des letzten Tages im Februar):

$$\begin{aligned} w_0(j) &= \left(2 + (j-1600) + \left\lfloor (j-1600)\cdot\frac{1}{4}\right\rfloor - \left\lfloor (J-15)\cdot\frac{3}{4}\right\rfloor\right) \bmod 7 \\ &= \left(2 + \left\lfloor (j-1600)\cdot\frac{5}{4}\right\rfloor - \left\lfloor (J-15)\cdot\frac{3}{4}\right\rfloor\right) \bmod 7. \end{aligned} \tag{18}$$

Dabei haben die Summanden die folgende Bedeutung:

1. Da $365 \bmod 7 = 1$, nimmt die Tagesnummer (modulo 7) pro Jahr um 1 zu. Dies wird durch den Term $j - 1600$ ausgedrückt.
2. Im Fall eines Schaltjahrs nimmt die Tagesnummer (modulo 7) um 2 zu. Die Anzahl der Schalttage wird durch den Term $\left\lfloor (j-1600)\cdot\frac{1}{4}\right\rfloor$ beschrieben.
3. Wie in der Formel (16) für die Gregorianische Epakte bedeutet $\left\lfloor (J-15)\cdot\frac{3}{4}\right\rfloor$ die Anzahl der in Säkularjahren ausfallenden Schalttage. Diese muss von der Tagesnummer subtrahiert werden (modulo 7).
4. Für die zweite Darstellung (Formel (18)) haben wir verwendet, dass

$$\begin{aligned} (j-1600) + \left\lfloor (j-1600)\cdot\tfrac{1}{4}\right\rfloor &= \left\lfloor (j-1600) + (j-1600)\cdot\tfrac{1}{4}\right\rfloor \\ &= \left\lfloor (j-1600)\cdot\tfrac{5}{4}\right\rfloor. \end{aligned}$$

Beispiele:

- $j = 1702$: $w_0(j) = \left(2 + \left\lfloor 102\cdot\frac{5}{4}\right\rfloor - \left\lfloor 2\cdot\frac{3}{4}\right\rfloor\right) \bmod 7 = 128 \bmod 7 = 2$. Also war der 28. Februar 1702 ein Dienstag.
- $j = 1965$: $w_0(j) = \left(2 + \left\lfloor 365\cdot\frac{5}{4}\right\rfloor - \left\lfloor 4\cdot\frac{3}{4}\right\rfloor\right) \bmod 7 = 455 \bmod 7 = 0$. Somit war der 28. Februar 1965 ein Sonntag.
- $j = 2016$: $w_0(j) = \left(2 + \left\lfloor 416\cdot\frac{5}{4}\right\rfloor - \left\lfloor 5\cdot\frac{3}{4}\right\rfloor\right) \bmod 7 = 519 \bmod 7 = 1$. Der 29. Februar 2016 war ein Montag.
- $j = 2435$: $w_0(j) = \left(2 + \left\lfloor 835\cdot\frac{5}{4}\right\rfloor - \left\lfloor 9\cdot\frac{3}{4}\right\rfloor\right) \bmod 7 = 1039 \bmod 7 = 3$. Der 28. Februar 2435 wird ein Montag sein.
- $j = 3097$: $w_0(j) = \left(2 + \left\lfloor 1497\cdot\frac{5}{4}\right\rfloor - \left\lfloor 15\cdot\frac{3}{4}\right\rfloor\right) \bmod 7 = 1862 \bmod 7 = 0$. Der 28. Februar 3097 wird ein Sonntag sein.

Die **Wochentagsnummer** $w_1(j)$ **der Ostergrenze** im Jahr j ist die Summe der Ostergrenze $OG(j)$ als Märzdatum und der Wochentagsnummer $w_0(j)$ des 0. März, modulo 7 gerechnet:

$$w_1(j) = (OG(j) + w_0(j)) \bmod 7. \tag{19}$$

Nach unserer Nummerierung der Wochentage ist Ostern $7 - w_1(j)$ Tage nach der Ostergrenze. Somit können wir das **Osterdatum** $OD(j)$ des Jahres j als Märzdatum wie folgt berechnen:

Satz 2.5

$$OD(j) = OG(j) + 7 - w_1(j). \qquad \square$$

Beispiele:

Jahr	Ostergrenze Wochentag	Ostergrenze Datum	Ostern Märzdatum	Osterdatum
1702	$w_1 = (43+2) \bmod 7 = 3$	Mi, 12. April	$OD = 43+7-3 = 47$	16. April
1965	$w_1 = (47+0) \bmod 7 = 5$	Fr, 16. April	$OD = 47+7-5 = 49$	18. April
2016	$w_1 = (23+1) \bmod 7 = 3$	Mi, 23. März	$OD = 23+7-3 = 27$	27. März
2435	$w_1 = (43+3) \bmod 7 = 4$	Do, 12. April	$OD = 43+7-4 = 46$	15. April
3097	$w_1 = (49+0) \bmod 7 = 0$	So, 18. April	$OD = 49+7-0 = 56$	25. April

Tabelle 8: Beispiele von Osterdaten

2.4 Zusammenfassung

Mit j bezeichnen wir die Jahreszahl und mit J die zugehörige Säkularzahl in unserer Zeitrechnung. Ferner bedeutet γ die Goldene Zahl.

Das Osterdatum des Jahres j kann wie folgt in 5 Schritten berechnet werden:

$\varepsilon(j) = \left((\gamma(j)-1)\cdot 11 + 1 - \left\lfloor (J-15)\cdot \frac{3}{4} \right\rfloor + \left\lfloor (J-14)\cdot \frac{8}{25} \right\rfloor\right) \bmod 30$	**Gregorianische Epakte**
$OG(j) = 44 - \varepsilon(j) + \left\lfloor \frac{\varepsilon(j)}{24} \right\rfloor \cdot 29 + \left\lfloor \frac{\varepsilon(j)}{25} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{\gamma(j)}{12} \right\rfloor \left(\left\lfloor \frac{\varepsilon(j)}{25} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{\varepsilon(j)}{26} \right\rfloor \right)$	**Ostergrenze** (als Märzdatum)
$w_0(j) = \left(2 + \left\lfloor (j-1600)\cdot \frac{5}{4} \right\rfloor - \left\lfloor (J-15)\cdot \frac{3}{4} \right\rfloor\right) \bmod 7$	**Wochentags-nummer des 0. März** (28./29. Februar)
$w_1(j) = (OG(j) + w_0(j)) \bmod 7$	**Wochentags-nummer der Ostergrenze**
$OD(j) = OG(j) + 7 - w_1(j)$	**Osterdatum** (als Märzdatum)

Dank

Diese Publikation ist im Zusammenhang mit einem Buchprojekt zum Thema *Kalendermathematik* entstanden. Wir danken Norbert Hungerbühler für seine ideelle und finanzielle Unterstützung sowohl des Buchprojekts als auch dieser Arbeit. Das Buchprojekt steht unter dem Patronat der Deutschschweizerischen Mathematik-Kommission (DMK). Projektleiterin ist Daniela Grawehr, die Präsidentin der DMK; das Buch wird beim Carl Hanser-Verlag erscheinen. Wir danken Daniela und dem Carl Hanser-Verlag für die Bereitschaft, diese separate Publikation zu unterstützen.

Literatur

[AH17] ALBERTINI, CLAUDIA und HUBER, MARTIN : *Die Gregorianische Kalenderreform, Teil* 1. Elemente der Mathematik, 72 (2017), Nr. 2, 45–61.

[Cla03] CLAVIUS, CHRISTOPHORUS: *Romani Calendarii a Gregorio XIII. P. M. restituti explicatio*. Rom, 1603.

[Gau00] GAUSS, CARL FRIEDRICH: *Berechnung des Osterfestes*. Monatliche Korrespondenz zur Beförderung der Erd- und Himmels-Kunde, 121–130, August 1800.

[Gau16] GAUSS, CARL FRIEDRICH: *Berichtigung zu dem Aufsatze: Berechnung des Osterfestes*. Z. Astron. verwandte Wiss., 1:158, Jan./Feb. 1816.

[Lic97] LICHTENBERG, HEINER: *Zur Interpretation der Gaußschen Osterformel und ihrer Ausnahmeregeln*. Historia Mathematica, 24:441–444, 1997.

Claudia Albertini
Pädagogische Hochschule Zürich
Lagerstrasse 2
CH-8090 Zürich
claudia.albertini@phzh.ch

Martin Huber
Kienastenwiesweg 32
CH-8053 Zürich
hu_ma@bluewin.ch