

# Graphische Bestimmung der Wirkung gegenüber dreidimensionaler Massen auf die Schwereintensität

Autor(en): **Gassmann, Fritz / Prosen, Dragutin**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Eclogae Geologicae Helvetiae**

Band (Jahr): **39 (1946)**

Heft 2

PDF erstellt am: **13.09.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-160785>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

# Graphische Bestimmung der Wirkung gegebener dreidimensionaler Massen auf die Schwereintensität.

Von Fritz Gassmann (Zürich) und Dragutin Prosen (Belgrad).

Mit 8 Textfiguren und 3 Tafeln (XV, XVI, XVII).

## 1. Summary.

A graphico-numerical method is given for determining the effect of given three-dimensional masses of any shape on the gravitational intensity. The surface of the given mass, which is presumed to be homogeneous with an excess of density of  $\rho$  in relation to its surroundings, is represented on the reduced scale of 1:V by contour-lines at the altitudes  $H_1, H_2, \dots, H_K$  above sea-level (Fig. 6). The body is now replaced by cylinders, the guiding lines of which are these contour-lines (Fig. 7). The altitudes  $Z_1, Z_2, \dots, Z_{K-1}$  above sea-level of the areas of these cylinders are determined in accordance with the equations (7).  $Z_0$  is the level of the highest,  $Z_K$  that of the lowest point of the surface of the body. Let  $b$  be the difference between the radii of two adjacent circles in Fig. 2, and  $p_i$  the difference between the level  $Z_s$  of the station  $S$ , for which the gravity anomaly is to be determined, and the level  $Z_i$ , measured in Fig. 7, (scale 1:V) with the distance  $b$  as a unit distance. The horizontal projection of the substitute body, seen from above and below (Fig. 8) is plotted on the counting diagram (Fig. 2), (Fig. 9). Let  $a_{in}$  be the number of the "compartments" in the  $n^{\text{th}}$  ring of the counting diagram included in the area  $F_i$  and  $b_{in}$  the number of the "compartments" of the  $n^{\text{th}}$  ring included in the area  $G_i$ . The number  $t_n(p_i)$  is obtained from Fig. 3 and Fig. 4. The gravity anomaly  $s$  which the substitute body in Fig. 7 provokes at the point  $S$  should then be determined by summation in accordance with equation (9). In 7. the gravity anomaly of the body which is represented in Figs. 6—9 is calculated on the assumption that these figures are drawn at the reduced scale of 1:V = 1:50'000 and that the difference of density between the body and its surroundings amounts to  $\rho = 0.4 \text{ gr/cm}^3$ .

## 2. Vorbemerkung.

Wer sich über die graphische Bestimmung der Wirkung von Massen auf die Schwereintensität ohne nähere Begründung orientieren will, findet in 7. eine anhand eines Zahlenbeispiels gegebene zusammenfassende Darstellung des Verfahrens.

## 3. Einleitung.

Die Bestimmung einer unterirdischen Masse, die eine gegebene, an der Erdoberfläche vermessene Schwerestörung verursacht, ist eine in der angewandten Geophysik häufig vorkommende Aufgabe. Sie ist aber bekanntlich nicht eindeutig lösbar. Rührt z. B. eine Schwerestörung von einer homogenen Kugel her,



Da die Schwere in  $S$  nach unten zeigt, ist die Schwerestörung  $s$  offenbar positiv oder negativ zu rechnen, je nachdem sie nach unten oder nach oben zeigt. Um in der Formel (2) für  $s$  das Vorzeichen zu berücksichtigen, ist es praktisch, auch  $H$  mit einem Vorzeichen zu versehen.  $H$  soll positiv oder negativ gerechnet werden, je nachdem der Zylinder von der durch  $S$  gehenden Horizontalebene aus nach unten (wie in Fig. 1) oder nach oben geht. Es soll ferner die Funktion  $\text{sgn } r$  eingeführt werden, wo  $r$  irgendeine reelle Zahl ist:

$$\begin{aligned} \text{sgn } r &= 1 \text{ für } r > 0, \\ \text{,, } r &= 0 \text{ ,, } r = 0, \\ \text{,, } r &= -1 \text{ für } r < 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Die vom Zylinder von Fig. 1 herrührende Schwerestörung in  $S$  ist dann<sup>1)</sup>

$$s = \text{sgn } H \cdot k_0 \varrho \cdot \text{arc} \cdot \alpha (R_2 - R_1 + \sqrt{R_1^2 + H^2} - \sqrt{R_2^2 + H^2}). \quad (2)$$

Die Formel (2) ist für die unmittelbare Berechnung von Schwerestörungen unhandlich, sie bildet lediglich die Grundlage für die folgenden Ausführungen. Der Grundfläche  $A_1 A_2 B_2 B_1$  des Hohlzylindersektors soll nun eine spezielle Form gegeben werden. Sie soll nämlich, wenn man sie im verkleinerten Masstabe  $1 : V$  aufzeichnet, mit irgendeinem Feld des Auszähl-diagramms, Tafel XV, übereinstimmen. Der gemeinsame Mittelpunkt aller Kreise dieses Auszähl-diagramms entspricht dann offenbar der Station  $S$ . Die Kreise teilen das ganze Auszähl-diagramm in Kreisringe, die von innen nach aussen fortlaufend numeriert sind. Alle Kreisringe haben die gleiche Breite  $b$  (= Differenz der Radien benachbarter Kreise). Jeder Kreisring ist durch Radien in Sektoren geteilt, und zwar sei die Anzahl der Sektoren des  $n$ . Kreisringes mit  $e_n$  bezeichnet. Auf Tafel XVI sind die Werte von  $e_n$  für die verschiedenen Kreisringe angegeben. Ist nun das verkleinerte Abbild der Grundfläche  $A_1 A_2 B_2 B_1$  ein Feld des  $n$ . Kreisringes und ferner  $p$  das Verhältnis der Höhe des Zylinders von Fig. 1 zu seiner Breite  $A_1 A_2$ , so sind in Formel (2) offenbar folgende Grössen einzusetzen:

$$H = p \cdot \overline{A_1 A_2} = p \cdot b V,$$

$\text{sgn } H = \text{sgn } p$ , weil  $b$  und  $V$  positive Grössen sind.

$$\text{arc } \alpha = \frac{2\pi}{e_n}, \quad R_2 = V n b, \quad R_1 = V(n-1) b.$$

Man erhält dann

$$s = \text{sgn } p \cdot \frac{b}{0,5} \cdot \frac{V}{10^8} \cdot \varrho \cdot t_n(p), \quad (3)$$

wo  $p = \frac{H}{bV}$  ist und  $t_n(p)$  die in Tafel XVI angegebene Bedeutung hat. Wird das Auszähl-diagramm, Tafel XV, in seiner Originalgrösse verwendet, so ist  $b = 0,5$  cm, also  $\frac{b}{0,5} = 1$ . Die Berechnung der Schwerestörung nach Formel (3) ist daher denkbar einfach, da der Wert von  $t_n(p)$  aus Tafel XVI resp. XVII entnommen werden kann. Bei der Berechnung von  $p$  ist nicht zu vergessen, dass  $H$  in *cm* einzusetzen ist. Wie die Formel für  $t_n(p)$  zeigt, kommt es bei dieser Grösse nicht auf das Vorzeichen von  $p$  an, d. h.  $t_n(-p) = t_n(+p)$ .

<sup>1)</sup> Siehe z. B. F. R. HELMERT, Die math. und phys. Theorien der höheren Geodäsie, II. Band, 1884, Seite 170.

### 5. Der vertikale Zylinder.

Als störender Körper sei nunmehr ein homogener Zylinder mit vertikalen Mantellinien genommen. Die Grundfläche  $F$  sei horizontal und habe eine beliebige Form, die Deckfläche sei auch horizontal und demnach kongruent zur Grundfläche.  $Z_0$  sei die Meereshöhe der Deckfläche,  $Z_1$  die Meereshöhe der Grundfläche. Die Meereshöhen sind in cm auszudrücken und positiv oder negativ zu nehmen, je nachdem die betreffende Fläche über oder unter dem Meeresspiegel liegt. Da die Deckfläche über der Grundfläche liegt, ist stets  $Z_0 > Z_1$ . Die Dichtedifferenz des Zylinders gegen die Umgebung sei  $\rho$  mit der gleichen Vorzeichenfestsetzung wie in 4. Die Station  $S$ , für die die Schwerestörung zu berechnen ist, liege in der Meereshöhe  $Z_S$ . Es soll zunächst  $Z_S > Z_0$  angenommen werden, doch kann

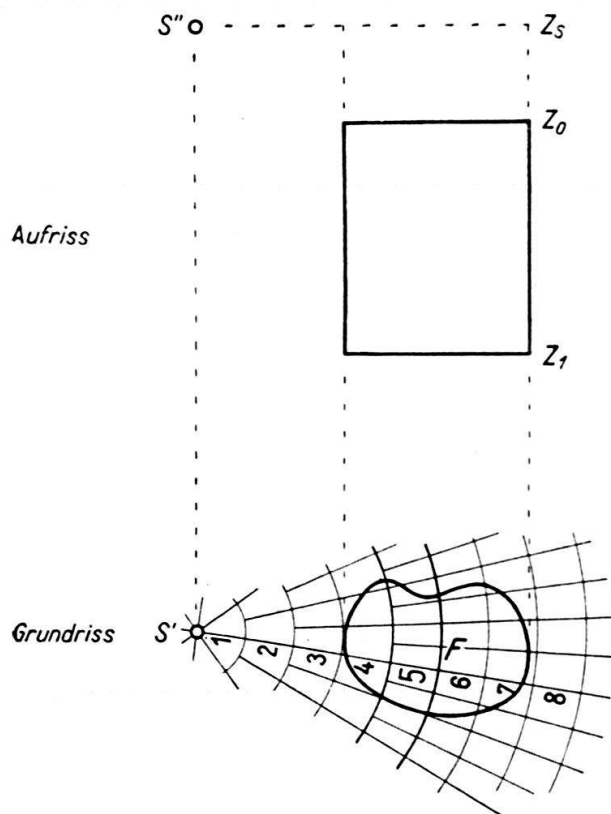


Fig. 2. Beliebiger Vertikalzylinder.

diese Einschränkung später wieder fallen gelassen werden. Um die Schwerestörung des Zylinders zu ermitteln, wird er aufgefasst als Differenz zweier Zylinder, nämlich eines Zylinders mit Grundfläche  $F$  auf der Höhe  $Z_1$  und Deckfläche auf der Höhe  $Z_S$  und eines Zylinders mit der gleichen Grundfläche auf der Höhe  $Z_0$  und Deckfläche auf der Höhe  $Z_S$  (siehe Fig. 2, Aufriß). Diese beiden ineinandergeschachtelten Zylinder können mit Hilfe des Auszähl-diagramms, Tafel XV, weiter unterteilt werden. Der Grundriß des Zylinders, d. h. die Grundfläche  $F$ , sowie der Grundriß  $S'$  der Station werden im Masstab 1: V verkleinert auf Pauspapier aufgezeichnet (siehe Fig. 2, Grundriß) und so auf das Auszähl-diagramm gelegt, dass der Punkt  $S'$  in das Zentrum des Diagramms fällt. Das Diagrammnetz zerlegt dann die Grundfläche  $F$  in einzelne Felder. Jedes Feld kann aufgefasst werden als Grundfläche zweier Zylinder, von denen der eine vom Niveau  $Z_S$  zum Niveau  $Z_1$ , der andere vom Niveau  $Z_S$  zum Niveau  $Z_0$  reicht. Diese beiden Zylinder haben gerade die Form, die in 4. behandelt wurde und für welche die Gleichung (3) die Schwerestörung in  $S$  ergibt. Man hat jetzt nur die Schwerestörungen aller Zylinder, die zum Niveau  $Z_1$  reichen, zu addieren und davon die Schwerestörungen der Zylinder, die zum Niveau  $Z_0$  reichen, zu subtrahieren. Man hat zu diesem Zwecke einfach die Anzahl der Felder jedes Ringes des Auszähl-diagrammes zu ermitteln, die in  $F$  liegen. Für den  $n$ . Ring sei diese Anzahl  $a_n$ . Bei angebrochenen Feldern werden die Zehntel geschätzt. In Fig. 2 geben die Ringe  $n = 4, 5, 6$  und  $7$  Beiträge, und zwar ist  $a_4 = 2,5$ ;  $a_5 = 5,6$ ;  $a_6 = 5,0$ ;  $a_7 = 2,7$ . Wendet man Gleichung (3) auf die beiden Zylinder an, die zu einem bestimmten Feld des  $n$ . Ringes gehören, so hat man für den Zylinder zwischen den Niveaux  $Z_S$  und  $Z_1$  zu setzen:

$$p = p_1 = \frac{Z_S - Z_1}{bV}, \quad \text{sgn } p = 1.$$

für den Zylinder zwischen den Niveaux  $Z_S$  und  $Z_0$ :

$$p = p_0 = \frac{Z_S - Z_0}{b \cdot V}, \text{sgn } p = 1.$$

$p_0$  und  $p_1$  haben eine einfache geometrische Bedeutung.  $p_0$  ist nämlich nichts anderes als die Niveaudifferenz zwischen der Station  $S$  und der oberen Fläche des Zylinders, gemessen in dem im Masstab  $1:V$  gezeichneten Aufriss von Fig. 2, wobei man als Masstab einen Radius von Tafel XV verwendet, d. h. einen Masstab, dessen Einheits-Strecke die Länge  $b$  hat.  $p_1$  ist die in gleicher Weise gemessene Niveaudifferenz zwischen der Station  $S$  und der untern Fläche des Zylinders.

Die nach (3) berechneten Einflüsse der beiden Zylinder sind zu subtrahieren, also

$$\frac{b}{0,5} \cdot \frac{V}{10^8} \cdot \varrho [t_n(p_1) - t_n(p_0)]. \tag{4}$$

Auf der Grundfläche  $F$  liegen  $a_n$  Felder des  $n$ . Ringes. Ihre Schwerestörung ist daher das  $a_n$ -fache des Ausdruckes (4). Die gesamte Schwerestörung  $s$  ist schliesslich die Summe der Einflüsse, die von den Zylindern der verschiedenen Ringe herrühren, also ist

$$s = \frac{b}{0,5} \cdot \frac{V}{10^8} \cdot \varrho \sum_n a_n [t_n(p_1) - t_n(p_0)] \tag{5}$$

die Schwerestörung, die herrührt vom ursprünglich gegebenen vertikalen Zylinder mit der Grundfläche  $F$  im Niveau  $Z_1$  und der Deckfläche im Niveau  $Z_0$ . Die Summe  $\sum_n$  ist zu erstrecken über alle Nummern  $n$  von Ringen des Auszählprogrammes, die zur Fläche  $F$  einen Beitrag liefern. Man kann sich nachträglich leicht überzeugen, dass die Formel (5) die Schwerestörung in jedem Falle mit dem richtigen Vorzeichen wiedergibt, wenn man für die Lage der Station  $S$  die am Anfang erwähnte Beschränkung fallen lässt, also  $Z_S$  ein beliebiges Niveau ist.

**6. Körper beliebiger Form.**

Der Körper sei in Fig. 3 im verkleinerten Masstabe  $1:V$  in Grund- und Aufriss aufgezeichnet. Seine Körperoberfläche kann mit jeder gewünschten Genauigkeit dargestellt werden durch Höhenlinien, die im Aufriss als horizontale Strecken und im Grundriss in wahrer Gestalt erscheinen. Die von oben unsichtbaren Teile der Höhenlinien sind im Grundriss gestrichelt eingezeichnet. Es ist nicht nötig, und auch praktisch nicht immer vorteilhaft, sich auf äquidistante Höhenlinien festzulegen. Man erspart sich überflüssige Arbeit, wenn man den

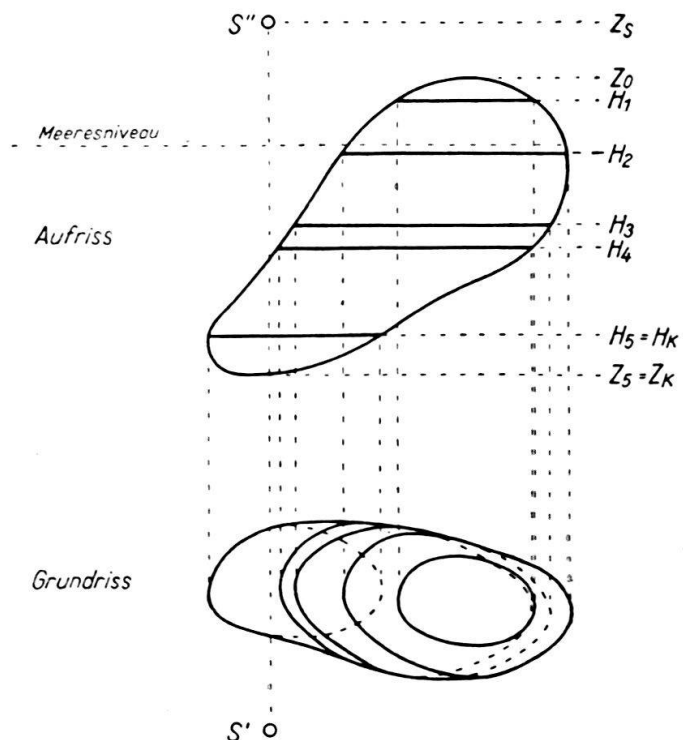


Fig. 3. Dreidimensionale Masse mit Höhenlinien.

Abstand benachbarter Höhenlinien nach der zu erstrebenden Genauigkeit und nach der Form der Körperoberfläche richtet. Die Lage der Höhenlinien lässt sich durch die zugehörigen Meereshöhen festlegen. Diese Meereshöhen seien, in der Reihenfolge von oben nach unten numeriert,  $H_1, H_2, \dots, H_K$ .  $Z_0$  sei die Meereshöhe des obersten,  $Z_K$  die des untersten Punktes des Körpers.

Die Berechnung der Schwerestörung, verursacht durch den gegebenen Körper im Stationspunkt  $S$  (Meereshöhe  $Z_S$ ), wird nur angenähert durchgeführt. Die Annäherung besteht darin, dass der Berechnung nicht der gegebene Körper, sondern ein Ersatzkörper zugrunde gelegt wird. Dieser Ersatzkörper wird folgendermassen konstruiert. Zwischen die Horizontalebene in den Niveaux  $H_1$  bis  $H_K$  werden  $K-1$  weitere Horizontalebene in den Niveaux  $Z_1, Z_2, \dots, Z_{K-1}$

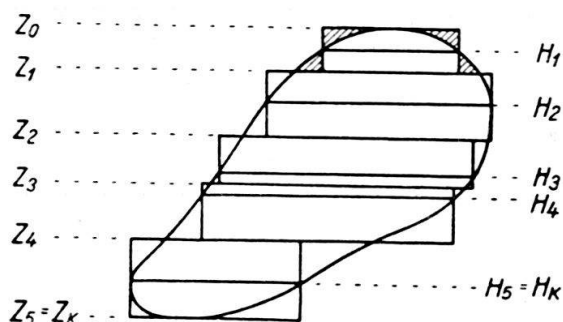


Fig. 4. Dreidimensionale Masse und Ersatzkörper.

eingeschaltet (siehe Fig. 4). Zwischen den verschiedenen Niveaux bestehen offenbar folgende Ungleichungen:

$$Z_0 > H_1 > Z_1 > H_2 > Z_2 > \dots > Z_{K-1} > H_K > Z_K.$$

Die Schicht des Körpers zwischen den Horizontalebene mit den Niveaux  $Z_{i-1}$  und  $Z_i$  wird ersetzt durch einen Zylinder, dessen Mantel gebildet wird aus den Vertikalen, die in sämtlichen Punkten der Höhenlinie  $H_i$  errichtet werden. Die Grundfläche des Zylinders liegt im Niveau  $Z_i$ , die Deckfläche im Niveau  $Z_{i-1}$ . In den Grundrissen der Figuren 3 und 4 fallen Grund- und Deckfläche des  $i$ . Zylinders zusammen und die Fläche erscheint in wahrer Gestalt, da sie einfach die von der ursprünglich gegebenen Höhenlinie im Niveau  $H_i$  begrenzte Fläche ist. Der Ersatzkörper besteht aus  $K$  Zylindern. Man hat es offenbar durch geeignete Wahl der Anzahl  $K$  der Zylinder in der Hand, den gegebenen Körper beliebig genau durch einen Ersatzkörper der beschriebenen Gestalt zu approximieren.

Der Fehler, den man dadurch begeht, dass man der Berechnung der Schwerestörung in einem Stationspunkt  $S$  nicht den ursprünglich gegebenen Körper, sondern den Ersatzkörper zugrunde legt, hängt nicht nur von der Wahl der Höhenlinien ab, sondern auch noch von der Lage von  $S$ . Der Fehler kann besonders gross werden, wenn  $S$  in der Nähe der Oberfläche des Körpers liegt. Praktisch wichtig ist der Fall von Stationen, die in der Nähe des obersten Punktes des Körpers liegen. Es ist in Rücksicht auf diesen Fall vorteilhaft, wenn das Niveau  $Z_1$  so gewählt wird, dass die Höhenlinie  $H_1$  in der Mitte zwischen Grundfläche und Deckfläche des obersten Zylinders des Ersatzkörpers liegt. Wie durch die schraffierten Flächen in Fig. 4 angedeutet ist und wie eine eingehendere Analyse der praktisch wichtigen Fälle ergeben hat, kompensieren sich in diesem Falle der positive und der negative Fehler beim Übergang vom ursprünglich gegebenen

Körper zum Ersatzkörper am besten. Damit dem Niveau  $Z_1$  die gewünschte Lage gegeben werden kann, müssen die Höhenlinien des Körpers so gegeben sein, dass  $H_1$  näher an  $Z_0$  als an  $H_2$  liegt, also die Bedingung

$$Z_0 - H_1 < H_1 - H_2 \tag{6}$$

erfüllt ist. Die übrigen Niveaux  $Z_2, Z_3, \dots, Z_{K-1}$  werden am einfachsten in die Mitte zwischen die Niveaux der benachbarten Höhenlinien gelegt. Aus den Niveaux der Höhenlinien sind daher die Niveaux  $Z_i$  nach folgenden Formeln zu berechnen:

$$Z_1 = 2 H_1 - Z_0$$

$$Z_i = \frac{1}{2} (H_{i+1} + H_i) \quad i = 2, 3, \dots, K - 1. \tag{7}$$

Es sei nun das Niveau  $Z_i$  betrachtet. In diesem Niveau berühren sich zwei Zylinder des Ersatzkörpers, wobei sich die Grundfläche des obern Zylinders und die Deckfläche des untern im allgemeinen teilweise überdecken. Das nicht überdeckte Stück der Grundfläche des obern Zylinders sei mit  $F_i$ , das nicht überdeckte Stück der Deckfläche des untern mit  $G_i$  bezeichnet. Setzt man nun zunächst voraus, dass die Station  $S$  mindestens so hoch liegt wie der höchste Punkt des Körpers, so dass die Bedingung  $Z_S \geq Z_0$  erfüllt ist, so lässt sich der Ersatzkörper durch Addition und Subtraktion zusammensetzen aus Zylindern mit vertikalen Mantellinien, deren Deckflächen ausnahmslos im Niveau  $Z_S$  liegen. Wir brauchen nur die Zylinder zusammenzufügen, die die Grundflächen  $F_1, F_2, \dots, F_K$  besitzen, und davon die Zylinder mit den Grundflächen  $G_0, G_1, \dots, G_{K-1}$  zu subtrahieren (siehe Fig. 5).

Ganz entsprechend kann man nun die Schwerestörung des Ersatzkörpers bestimmen. Spezialisieren wir zunächst Fig. 2 auf den Fall  $Z_0 = Z_S$ , so liefert Gleichung (5) die Schwerestörung eines Zylinders mit vertikalen Mantellinien, der bis zum Niveau  $Z_S$  reicht, nämlich

$$\frac{b}{0,5} \cdot \frac{V}{10^8} \cdot \varrho \sum_n a_n t_n (p_1).$$

Bei der Anwendung auf den Zylinder mit der Grundfläche  $F_i$  haben wir  $p_1$  zu ersetzen durch

$$p_i = \frac{Z_S - Z_i}{b V}, \quad i = 0, 1, \dots, K. \tag{8}$$

Zu  $a_n$  fügen wir ferner einen zweiten Index  $i$ .  $a_{ni}$  ist also entsprechend wie  $a_n$  in 5. die Anzahl der Felder des  $n$ . Ringes des Auszählidiagrammes, die im Grundriss in  $F_i$  liegen, wenn dieser Grundriss eine zeichnerische Darstellung des Ersatzkörpers im Masstab  $1 : V$  ist (Fig. 6). Entsprechend sei  $b_{ni}$  die Anzahl der Felder des  $n$ . Ringes des Auszählidiagrammes, die in  $G_i$  liegen. Der Zylinder mit der Grundfläche  $F_i$  ergibt dann die Schwerestörung

$$\frac{b}{0,5} \cdot \frac{V}{10^8} \cdot \varrho \sum_n a_{ni} t_n (p_i),$$

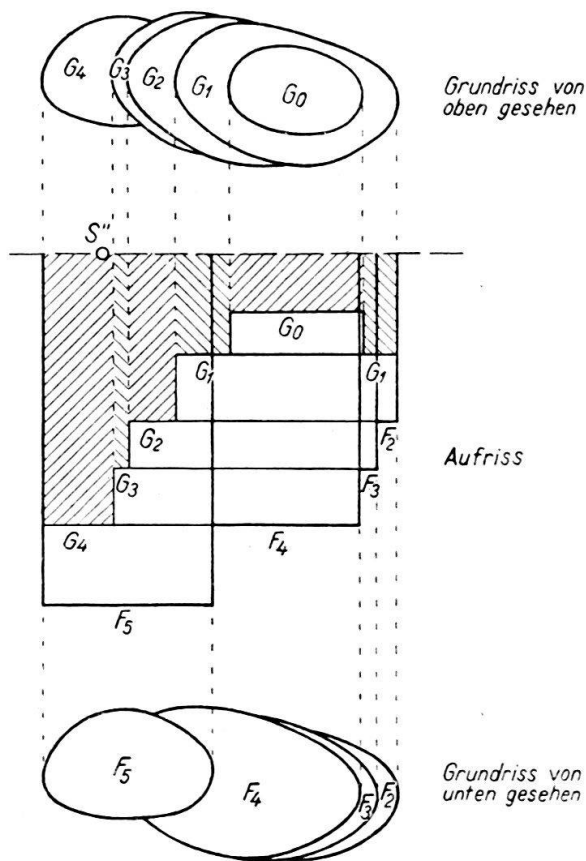


Fig. 5. Zusammensetzung des Ersatzkörpers aus Zylindern.



der Zylinder mit der Grundfläche  $G_i$  die Störung

$$\frac{b}{0,5} \cdot \frac{V}{10^8} \cdot \rho \sum_n b_{ni} t_n(p_i).$$

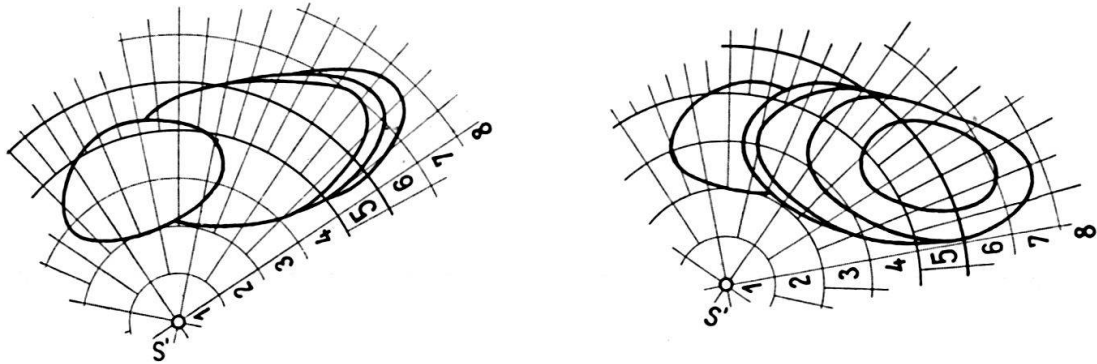


Fig. 6. Die Grundrisse des Ersatzkörpers mit dem Auszähldiagramm.

Die gesamte Schwerestörung  $s$  des Ersatzkörpers ist die Summe der Schwerestörungen der Zylinder mit den Grundflächen  $F_1, F_2, \dots, F_K$  minus die Summe der Schwerestörungen der Zylinder mit den Grundflächen  $G_0, G_1 \dots G_{K-1}$ , also

$$s = \sum_{i=1}^K \frac{b}{0,5} \cdot \frac{V}{10^8} \cdot \rho \sum_n a_{ni} t_n(p_i) - \sum_{i=0}^{K-1} \frac{b}{0,5} \cdot \frac{V}{10^8} \cdot \rho \sum_n b_{ni} t_n(p_i).$$

Führt man die Bezeichnungen  $a_{n0} = 0$  und  $b_{nK} = 0$  ein, und ersetzt die beiden

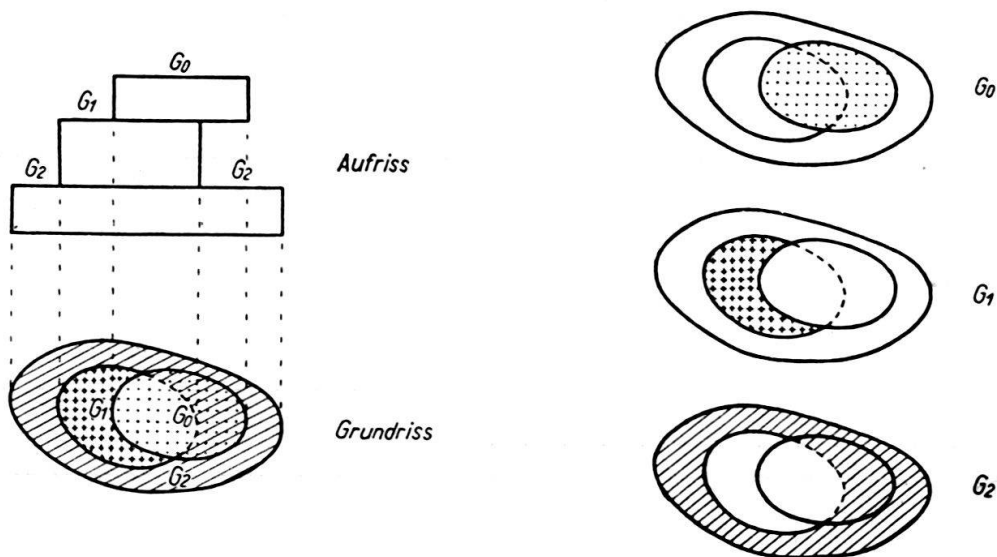


Fig. 7. Sonderfall eines Ersatzkörpers.

Nenner  $10^8$  durch  $10^5$ , so erhält man folgende Formel (9), die  $s$  nicht mehr im CGS-System, sondern direkt in *Milligal* (1 Milligal = 0,001 cm/sek<sup>2</sup>) liefert:

$$s = C \sum_{i=0}^K \sum_n (a_{ni} - b_{ni}) t_n(p_i), \quad C = \frac{bV\rho}{0,5 \cdot 10^5}. \tag{9}$$

Diese Formel, abgeleitet unter der vorläufigen Annahme, dass die Station mindestens so hoch liege wie der höchste Punkt des Körpers, gibt auch die Schwerestörung mit dem richtigen Vorzeichen, wenn die Station mindestens so tief liegt wie der tiefste Punkt, also für  $Z_S \leq Z_K$ . Ist das Niveau von  $S$  zwischen dem des höchsten und des tiefsten Punktes, also  $Z_0 > Z_S > Z_K$ , so empfiehlt es sich, durch die Horizontalebene im Niveau der Station den Körper in zwei Teile zu zerlegen und die Schwerestörung für jeden Teil gesondert zu berechnen. Schliesslich ist noch zu bemerken, dass es Fälle gibt, in denen eine Fläche  $G_i$  nicht wie in Fig. 5 von oben gesehen vollständig sichtbar ist, sondern durch einen höher gelegenen Zylinder ganz oder teilweise verdeckt ist. Z. B. wird in Fig. 7 die Fläche  $G_2$  teilweise verdeckt durch den obersten Zylinder. Entsprechendes gilt natürlich für die Flächen  $F_i$ .

Entsprechend der Bemerkung über die geometrische Bedeutung von  $p_0$  und  $p_1$  in 5. empfiehlt es sich, vor allem wenn die Schwerestörung für ein ganzes Netz von Stationen  $S$  mit verschiedenen Meereshöhen zu berechnen ist, die Grössen  $p_i$  von Gleichung (8) folgendermassen zu bestimmen:

Man misst in dem im Masstab 1 :  $V$  gezeichneten Aufriss von Fig. 3 die Meereshöhen der Station  $S$ , des obersten und des untersten Punktes des Körpers und der verschiedenen Höhenkurven. Als Masstab verwendet man dabei wie in 5. einen Radius von Tafel XV, d. h. einen Masstab mit der Einheitsstrecke von der Länge  $b$ . Die Niveaux über Meereshöhe werden positiv, die unter Meereshöhe negativ genommen. Man erhält so direkt die Grössen

$$y_s = \frac{Z_S}{bV}, \quad y_0 = \frac{Z_0}{bV}, \quad y_K = \frac{Z_K}{bV}, \quad h_i = \frac{H_i}{bV}, \quad i = 1, 2, \dots, K. \quad (10)$$

Entsprechend den Gleichungen (7) berechnet man daraus

$$y_1 = 2h_1 - y_0, \\ y_i = \frac{1}{2}(h_{i+1} + h_i), \quad i = 2, 3, \dots, K - 1. \quad (11)$$

Nach Gleichung (8) wird nunmehr

$$p_i = -y_i + y_s, \quad i = 0, 1, \dots, K. \quad (12)$$

Die Grössen  $-y_i$  sind für einen gegebenen Körper unabhängig von der Station  $S$  zum voraus zu bestimmen. Für jede Station  $S$  muss dann einfach zur Zahlenreihe der  $-y_i$  die feste Grösse  $y_s$  addiert werden, um die Zahlenreihe der  $p_i$  zu erhalten. (Man vergleiche das Zahlenbeispiel von 7.)

## 7. Zahlenbeispiel.

Der Körper, dessen Schwerestörung  $s$  im Punkte  $S$  nach Formel (9) von 6. bestimmt werden soll, und für dessen Dichte gegenüber der Dichte der Umgebung ein Überschuss von  $\varrho = 0,4 \text{ gr/cm}^3$  angenommen werde, ist in Fig. 3 im Grund- und Aufriss dargestellt. Die Darstellung habe den Masstab 1 : 100 000 = 1 :  $V$ . Sie enthält den Umriss des Körpers, sowie  $K = 5$  Höhenlinien, die die Form der Oberfläche des Körpers zu charakterisieren haben. Ferner ist im Aufriss das Meeresniveau eingezeichnet. In Tafel XV misst man den radialen Abstand zweier benachbarter Kreise. Er beträgt  $b = 0,5 \text{ cm}$ . Durch Einsetzen der Grössen  $b$ ,  $V$  und  $\varrho$  erhält man für den Faktor  $C$  in Formel (9) den Wert  $C = 0,4$ .

Nunmehr sollen die Grössen  $p_i$  von Formel (9) bestimmt werden. Mit einem Masstab, dessen Einheitsstrecke  $b$  beträgt, hat man im Aufriss von Fig. 3 von

folgenden Punkten, resp. Linien die Höhenunterschiede gegenüber dem Meeresniveau abzumessen. (Statt des Spezialmasstabes kann in unserem Fall wegen  $b=0,5$  cm auch ein gewöhnlicher mm-Masstab verwendet werden. Die erhaltenen, in cm ausgedrückten Masszahlen sind dann einfach zu verdoppeln.)

	Höhenunterschied gegenüber dem Meeresniveau:		Höhenunterschied gegenüber dem Meeresniveau:
Station S . . . . .	$y_s = 2,55$	erste (oberste) Höhenlinie . . . .	$h_1 = 0,9$
oberster Punkt des Körpers . . . . .	$y_0 = 1,4$	zweite Höhenlinie . . . .	$h_2 = -0,2$
unterster Punkt des Körpers . . . . .	$y_5 = -4,8$	dritte Höhenlinie. . . .	$h_3 = -1,7$
		vierte „ . . . .	$h_4 = -2,2$
		fünfte „ . . . .	$h_5 = -4,0$

Nach den Formeln (11) von 6. berechnet man nun  $y_1$  bis  $y_4$  und nach (12) die  $p_i$ . Für unser Zahlenbeispiel sind die Werte in Tab. 1 eingetragen. Die Tabelle ist ohne weiteres auch für mehrere Stationen zu gebrauchen; man hat nur für jede weitere Station eine besondere Kolonne für die  $p_i$  anzufügen.

Tabelle 1.

$i$	Formel	$y_i$	$p_i$	$p_i$ für die Stationen		
				S	S*	S**
0	8	$y_0 = 1,4$	$p_0$	1,15		
1	$y_1 = 2 h_1 - y_0$	$y_1 = 0,4$	$p_1$	2,15		
2	$y_2 = \frac{1}{2} (h_3 + h_2)$	$y_2 = -0,95$	$p_2$	3,50		
3	$y_3 = \frac{1}{2} (h_4 + h_3)$	$y_3 = -1,95$	$p_3$	4,50		
4	$y_4 = \frac{1}{2} (h_5 + h_4)$	$y_4 = -3,1$	$p_4$	5,65		
5	—	$y_5 = -4,8$	$p_5$	7,35		

Zur Bestimmung der Grössen  $a_{ni}$  und  $b_{ni}$  in Formel (9) sind aus dem Grundriss von Fig. 3 die Höhenlinien auf Pauspapier durchzuzeichnen. Der Umriss des Körpers ist nicht mitzuzeichnen. Es sind zwei Pausen herzustellen, eine für die  $a_{ni}$ , die andere für die  $b_{ni}$ . Bei der ersten beginnt man mit der untersten, dem Meeresniveau  $H_5$  entsprechenden Linie, die vollständig gezeichnet wird. Die nächste darüber liegende,  $H_4$ , wird nur so weit gezeichnet, als sie nicht von der Fläche  $F_5$  überdeckt wird.  $F_5$  ist die Fläche, die von der Höhenlinie  $H_5$  umgrenzt wird. Der Reihe nach werden so die Höhenlinien  $H_4, H_3, H_2$  und  $H_1$  gezeichnet und die umgrenzten Flächen nach Fig. 5, Grundriss von unten gesehen, mit  $F_5, F_4$  bis  $F_1$  bezeichnet. (In unserem Beispiel fällt  $F_1$  weg, da diese Fläche von  $F_2$  vollständig überdeckt wird.) Die zweite Pause wird in gleicher Weise hergestellt. Nur wird begonnen mit der obersten, dem Meeresniveau  $H_1$  entsprechenden Kurve. Bei der Bezeichnung der Flächen hat man zu beachten, dass die Fläche, die von  $H_1$  umgrenzt wird, nicht mit  $G_1$ , sondern mit  $G_0$  zu bezeichnen ist, die von der Kurve  $H_2$  umgrenzte mit  $G_1$  usw., wie dies in Fig. 5, Grundriss von oben gesehen, dargestellt ist. (In dem in Fig. 7 dargestellten Ausnahmefall, der in unserem Zahlenbeispiel nicht eintritt, wären natürlich die zugehörigen Bemerkungen zu berücksichtigen.)

kungen über die Definition der Fläche  $G_i$ , resp.  $F_i$  zu beachten.) In den beiden Pausen werden auch die Grundrisse  $S'$  der Stationen eingetragen, für die man die Schwerestörung  $s$  bestimmen will. Zur Bestimmung der  $a_{ni}$  ist die Pause mit den Flächen  $F_i$  so auf das Diagramm, Tafel XV, zu legen, dass der Grundriss  $S'$  der Station, für die die Schwerestörung zu bestimmen ist, mit dem Mittelpunkt der Kreise von Tafel XV zusammenfällt (siehe Fig. 6). Die Lage der Pause über Tafel XV ist sonst beliebig, d. h. sie kann um den Punkt  $S'$  beliebig gedreht werden.  $a_{ni}$  ist die Anzahl der Felder des Kreisringes mit der Nummer  $n$ , die in das Feld  $F_i$ ,  $b_{ni}$  die Anzahl der Felder des gleichen Ringes, die in das Feld  $G_i$  fallen. Beim Abzählen der Felder werden Bruchteile von Feldern auf Zehntel geschätzt. Zur Notierung der Grössen  $a_{ni}$  und  $b_{ni}$  sowie zur Bestimmung der einzelnen Summanden von Formel (9) wird eine Tabelle benützt (siehe Tab. 2), die so in Felder

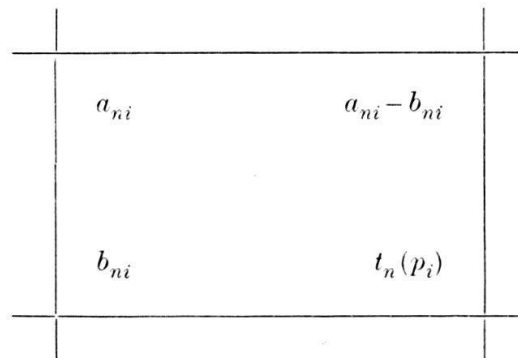


Fig. 8.

eingeteilt ist, dass in jedes Feld vier Zahlen eingeschrieben werden können, und zwar nach dem Schema von Fig. 8. Jede Kolonne der Tabelle 2 entspricht einem Index  $i$ , jede Zeile einer Nummer  $n$ .

Tabelle 2.

$n \backslash i$	0	1	2	3	4	5
3		0   -0,2 0,2   0,16	0   -2,8 2,8   0,275	0   -0,6 0,6   0,34	2,0   -0,6 2,6   0,39	4,7   4,7 0   0,445
4	0   -0,5 0,5   0,03	0   -2,8 2,8   0,1	0   -1,9 1,9   0,195	0,1   -0,4 0,5   0,255	2,8   0,7 2,1   0,31	5,0   5,0 0   0,375
5	0   -4,3 4,3   0,0105	0   -3,5 3,5   0,032	0,2   -1,1 1,3   0,07	0,6   0,1 0,5   0,097	8,6   8,2 0,4   0,124	1,1   1,1 0   0,157
6	0   -3,2 3,2   0,007	0   -2,2 2,2   0,023	0,5   0,5 0   0,051	0,9   0,9 0   0,075	3,6   3,6 0   0,1	
7	0   -0,1 0,1   0,005	0   -1,6 1,6   0,017	1,1   1,1 0   0,04	0,6   0,6 0   0,059		

In unserem Zahlenbeispiel geht, wie Tabelle 1 zeigt,  $i$  von 0 bis 5, so dass die Tabelle 2 sechs entsprechende Kolonnen erhält. Nach Fig. 7 sind beim Auszählen

der  $a_{ni}$  und  $b_{ni}$  die Kreisringe mit den Nummern  $n = 3$  bis  $n = 7$  des Diagramms, Tafel XV, beteiligt. Tabelle 2 erhält daher die entsprechenden 5 Zeilen. Das Auszählen der  $a_{ni}$  geschieht Ring für Ring, wobei man mit dem innersten Ring ( $n = 3$ ) beginnt. Die  $a_{ni}$  werden daher Zeile für Zeile in die linken oberen Ecken der Felder von Tabelle 2 eingetragen. Entsprechend geht man bei den  $b_{ni}$ , wiederum mit dem innersten Ring beginnend, vor. Die  $b_{ni}$  werden in die linken unteren Ecken der Felder von Tabelle 2 eingetragen. Nach Abschluss der Abzählarbeit wird in jedem Feld von Tabelle 2 die untere Zahl von der oberen subtrahiert und die Differenz entsprechend Fig. 8 in die rechte obere Ecke des Feldes eingetragen. Es fehlen noch die  $t_n(p_i)$ , die kolonnenweise bestimmt werden. Man beginnt mit  $p_0 = 1,15$  von Tabelle 1, liest in Tafel XVI resp. XVII für  $p = p_0$  die Grössen  $t_n(p)$  für  $n = 3, 4, 5, 6, 7$  ab. Die Zahlen werden eingetragen in die rechten unteren Ecken der Felder der mit 0 überschriebenen Kolonne der Tabelle 2. Entsprechend verfährt man mit  $p_1$  bis  $p_5$  von Tabelle 1.

Die Summanden von Formel (9) sind die Produkte der beiden rechtsstehenden Zahlen der Felder von Tabelle 2. Man berechnet diese Produkte und trägt sie in eine neue Tabelle (Tabelle 3) so ein, dass die positiven und die negativen Summanden getrennt addiert werden können.

Tabelle 3.

$i$	$n$	+	-	$i$	$n$	+	-
				Übertrag		0,0255	1,8024
0	4		0,0150	2	7	0,0440	
0	5		0,0452	3	3		0,204
0	6		0,0224	3	4		0,1020
0	7		0,0005	3	5	0,0097	
1	3		0,032	3	6	0,0675	
1	4		0,280	3	7	0,0354	
1	5		0,1120	4	3		0,234
1	6		0,0506	4	4	0,217	
1	7		0,0272	4	5	1,0168	
2	3		0,770	4	6	0,3600	
2	4		0,3705	5	3	2,0915	
2	5		0,0770	5	4	1,875	
2	6	0,0255		5	5	0,1727	
Übertrag		0,0255	- 1,8024			5,9151	- 2,3424
						= 3,5727	

Die Tabelle erübrigt sich, wenn eine Rechenmaschine benützt wird, die die Produkte unter Berücksichtigung ihrer Vorzeichen vorweg summiert. Die algebraische Summe aller Beträge, nämlich 3,5727, multipliziert mit der Zahl  $C = 0,4$  ergibt die Schwerestörung  $s = 1,43$  Milligal des Körpers von Fig. 3 an der Station S.

Zürich, Institut für Geophysik der Eidg. Techn. Hochschule.

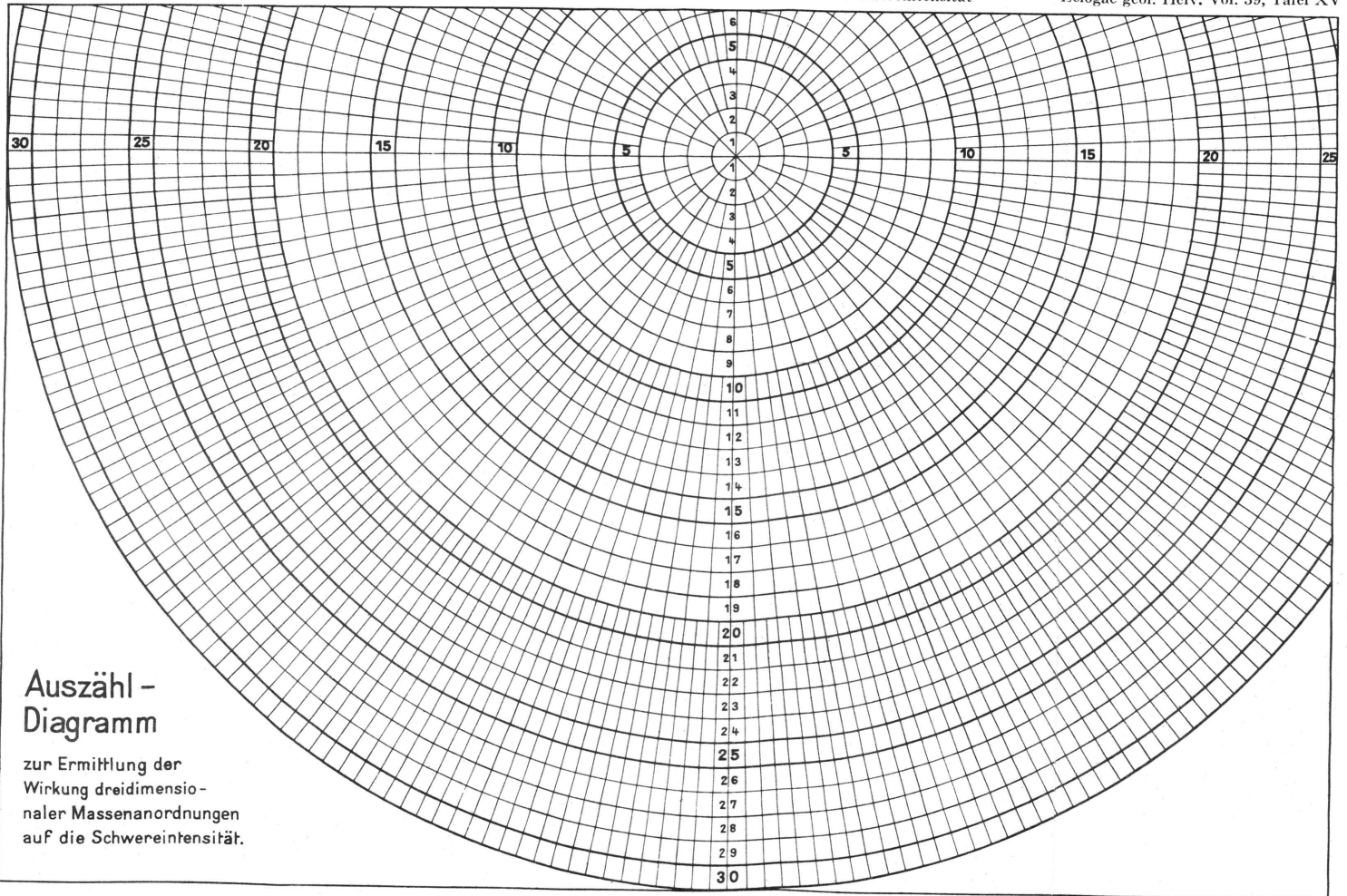


Diagramm zur Bestimmung des Einflusses dreidimensionaler Massenarrangierungen auf die Schwereintensität

Fortsetzung der Kurven siehe Tafel XVII oben

$$t_n(p) = \frac{2\pi \cdot 6.667 \cdot 0.5}{e_n} (1 + \sqrt{(n-1)^2 + p^2} - \sqrt{n^2 + p^2})$$

n	e <sub>n</sub>
1	8
2	16
3 u. 4	32
5 bis 9	64
10 bis 19	128
20 bis 30	256

N.B. Die Ordinaten der Kurven von n = 1 bis 4 liefern 0,1 t<sub>n</sub>(p); alle anderen t<sub>n</sub>(p) selbst.

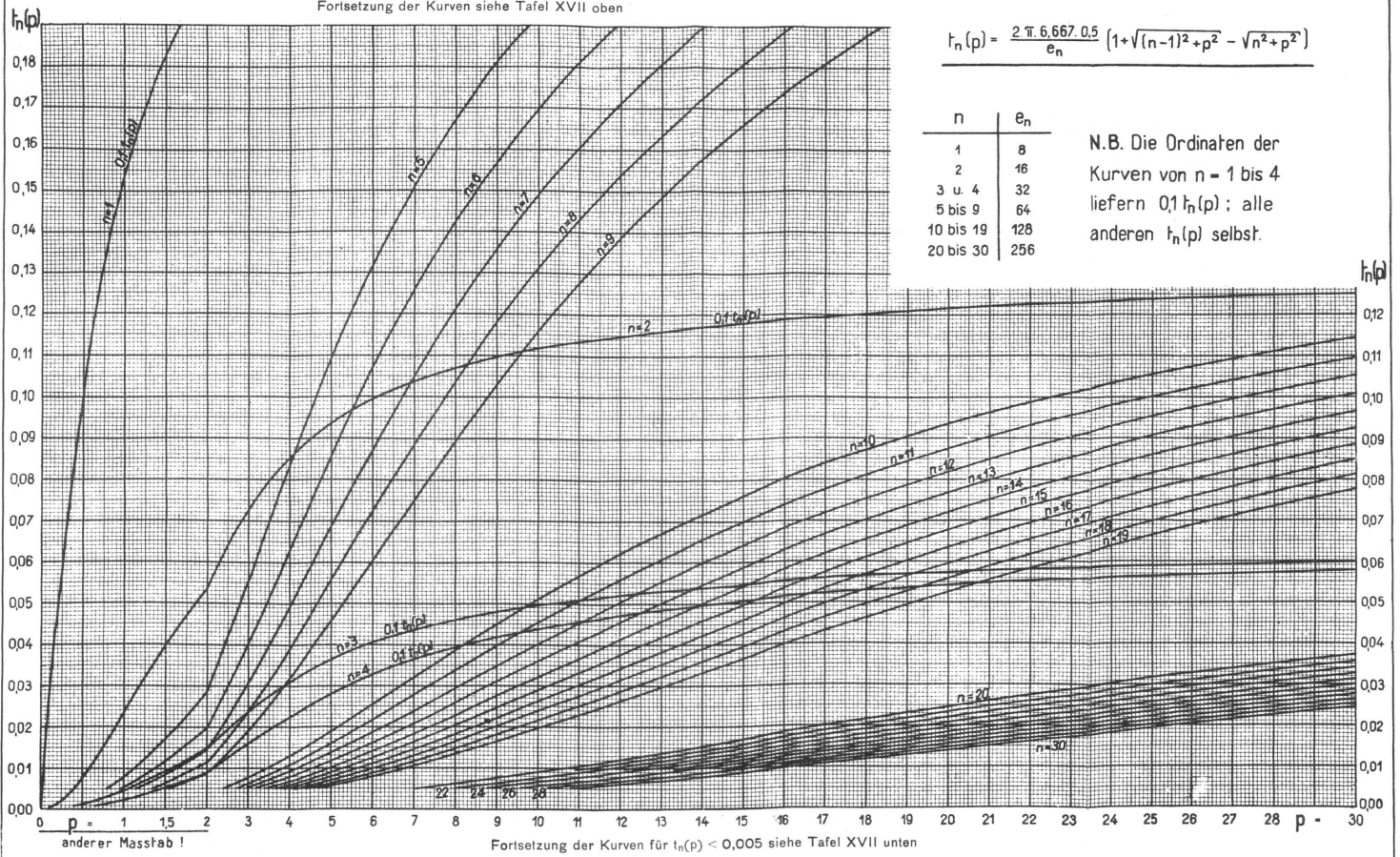


Diagramm zur Bestimmung des Einflusses dreidimensionaler Massenarrangements auf die Schwereintensität

Fortsetzung der Kurven von Tafel XVI, Formel für  $I_n(p)$  siehe Tafel XVI

