Zeitschrift: Elemente der Mathematik (Beihefte zur Zeitschrift)
Band: 1/2 (1947)

Artikel: Jakob Steiner
Autor: Kollros, Louis
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-1191

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Siehe Rechtliche Hinweise.

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. Voir Informations légales.

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. See Legal notice.

Download PDF: 08.11.2024

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Jakob Steiner

Le premier congrès international des mathématiciens a eu lieu à Zurich du 9 au 11 août 1897. Le comité d'organisation a tenu à reproduire sur la carte de fête les portraits des plus grands mathématiciens suisses des trois siècles passés: Jacques (1654-1705), Jean (1667-1748) et Daniel *Bernoulli* (1700-1782), *Euler* (1707-1783) et *Steiner* (1796 à 1863), le petit paysan bernois qui devint le géomètre le plus remarquable de son temps.

Né à Utzenstorf le 18 mars 1796, Jakob Steiner fut bien vite un collaborateur actif de ses parents dans leur modeste domaine rural; son instruction était rudimentaire; il n'apprit à écrire qu'à 14 ans. Cadet de cinq enfants, quatre fils et une fille, il accompagnait souvent son père au marché de Soleure; plus tard, il y alla seul tous les samedis; il aidait aux paysans à faire leurs calculs.

Quelquefois, il passait des nuits entières à regarder le ciel étoilé; l'astronomie lui semblait la plus belle des sciences.

Poussé par un irrésistible désir de s'instruire, il quitta son village en mai 1814, malgré l'opposition de ses parents, pour se rendre chez *Pestalozzi* à Yverdon. Le grand et généreux pédagogue le reçut gratuitement dans son établissement. Les maîtres de mathématiques, *Maurer* et *Leuzinger*, eurent vite constaté les aptitudes exceptionelles de leur élève; ils lui posaient de nombreux problèmes dont il trouvait, en général, la solution immédiatement. Quand on lui demanda, par exemple, de partager un pentagone régulier en deux parties équivalentes par une parallèle à un côté, il indiqua tout de suite la construction la plus simple. Si la question était plus difficile, il ne l'abandonnait pas avant d'être arrivé au but. «Gefunden Samstag den 10. Christmonat 1814, Nachts ein Uhr; 3 + 3 + 4 Stunden daran gesucht», écrit-il dans son journal à propos du problème suivant sur le pentagone régulier $ABCDE$: On joint le sommet A au milieu M de DE, le sommet B au milieu N de CD; les deux droites AM et BN déterminent sur la diagonale CE le segment IK; prouver que IK est plus petit que $AI = BK$.

En tête d'un de ses cahiers, il note cette phrase: «Arbeitet und suchet, damit ihr findet und nicht in Nachbetung verfallet!»

Quand son maître lui dit que trois plans, se coupant en un point, forment un trièdre, Steiner ajoute aussitôt: Mais il y en a huit! Cette simple remarque, appliquée à un nombre quelconque de plans, est développée dans un cahier du 5 juin 1816, intitulé: «Pestalozzische Formenlehre»; elle est à l'origine du travail publié dix ans plus tard dans le Journal de Crelle: «Einige Gesetze über die Teilung der Ebene und des Raumes» (Œuvres complètes, tome I, p. 77 à 94).

Après avoir été élève pendant un an et demi, Steiner fut engagé comme maître de mathématiques à l'institut d'Yverdon. Trois ans plus tard, en automne 1818, il partit pour *Heidelberg*, avec un bon certificat de Pestalozzi; il avait trouvé sa voie; il était résolu à consacrer sa vie à la recherche mathématique. Sans ressources, il fut obligé de donner des leçons particulières pour pouvoir payer ses études à l'Université. Ses camarades plus riches le secondèrent dans ses efforts; il leur garda toujours un souvenir reconnaissant, entre autres au Saint-Gallois Wilhelm Naeff, qui fut conseiller féderal de 1848-1875, au Lucernois Casimir Pfyffer et au D^r^ Schneider, qui devint plus tard conseiller d'Etat bernois. Il suivit surtout les cours de mathématiques et de mécanique du professeur *Schweins*; les sommes de puissances des nombres entiers indiquées dans les Œuvres de Steiner, tome I, p. 175 et 176, ont été trouvées en appliquant une méthode générale de Schweins. Steiner s'inscrivit aussi aux cours de physique, d'astronomie, de chimie, de sciences naturelles et d'histoire, mais il n'a pas eu le temps d'approfondir ces matières.

A la fin de son cinquième semestre d'études, sans diplôme, il fait le voyage de Heidelberg à Berlin. Un de ses amis, qu'il avait probablement déjà connu à Yverdon, *Heldenmaier*, enseigne les mathématiques à l'Institut Plamann de Berlin, où la méthode de Pestalozzi est à l'honneur; il n'a pas accepté le poste qu'on lui a offert au *Gymnase «Werder»* et a conseillé à Steiner de se présenter à sa place. Celui-ci refuse de subir des examens d'histoire et de latin; le philosophe *Hegel* trouve qu'il n'y a que des réflexions triviales dans sa composition sur la mémoire et le raisonnement; seul le travail écrit de mathématiques est très satisfaisant. Steiner est engagé provisoirement comme maître auxiliaire. Le directeur *Zimmermann* écrit le 25 avril 1821: «Mehrere Probevorlesungen, welche Herr Steiner in unserer Anstalt gehalten hat, zeugen von den seltenen Eigenschaften eines geschickten und gewandten Lehrers.»

Mais quand il s'agit de le nommer définitivement, le directeur n'est plus de cet avis; le 31 mai 1822, il écrit: «Mein erstes Urteil über Herr Steiner hat leider die Erfahrung widerlegt.»

Steiner lui-même note à ce propos: «Meine Anstellung als wirklicher Lehrer wurde ein Jahr lang verzögert, und in dieser Zeit erwuchsen mir daraus, daß ich das mathematische Lehrbuch des Direktors meinem Unterricht nicht zu Grunde zu legen vermochte, Mißverständnisse, die mich zwangen, die Anstalt zu verlassen und wiederum meinen Unterhalt durch Privatunterricht zu erwerben. Seit dem Herbst 1822 war ich genötigt, mir die Mittel zu meiner Subsistenz aufs mühseligste zu erwerben.»

Malgré ses soucis matériels, il se mit au travail avec une rare énergie. Il profita de ses loisirs forcés pour noter dans son journal les résultats de ses recherches géométriques. Les manuscrits que le professeur Graf a trouvés pêle-mêle dans une caisse à la bibliothèque de la Société des Sciences naturelles à Berne datent de cette époque; ils ont été réunis par le D[r] Bützberger en trois volumes reliés comptant en tout 535 pages grand format (20 sur 35 cm) en petite écriture serrée. Sous le titre «Wiedergeburt und Auferstehung», on y trouve, en date du 8 février 1824, la transformation connue aujourd'hui sous le nom d'*inversion*; elle est attribuée habituellement à Bellavitis (1836), mais Steiner en avait fait de nombreuses applications 12 ans plus tôt; les théorèmes 7 et 8 proposés dans le tome 3 du Journal de Crelle (Œ. c. I, p. 177) et dans les Annales de Gergonne (Œ. c. I, p. 224) se démontrent aisément à l'aide de l'inversion. La solution élégante du *problème de Malfatti* * (Œ. c. I, p. 35) est notée sans démonstration dans les manuscrits de 1824; ses généralisations (p. 37-40) sont les résultats d'une inversion et d'une projection stéréographique.

---

* Construire trois cercles tangents entre eux et dont chacun touche deux côtés d'un triangle donné. Démonstration de Schröter (Crelle 77, p. 230).

Le jour de Noël 1824, il note dans son journal: «Wenn man in der Peripherie eines Kreises 5 beliebige Punkte annimmt, um 4 derselben Kreise schlägt, die sämtlich durch den fünften gehen, so schneiden sich diese 4 Kreise außerdem in 6 Punkten, von denen viermal drei in einer Geraden liegen, und die Fußpunkte der aus dem fünften Grundpunkte auf diese 4 Geraden gefällten Lote liegen wieder in einer geraden Linie, usw. Wir sind nunmehr im Stande, ein sich ins Unendliche erstreckendes Gesetz, welches uns im ersten Augenblick mit Furcht und Schrecken erfüllte, bis zu seiner Mündung ins Meer der Unendlichkeit zu verfolgen und zu beweisen.» Et le 27 décembre, il démontre son théorème général que l'on peut traduire ainsi: «*Sur un cercle, on a n points:* 1, 2, 3, ..., n; *ils déterminent* $\binom{n}{2}$ *cordes* $\overline{12}$, $\overline{13}$, $\overline{23}$, ... *Si l'on abaisse d'un autre point quelconque A du cercle les perpendiculaires à ces cordes, les pieds* 12, 13, 23, ... *de ces perpendiculaires sont trois à trois sur* $\binom{n}{3}$ *droites* $\overline{123}$, $\overline{124}$, ... *Sur ces droites, on abaisse de nouveau des perpendiculaires du point A; leurs pieds* 123, 124, ... *sont quatre à quatre sur* $\binom{n}{4}$ *droites, et ainsi de suite. On arrive enfin à* $\binom{n}{n-1} = n$ *droites; les pieds des perpendiculaires abaissées de A sur ces n droites sont encore en ligne droite.*» *

Le 29 décembre 1824, Steiner note le théorème (Œ. c. I, p. 223): «Quatre droites d'un plan prises trois à trois, forment quatre triangles tels que les cercles circonscrits passent tous par un même point A. Les centres 1, 2, 3, 4 de ces quatre cercles se trouvent avec A sur la circonférence d'un cinquième cercle.» Et il ajoute cette remarque qui ne figure pas dans ses œuvres imprimées: «Durch 4 Geraden entsteht ein Kreis (1,2,3,4) und ein Punkt A. Bei 5 Geraden entstehen 5 solche Kreise und 5 solche Punkte; die 5 Kreise schneiden sich in einem Punkt B und die 5 Punkte A liegen in einem Kreis (a), der ebenfalls durch den Punkt B geht.» C'est le théorème que *Miquel* a démontré 21 ans plus tard dans le Journal de Liouville X, p. 349. Et Steiner dit en terminant: «Es ist nun zu vermuten, daß bei 6 Geraden die 6 Punkte B ebenfalls in einem Kreis liegen, und daß die 6 Kreise (a) mit diesem Kreis sich in einem Punkt schneiden; kurz, es muß hierbei irgend ein Gesetz obwalten, welches sich auf jede folgende Anzahl Geraden erstreckt.» Il avait donc prévu en 1824 le beau théorème que *Clifford* a démontré en 1870 (Math. Papers, p. 38).

On trouve aussi dans les manuscrits de décembre 1824 les solutions de trois problèmes posés plus tard par Steiner dans le tome 2 du Journal de Crelle (Œ. c. I, p. 127 et 128, Nos 1, 2 et 6). Voici ces résultats: 1. *Trois cercles d'un plan se coupent en un point O; mener par O une droite telle que ses autres points d'intersection A, B, C avec les cercles déterminent des segments AB, BC dont le rapport est donné.* Soient M_a, M_b, M_c les centres des cercles donnés. Sur la droite $M_a M_b$ on détermine le point m_c tel que $M_a M_b : M_b m_c$ soit égal au rapport donné. Le cercle de centre m_c passant par O coupe le cercle M_c au point C; OC est la droite cherchée.

Si l'on a trois sphères passant par le point O, il y a une infinité de droites qui les coupent en des points A, B, C tels que le rapport $AB:BC$ ait une valeur donnée; elles

* Voir Comm. Math. Helv., vol. 6, p. 154-157 (1933).

forment un faisceau dans le plan du cercle commun aux deux sphères M_c et m_c. Cette remarque permet de résoudre le problème 2: *Quatre sphères se coupent en un point O; mener par O une droite telle que ses autres points d'intersection A, B, C, D avec les sphères déterminent des segments AB, BC, CD de rapports donnés.* Soient M_a, M_b, M_c, M_d les centres des sphères données. Sur la droite $M_a M_b$ on détermine les points m_c et m_d tels que $M_a M_b : M_b m_c : m_c m_d$ aient les rapports donnés. Les sphères de centres m_c et m_d passant par O coupent respectivement les sphères M_c et M_d; les plans des deux cercles d'intersection se coupent suivant la droite cherchée.

C'est aussi le jour de Noël 1824 que Steiner note la solution du problème suivant: *Trouver sur le cercle k circonscrit à un triangle ABC le point P tel que sa droite de Simson relative au triangle ait une direction donnée d.* On trace les deux cercles k_1 par A et B, k_2 par B et C ayant le même rayon que k; ces deux cercles se coupent encore en D; par le point D, on mène la parallèle à la direction donnée d; elle coupe k_1 en C_1 et k_2 en A_1; le cercle de centre A passant par C_1 et le cercle de centre C passant par A_1 se coupent au point cherché P de k; sa droite de Simson, parallèle à d, passe par le milieu de PD.

Il y aurait encore bien des choses à glaner dans ce Journal de 1823-25, par exemple la démonstration du théorème 9 énoncé à la page 178 du tome I des Œ. c.; il contient comme cas particuliers deux théorèmes peu connus, l'un d'Archimède, l'autre du mathématicien arabe Alkauhi. Mais les résultats les plus importants ont été publiés par Steiner lui-même dans les trois premiers tomes du Journal de Crelle et dans les Annales de mathématiques de Gergonne, entre autres: la démonstration élégante du théorème d'Euler sur les polyèdres, la recherche des relations entre les rayons des huit sphères tangentes à quatre plans, la transformation des figures sphériques, la belle série de théorèmes relatifs aux coniques et le grand mémoire intitulé «Einige geometrische Betrachtungen» (Œ. c. I, p. 17-76), si riche en résultats remarquables.

Le troisième cahier de manuscrits datés du 7 janvier au 2 août 1825 est consacré à la préparation de son grand ouvrage de jeunesse: «*Allgemeine Theorie über das Berühren und Schneiden der Kreise und der Kugeln*, worunter eine große Anzahl neuer Untersuchungen und Sätze vorkommen, in einem systematischen Entwicklungsgange dargestellt von Jakob Steiner, *Privatlehrer* in Berlin.»

Graf et Bützberger ont eu l'agréable surprise de trouver intact à Berne le manuscrit de ce beau travail de 1826 prêt pour l'impression. Mais il n'a été publié qu'en 1931, chez Orell Füssli (Zurich), par les soins de MM. Fueter et Gonseth, grâce à une subvention du fonds Escher-Abegg de l'Université de Zurich.

Partant des propriétés les plus simples, Steiner s'élève peu à peu jusqu'aux théorèmes nouveaux et aux problèmes compliqués. Les notations sont si bien choisies qu'on peut suivre le raisonnement sans voir les figures. Le contact est considéré comme un cas particulier de la section sous un angle quelconque. Il démontre, par exemple, que:

«*Les sphères isogonales à quatre sphères données se répartissent en huit faisceaux tels que toutes les sphères d'un même faisceau ont pour plan radical commun l'un des huit plans de similitude des quatre sphères. Le lieu des centres des sphères d'un même faisceau* *est la perpendiculaire abaissée du centre radical des quatre sphères sur le plan de similitude correspondant.*» Sur chacune de ces huit droites, il y a, en particulier, les centres de deux sphères *tangentes* aux quatre sphères données.

La solution des problèmes suivants est alors presque immédiate: «*Construire une sphère coupant cinq sphères données sous le même angle*». Et «*Trouver une sphère qui coupe quatre sphères S_1, S_2, S_3, S_4 respectivement sous les angles donnés α_1, α_2, α_3, α_4.*» Il y a une centaine de problèmes de ce genre à la fin du travail.

A propos des sphères tangentes à trois sphères données, il trouve, indépendamment des géomètres français de l'école de Monge, les propriétés de la cyclide de Dupin et des courbes focales.

Steiner n'avait pas l'habitude de lire beaucoup. Quand il arrivait à des résultats essentiels, il les comparait à ce que d'autres avaient pu faire dans le même domaine.

Le titre de «Privatlehrer» qu'il se donne à 29 ans, prouve qu'il devait encore gagner sa vie par des leçons particulières. Il songeait peut-être à s'en aller.

Mais deux événements contribuèrent alors à le retenir à Berlin: la création de la «Gewerbeschule» dont il devint maître auxiliaire en octobre 1825, et celle du Journal de Crelle, où il eut l'occasion de publier ses premiers travaux. Adam Ludwig *Crelle*, Oberbaurat, avait depuis longtemps conçu le projet de son Journal de mathématiques; ce qui le décida à le réaliser, ce fut l'importance des mémoires de deux jeunes mathématiciens de génie: Steiner et le Norvégien *Abel*, mort à 27 ans (en 1829), dont les profondes découvertes sont aujourd'hui classiques.

Le directeur de la nouvelle Gewerbeschule, *Klöden*, reconnaît la grande valeur des travaux scientifiques de Steiner. Il écrit: «Ich muß gestehen, daß ich das seltene Talent des Herrn Steiner aufrichtig bewundere, mit welchem er aus wenigen elementaren Sätzen mit höchster Konsequenz, mathematischer Schärfe und tiefer Kombinationsgabe ganz allein auf synthetischem Wege die Geometrie mit einer so großen Menge teils ganz neuer, teils höchst einfach und auf eigentümliche Weise abgeleiteter Sätze bereichert hat.»

Le 7 mars 1827, Steiner envoie ses travaux à l'Académie des Sciences de Berlin. Les sept membres de la classe de mathématiques, dont l'astronome *Encke* est secrétaire, proposent de lui accorder une subvention de 300 thaler. En 1829, il est enfin nommé «*Oberlehrer*» à la Gewerbeschule. Klöden l'avait vivement recommandé aux autorités. Mais la bonne entente avec le directeur n'est pas de longue durée. En 1832, Klöden se plaint de l'insubordination du maître. «Herr Steiner hat die Ansicht, ich sei zwar erster Lehrer, aber nicht Direktor der Schule, und er setzt mich nolens volens als letzteren ab.» On lui reproche aussi les expressions plébéiennes qu'il emploie dans sa classe. Herr Oberbürgermeister prend le parti du directeur; il écrit: «Ich muß bekennen, daß ich die Entfernung eines solchen Mannes aus dem Lehramte als einen wahren Gewinn ansehe, und wenn er Archimedes selber wäre! Er hat keinen Begriff von Subordination und kann mithin keine Disziplin unter seinen Schülern halten. Mag er zu seines Gleichen in die Berge seiner, wie man sagt, glücklichen Heimat ziehen, unsere Brandenburger lasse er unverdorben.»

Cependant plusieurs de ses élèves lui sont reconnaissants. L'un d'eux, qui n'aimait pas les mathématiques et qui est devenu plus tard un écrivain remarquable, *Théodore Fontane*, le chef de l'école naturaliste, a caractérisé ainsi son ancien maître: «Aus dem fuchsartigen Kopfe leuchteten ein Paar kleine, listig freundliche Augen, freundlich, aber doch zugleich so, daß man deutlich fühlte: mit dem ist unter Umständen schlecht Kirschen pflücken. Er war der Ausdruck von Güte, Leidenschaft und Energie.»

Un autre de ses élèves, auquel il donnait des leçons particulières, était le fils aîné du fondateur de l'Université de Berlin, *Wilhelm de Humboldt*, l'ami de Schiller et de Gœthe, qui fut chargé d'affaires de Prusse à la cour pontificale, ministre de l'instruction publique, puis ambassadeur à Vienne. Dans sa belle conférence de Schaffhouse, à la Société des Sciences naturelles (1873), *Geiser* nous rappelle que Humboldt avait envoyé plusieurs jeunes instituteurs prussiens à l'école de Pestalozzi, qu'il avait été lui-même à Berne pendant quelque temps, et que Madame y avait même appris le dialecte bernois. On comprend que le jeune Steiner se soit senti à l'aise dans ce milieu aussi simple que distingué où il eut l'occasion de faire la connaissance de l'auteur du «Cosmos», du grand naturaliste *Alexandre de Humboldt*, esprit merveilleusement ouvert à toutes les sciences.

Il oublia ainsi ses polémiques avec les autorités administratives de la Gewerbeschule et put continuer à travailler à son grand mémoire intitulé: «*Systematische Entwickelung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten von einander*», daté de septembre 1832 et dédié à Son Excellence le Baron Wilhelm de Humboldt.

D'après la préface, l'auteur avait de vastes plans en publiant ce travail de 230 pages; il ne contenait que les bases d'un édifice scientifique; quatre autres parties devaient faire suite à cette introduction. Il est regrettable que ce projet n'ait pas pu se réaliser. Cependant cette première partie avait été bien accueillie. *Jacobi* en a fait l'éloge suivant: «In seiner Systematischen Entwickelung war Steiner bemüht, von wenigen räumlichen Eigenschaften aus, nach einem einfachen Schematismus, über das ganze Heer auseinander gerissener geometrischer Sätze eine klare Übersicht zu gewinnen, jedem seine besondere Stellung im Verhältnis zu den übrigen anzuweisen, in das frühere Chaos Ordnung zu bringen, alle Teile naturgemäß ineinandergreifen und sich zu vollbegrenzten Gruppen vereinigen zu lassen. Indem er so den Organismus aufdeckte, durch welchen die verschiedenartigsten Erscheinungen in der Raumwelt miteinander verbunden sind, hat er nicht nur die geometrische Synthese gefördert, sondern auch für alle anderen Zweige der Mathematik ein Muster einer vollkommenen Methode und Durchführung aufgestellt.»

Mais en parlant de ce travail, il ne faut pas oublier l'œuvre de *Monge* et de ses successeurs. Avant Monge, on proclamait la supériorité des méthodes analytiques. Avec sa «Géométrie descriptive et ses Applications de l'Analyse à la Géométrie», Monge tient à faire voir que ces deux sciences se complètent. «Il serait à désirer, dit-il, qu'elles fussent cultivées ensemble: la Géométrie porterait dans les opérations analytiques l'évidence qui est son caractère, et à son tour, l'Analyse porterait dans la Géométrie la généralité qui lui est propre». Les élèves de Monge: Lazare Carnot, Dupin, Brianchon, Gergonne, Bobillier, Poncelet, Chasles continuent l'œuvre du maître. Dans ses «Développements de Géométrie», *Dupin* dit: «Dans l'état actuel des sciences mathématiques, le seul moyen d'empêcher que leur domaine ne devienne trop vaste pour notre intelligence, c'est de généraliser de plus en plus les théories que ces sciences embrassent, afin qu'un petit nombre de vérités générales et fécondes soit, dans la tête des hommes, l'expression abrégée de la plus grande variété des faits particuliers.»

Dans sa prison de Saratoff, en 1813, le jeune lieutenant de 25 ans, *Poncelet*, pose les bases du grand «Traité des propriétés projectives des figures» dont la première édition est de 1822 et la seconde de 1865/66.

Dans son enthousiasme juvénile, Poncelet proclame que la géométrie, «la langue de l'artiste et de l'homme de génie», peut se suffire à elle-même et atteindre à toute la hauteur des conceptions de l'analyse.

Le traité de Poncelet se base sur trois principes fondamentaux: la considération des figures homologiques, des polaires réciproques et du principe de continuité, si vivement critiqué, à tort, par *Cauchy*.

D'autre part, les mathématiciens allemands *Möbius*, avec son calcul barycentrique (1827), et *Plücker*, avec ses développements analytico-géométriques (1828), doivent être considérés, à côté de Steiner et des élèves de Monge, comme les pionniers de la géométrie moderne. Plücker avait reproché à Steiner d'avoir marché sur les traces de Poncelet, reproche trop général contre lequel Crelle défendit son jeune collaborateur en affirmant que Steiner ne connaissait ni l'ouvrage de Plücker, ni celui de Poncelet, pendant qu'il rédigeait les siens.

A la fin de la deuxième édition de son Traité, Poncelet a publié, à 78 ans (trois ans après la mort de Steiner) un long supplément où il soulève plusieurs questions de priorité: il trouve que Steiner et d'autres ne lui ont pas rendu l'honneur qu'il méritait. «Comment s'expliquer, dit-il, que les Möbius, Steiner et Plücker en Allemagne, les Gergonne et Chasles en France, se soient, longtemps après l'apparition du Traité des propriétés projectives, imposé la tâche pénible de se faire passer pour les promoteurs, sinon les créateurs, de cette branche de la science?»

Et il écrit ailleurs: « Lors des dernières visites que Steiner, depuis son retour d'Italie, voulut bien me faire à Paris, j'étais par devoir exclusivement occupé de questions de Mécanique pure et appliquée, et il m'était aussi impossible de prêter une attention suivie aux travaux géométriques du savant professeur de Berlin que de lui venir en aide dans ses revendications, toutes confidentielles ou verbales, contre Plücker et Chasles, malgré mon désir sincère de lui être agréable et bien que je n'eusse alors aucun ressentiment pour ses singuliers procédés scientifiques à mon égard, dont, à tort sans doute, je ne m'étais pas assez inquiété à l'origine, distrait par des occupations étrangères à la Géométrie, et dominé par un sentiment d'amicale indulgence envers un aussi brillant esprit.»

Le Général Poncelet est sans doute devenu un peu trop susceptible à la fin de sa carrière. Darboux nous a rappelé que, lorsque Laguerre avait écrit dans un de ses Mémoires: «On sait que tous les cercles du plan passent par deux points imaginaires à l'infini,» Poncelet lui répliqua vertement: «On sait, oui, l'on sait, mais vous auriez bien dû dire qui vous a appris cela!»

Autant que possible, Steiner reconnaît ce qu'il doit à ses prédécesseurs, à Möbius, aux géomètres français et à Poncelet en particulier. «Alle wichtigeren, schon von Anderen aufgestellten Sätze habe ich, so weit mein Wissen reichte, ihren Urhebern einzeln zugeschrieben», écrit-il dans la préface de la «Systematische Entwickelung». D'ailleurs, si le début contient des résultats connus, les idées nouvelles apparaissent bientôt. Au premier chapitre déjà (Œ. c. I, p. 285), il montre que tous les problèmes du deuxième degré peuvent se ramener à la construction des points doubles de deux ponctuelles projectives situées sur un cercle. Le grand mérite de Steiner est d'avoir vu que les coniques et les quadriques réglées peuvent être engendrées à l'aide de deux ponctuelles projectives ou de deux faisceaux projectifs.

Si l'on projette tous les points d'une conique à partir de deux d'entre eux, on obtient deux faisceaux projectifs. Réciproquement, le lieu géométrique des points d'intersection des rayons correspondants de deux faisceaux projectifs de sommets S et S' est une conique passant par S et S'; les tangentes en ces points sont les droites qui correspondent au rayon commun SS'.

En partant des formes fondamentales (ponctuelle, faisceau de droites et faisceau de plans), le principe de dualité s'introduit immédiatement.

Toutes les tangentes à une conique déterminent sur deux d'entre elles des ponctuelles projectives. Réciproquement, l'enveloppe des droites passant par les paires de points correspondants de deux ponctuelles projectives, dont les supports s et s' sont dans un plan, est une conique tangente à s et s' aux points qui correspondent au point d'intersection de s et s'. La conique est une parabole si les deux ponctuelles sont semblables.

Si les supports s et s' sont gauches, les droites joignant les paires de points correspondants des deux ponctuelles sont les génératrices du même système d'un hyperboloïde. Si les ponctuelles sont semblables, la quadrique est un paraboloïde hyperbolique.

De nombreux résultats sont des conséquences presque immédiates de ces propriétés fondamentales (Œ. c. I, p. 334 à 407), entre autres les théorèmes de Pascal et de Brianchon.

Les génératrices rectilignes des quadriques réglées conduisent à une *correspondance quadratique* entre deux plans à l'aide de ce que Steiner appelle «*schiefe Projektion*». La définition de cette «projection gauche» est simple: On a deux droites gauches a, b et deux plans quelconques π et π'. Par tout point P de π, il passe, en général, une seule transversale de a et b; elle coupe π' en un point P'. Si P décrit une droite de π, le lieu géométrique de P' est une conique; il y a dans chacun des deux plans π et π' trois points exceptionnels auxquels correspondent des droites dans l'autre plan.

Steiner fait quelques applications de cette transformation quadratique (p. 407-438).

A la fin de son travail (p. 439-458), il donne une collection intéressante de 85 problèmes et théorèmes. Quelques-uns sont de simples applications de la théorie qui précède; d'autres sont plus difficiles. On y trouve entre autres, sans démonstration, les théorèmes sur l'hexagramme mystique: *Six points d'une conique sont les sommets de*

60 hexagones inscrits; les 60 droites de Pascal correspondantes concourent trois à trois en 20 points situés quatre à quatre sur 15 droites, de sorte que par chacun des 20 points passent trois de ces 15 droites.

Les théorèmes relatifs aux suites récurrentes de cercles et de sphères sont aussi énoncés sans démonstration et l'on n'a rien trouvé à ce sujet dans les manuscrits.

On donne dans le plan deux cercles C et c (c intérieur à C); *on trace un cercle i_1 tangent à C et c, puis un deuxième cercle i_2 tangent à i_1, C et c; un troisième i_3 tangent à i_2, C et c, etc... Si, après u révolutions autour de c, on trouve un cercle i_n tangent au premier i_1, la chaîne des cercles inscrits se fermera toujours, quelle que soit la position du cercle initial i_1; pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit qu'il existe entre les rayons R et r des deux cercles donnés et la distance d de leurs centres, la relation:*

$$(R \mp r)^2 \mp 4\, R\, r \operatorname{tg}^2 \frac{u\pi}{n} = d^2.$$

Les signes inférieurs correspondent au cas où les cercles donnés C et c sont extérieurs l'un à l'autre. L'auteur donne aussi la condition de commensurabilité pour la chaîne correspondante des cercles $i_1, \ldots, i_n$ tracés sur une sphère (ou, ce qui revient au même, dans le plan non euclidien elliptique de Riemann). Il y a une relation analogue en géométrie non euclidienne hyperbolique. (Voir: Comm. Math. Helv., vol. 4, 1932, p. 99.)

Si l'on fait tourner chacun des cercles $i_1, i_2, \ldots, i_n$ autour d'un de ses diamètres, on a une série de sphères $s_1, \ldots, s_n$ formant une chaîne fermée. Il existe alors une deuxième série de sphères $S_1, \ldots, S_N$ dont chacune touche la précédente et toutes les sphères $s_1, \ldots, s_n$. Si la première chaîne se ferme après u tours avec la n^e sphère, la deuxième se ferme nécessairement aussi après U tours avec la N^e sphère, les quatre nombres u, n, U et N, étant liés par la relation

$$\frac{u}{n} + \frac{U}{N} = \frac{1}{2}$$

Les formules indiquées par Steiner (Œ. c. I, p. 225-227 et 455-458) peuvent être démontrées simplement à l'aide de l'inversion. (Voir: Comm. Math. Helv., vol. 11, 1938, p. 41-45.)

Un de nos anciens élèves, *A. Karam*, aujourd'hui professeur à l'Université d'Alexandrie (Egypte), a fait une étude systématique de ces 85 problèmes*. Les seuls qu'il n'a pas trouvés dans la littérature ou lui-même sont les trois suivants**:

N° 70: Quelles sont les propriétés des quadriques semblables passant par 4 ou 5 points de l'espace; trouver leur enveloppe, le lieu de leurs centres et de leurs foyers.

N° 76: Le nombre des faces d'un polyèdre étant donné, de quelle nature peuvent être ces faces et combien y a-t-il de polyèdres topologiquement différents?

---

* Thèse présentée à l'Ecole Polytechnique Fédérale, Zurich, 1939 (Leemann & Co.).

** La solution du no. 13 (cité comme problème non résolu) se trouve dans «Elemente der Math.», Bd. 2, p. 105.

Il n'y a qu'un seul tétraèdre, deux pentaèdres, sept hexaèdres, (Œ. c. I, p. 227). Quelle est la loi générale?

N° 77: Etant donné un polyèdre convexe quelconque, existe-t-il toujours (ou dans quel cas seulement) un polyèdre topologiquement équivalent que l'on peut inscrire ou circonscrire à une sphère (ou à une quadrique).

Le 23 décembre 1832, *Jacobi, Bessel* et *Neumann* font, à la faculté de philosophie de l'Université de Königsberg, la proposition suivante: «Wir beehren uns den Antrag zu machen, Herrn Jakob Steiner aus Bern, gegenwärtig Lehrer an der Berliner Gewerbeschule, aus Veranlassung seiner soeben erschienenen Schrift «Systematische Entwickelung...» die philosophische *Doctorwürde honoris causa* erteilen zu wollen. Der Verfasser, welcher längst an die Spitze derjenigen zu stellen ist, welche die Geometrie in der neuesten Zeit auf eine bisher nicht gekannte Höhe erhoben haben, hat bereits seit geraumer Zeit die größte Aufmerksamkeit aller Freunde dieser Disciplin auf sich gezogen, und mehrere seiner früheren Arbeiten sind gleich nach ihrem Erscheinen ins Französische übertragen worden. Es hat uns daher, bei den neuen Verdiensten, welche er sich durch die vorbenannte Schrift erworben hat, angemessen erschienen, daß unsere Fakultät ihm diese Anerkennung seines großen Talentes zu Teil werden lasse». Cette proposition fut acceptée par la faculté le 29 décembre 1832. De plus, le ministère conféra, au nom du roi, le titre de «*königlicher Professor*» à l'éminent géomètre; le 4 mai 1833, il reçoit la lettre suivante: «In Rücksicht auf den ausgezeichneten wissenschaftlichen Wert Ihrer «Systematischen Entwickelung» hat das Ministerium Allerhöchsten Ortes darauf angetragen, daß Ihnen das Prädikat eines Professors beigelegt werden möge. Es gereicht dem Ministerium zur besondern Genugthuung, Sie hierdurch benachrichtigen zu können, daß des Königs Majestät durch die Allerhöchste Cabinetsordre vom 20. April 1833 Ihnen dieses Prädikat zu verleihen geruht haben.»

Cependant, le travail intense des dernières années avait miné peu à peu la santé de Steiner; il demande aux autorités de la «Gewerbeschule» un congé de deux mois pour l'été 1833. Après 15 ans d'absence, il revient en Suisse et retrouve la maison paternelle qu'il avait quittée en mai 1814. A Berne, on parle de la création prochaine d'une Université; on lui fait même des propositions qui lui aideront à préparer sa carrière académique. De retour à Berlin, il se remet vite au travail et déjà le 26 septembre 1833, il envoie au ministre son nouveau mémoire: «*Die geometrischen Constructionen, ausgeführt mittels der geraden Linie und eines festen Kreises*» (Œ. c. I, p. 461-522).

Le mathématicien italien *Mascheroni* avait montré que tous les problèmes géométriques des degrés un et deux peuvent être résolus à l'aide du *compas seul.* Steiner fait voir dans son travail que ces problèmes peuvent se résoudre à l'aide de la *règle seule,* si l'on donne dans le plan un cercle fixe quelconque avec son centre.

Après avoir indiqué les solutions de huit problèmes fondamentaux, il donne au lecteur les directives qui lui permettront de résoudre lui-même une série de problèmes plus compliqués.

Le ministre demande l'avis de Crelle sur ce nouveau mémoire. Le rapport détaillé du 2 novembre 1833 se termine par un vœu déjà formulé par Crelle après la publication de la « Systematische Entwickelung ». Il désire que Steiner soit bientôt débarrassé de son travail scolaire et qu'il ait l'occasion de continuer l'œuvre scientifique si brillamment commencée.

Le décès du professeur Oldmann et le départ de Plücker pour Halle semblent donner à Steiner la chance de pouvoir enfin commencer sa carrière universitaire, mais il faut attendre encore.

Sur la proposition de Crelle et de Dirichlet, Steiner est nommé à l'unanimité *membre de l'Académie des Sciences de Berlin* le 5 juin 1834. Il reçoit enfin, le 8 octobre 1834, grâce aux démarches réitérées de Crelle, sa nomination de *professeur extraordinaire à l'Université* de Berlin.

Toutefois, les autorités de la Gewerbeschule lui demandent de consacrer encore quelques heures à cette Ecole jusqu'au 31 mars 1835, pour qu'il puisse préparer son successeur; celui-ci fut aussi un mathématicien distingué: *Grassmann* (1809-1877), l'auteur de l'« Ausdehnungslehre », qui partage avec *Riemann* (1826-1866) et *Schläfli* (1814 à 1895) l'honneur d'avoir créé la géométrie à un nombre quelconque de dimensions. D'autre part, le *calcul vectoriel* a pris naissance dans les travaux presque simultanés de *Hamilton* (1843) et de *Grassmann* (1844).

En janvier 1834, Steiner a trouvé une démonstration géométrique très simple d'un théorème de *Poisson* relatif à *l'attraction d'une couche ellipsoïdique sur un point extérieur P;* cette attraction est dirigée suivant l'axe du cône de sommet P circonscrit à l'ellipsoïde (Œ. c. II, p. 3-5).

A la fin de l'année 1834, deux mois après le commencement de son activité à l'Université, il publiait déjà quatre travaux; les uns, arithmétiques, sur la sommation de certaines séries et sur un *nouveau théorème relatif aux nombres premiers* (Œ. c. II, p. 7-12), qui contient un résultat de Lagrange comme cas particulier — les autres, géométriques, sur les *propriétés de la lemniscate* et sur des questions d'extremum qu'il reprendra plus tard.

Les deux cours que Steiner a fait le plus souvent à l'université de Berlin ont été publiés en 1867, quatre ans après sa mort, chez Teubner, à Leipzig. Ils sont intitulés: «*Vorlesungen über synthetische Geometrie*» et ont été rédigés, le premier par *Geiser:* « Theorie der Kegelschnitte in elementarer Darstellung », le second, de 564 pages, par *Schröter;* il peut être considéré comme une suite de la « Systematische Entwickelung »; il contient, entre autres, la démonstration des propriétés de l'hexagramme mystique. Le dernier paragraphe est consacré au *réseau de coniques;* le lieu des points doubles des coniques dégénérées du réseau est une courbe du troisième degré, la «*Tripelkurve*» de Steiner, cas particulier le plus simple des figures covariantes du plan et de l'espace que l'on trouvera plus tard dans la théorie des courbes et des surfaces algébriques.

Un autre cours important, que Steiner a fait plusieurs fois, en le complétant toujours, de 1836 à 1840, est intitulé «*Maxima und Minima*». Parmi les manuscrits de Berne, on a trouvé, à ce sujet, un cahier daté du semestre d'hiver 1838/39, écrit avec soin par un de ses auditeurs, Hans Georg von Wyss, qui fut plus tard professeur d'histoire à l'Université de Zurich.

Steiner a présenté ses premiers résultats à l'Académie des Sciences de Berlin le premier décembre 1836; le résumé de sa communication a été publié dans le journal de Crelle, t. 18, p. 281-296 (Œ. c. II, p. 77-91) sous le titre «*Einfache Beweise der isoperimetrischen Hauptsätze*». Son but est de démontrer par la géométrie seule que, parmi toutes les figures planes (ou sphériques) de même surface, le cercle a le plus petit périmètre, et parmi tous les corps de même volume, la sphère a la plus petite surface; inversement, parmi toutes les figures de même périmètre, le cercle a la plus grande surface et, parmi tous les corps de surface donnée, la sphère a le plus grand volume.

Le point de départ des démonstrations est élémentaire: Dans le plan, par exemple (et sur la sphère), c'est le théorème: De tous les triangles de même base et de surface donnée, le triangle isocèle a le plus petit périmètre; ou bien, si l'on donne deux côtés a, b d'un triangle plan, sa surface est la plus grande quand l'angle compris entre a et b est droit; sur la sphère, la surface du triangle est maximum lorsque l'angle compris entre a et b est égal à la somme des deux autres angles.

Par une chaîne de raisonnements simples, Steiner arrive alors aux théorèmes isopérimétriques principaux et à une quantité d'autres résultats nouveaux dont la démonstration analytique serait difficile.

Il a profité d'un semestre de congé (hiver 1840-41) pour rédiger son travail: «*Über Maximum und Minimum bei den Figuren, in der Ebene, auf der Kugelfläche und im Raum überhaupt*» (Œ. c. II, p. 177-308). Il en a présenté une traduction française à l'Académie des Sciences de Paris le 15 mars 1841; la commission (Cauchy, Sturm, Liouville) a reconnu la grande valeur scientifique de cet ouvrage; résumé dans les Comptes rendus de l'Académie, le travail a été publié en partie dans le Journal de Liouville (t. VI, p. 105-170).

Dirichlet a cependant fait observer à son ami qu'il admettait comme évidente l'existence d'une figure de surface maximum. Steiner sentait peut-être cette lacune; il a dit quelque part (Œ. c. II, p. 197, note) «der Beweis läßt sich sehr kurz führen, wenn man voraussetzt, daß es eine größte Figur geben müsse».

On peut voir dans le livre de *W. Blaschke* «Kreis und Kugel» (Veit, Leipzig, 1916) ce qui a été fait dans ce domaine depuis Steiner. D'autres travaux, encore plus récents, montrent que la moisson n'est pas terminée.

Dans le plan, le problème des isopérimètres s'exprime par l'inégalité*

$$L^2 - 4\pi F \geq 0,$$

---

* Généralisée pour les surfaces ouvertes à courbure positive dans la thèse de doctorat E. P. F. de Fiala (Comm. Math. Helv., vol. 13 [1941], p. 293-346).

où L est le périmètre et F la surface d'une courbe plane fermée; le signe $=$ n'est valable que pour le cercle.

Dans l'espace, on a la formule analogue pour un corps de surface S et de volume V:

$$S^3 - 36\,\pi\,V^2 \geqq 0$$

le signe $=$ n'étant valable que pour la sphère.

Dans son beau travail sur les corps convexes, intitulé «Volumen und Oberfläche» (Math. Ann. 57, p. 447-495, Gesammelte Abhandlungen II, p. 230-276), *Minkowski* a trouvé les deux nouvelles inégalités:

$$S^2 - 3\,V\,M \geqq 0$$
$$M^2 - 4\,\pi\,S \geqq 0$$

où M désigne l'intégrale de la courbure moyenne sur toute la surface du corps; elle a été rencontrée par Steiner dans sa note: «Über parallele Flächen» (Œ. c. II, p. 173-176) présentée à l'Académie des Sciences de Berlin le 14 mai 1840; la formule (7) de la page 176 donne l'accroissement du volume $(Sd + Md^2 + \frac{4\,\pi}{3}\,d^3)$ quand on passe du corps donné à un corps parallèle extérieur à la distance d; elle joue un rôle important dans les recherches de Minkowski.

Le grand travail de Steiner: «*Von dem Krümmungs-Schwerpunkte ebener Curven*» (Œ. c. II, p. 97-159) est tout particulièrement intéressant. Pour en donner une idée et résumer en même temps d'autres recherches de l'éminent géomètre, on peut employer sa méthode caractéristique: le passage du simple au compliqué. Par un point quelconque P du plan d'un triangle, on mène les perpendiculaires à ses côtés; par les pieds A, B, C de ces trois perpendiculaires, on trace un cercle qui coupera de nouveau les mêmes côtés du triangle aux points A', B', C'; les perpendiculaires élevées à ces côtés par ces trois derniers points se coupent en un point P'. La correspondance involutive $P \rightleftarrows P'$ est quadratique; elle a quatre points doubles: les centres des quatre cercles inscrits au triangle. Deux points correspondants sont toujours les foyers réels d'une conique inscrite au triangle. (Œ. c. I, p. 189-210: Développement d'une série de théorèmes relatifs aux sections coniques.) Si P est sur le cercle circonscrit au triangle, les pieds A, B, C des trois perpendiculaires sont sur une droite d; le point correspondant P' est à l'infini; la conique est une parabole, d sa tangente au sommet. Par P, menons, du même côté des trois perpendiculaires, trois droites faisant respectivement le même angle α (différent de 90°) avec chacun des côtés du triangle; les trois points d'intersection $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{C}$ de chacune de ces droites avec les côtés correspondants du triangle seront encore en ligne droite; toutes les droites obtenues ainsi quand l'angle α varie, enveloppent la parabole de foyer P inscrite au triangle.

Quand P décrit le cercle circonscrit au triangle, la tangente d au sommet de la parabole enveloppe une courbe de troisième classe et du quatrième degré: *l'hypocycloïde à* *trois rebroussements** dont Steiner a trouvé les nombreuses propriétés (Œ. c. II, p. 641 à 647) avec l'aide de son ami *Schläfli*. L'enveloppe des axes des paraboles inscrites à un triangle est aussi une hypocycloïde à trois rebroussements; il en est de même de l'enveloppe des asymptotes (et de celle des axes) de toutes les hyperboles équilatères circonscrites à un triangle.

Si le point P n'est pas sur le cercle circonscrit, son triangle podaire ABC a une surface différente de zéro; le lieu géométrique des points P tels que l'aire du triangle podaire ait une valeur donnée est un cercle de même centre que le cercle circonscrit au triangle donné.

En novembre 1825, Steiner avait déjà trouvé la démonstration du théorème analogue pour un polygone plan quelconque (Œ. c. I, p. 15/16). S désignant la surface du polygone podaire d'un point P par rapport à un polygone donné p, dont les angles sont $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots$, le lieu géométrique de tous les points P dont le polygone podaire a la surface constante S, est encore un cercle dont le centre M est indépendant de la surface S (ou de la position initiale de P). Ce point M est le centre de gravité d'un système de forces parallèles appliquées aux sommets du polygone donné p et respectivement proportionnelles à $\sin 2\alpha$, $\sin 2\beta$, $\sin 2\gamma$, $\sin 2\delta \ldots$ La surface S a une valeur extrême quand le point P vient en M; c'est un maximum ou un minimum suivant que la somme des $\sin 2\,(180^0 - \alpha)$ est négative (comme pour le triangle) ou positive. Si cette somme est nulle (comme pour le carré), la surface S a toujours la même valeur, quelle que soit la position de P.

Quand on passe à la limite, où le polygone devient une courbe plane fermée convexe, c, les forces parallèles appliquées en chaque point de c sont proportionnelles aux *courbures* correspondantes; le point M est leur centre de gravité; Steiner l'appelle pour cette raison «Krümmungs-Schwerpunkt» de la courbe c.

Ce point M jouit des propriétés suivantes:

1° La surface S_M de sa podaire par rapport à la courbe c est un minimum; pour un autre point P, la surface S_P de la podaire est égale à $S_M + \frac{1}{2}\pi \overline{PM}^2$.

2° Si la courbe c roule sans glisser sur une *droite* fixe d et fait une révolution complète, le point M décrit la courbe qui limite, avec d et les deux rayons de contact, la surface la plus petite F_M; pour un autre point P, la surface F_P limitée par sa trajectoire, la droite d et les deux rayons de contact, est égale à $F_M + \pi\,\overline{PM}^2$.

L'auteur fait de nombreuses applications de ces deux résultats fondamentaux. Il examine aussi le cas où la courbe c roule sur une *courbe* fixe quelconque.

Steiner est revenu souvent à l'*étude des coniques;* il en a trouvé bien des propriétés nouvelles; il serait trop long de les énumérer toutes. Dans le travail «*Elementare Lösung einer geometrischen Aufgabe und über einige damit in Beziehung stehende Eigenschaften*

---

* Clebsch, Cremona, Battaglini, Painvin, Laguerre se sont occupés de cette courbe. Pour sa généralisation dans l'espace non euclidien à n dimensions, voir Sydler, Comm. Math. Helv., vol. 19, p. 161-214 (Thèse de doctorat E. P. F. Zurich, 1946).

der Kegelschnitte » (Œ. c. II, p. 389 - 420), il y a, entre autres, ce théorème: *Parmi tous les quadrilatères convexes inscrits à une ellipse e, il y en a une infinité dont le périmètre est maximum; ils enveloppent une deuxième ellipse e', homofocale à la première. Ces mêmes quadrilatères ont le plus petit périmètre parmi tous ceux qui sont circonscrits à la deuxième ellipse e'. Ces quadrilatères extrêmes sont tous des parallélogrammes; les tangentes à l'ellipse e en leurs sommets forment des rectangles inscrits au cercle orthoptique de e.*

Le géomètre français *Faure* a noté en 1860 (Nouv. Ann. Math., t. 19, p. 234) l'énoncé suivant sur le cercle orthoptique d'une conique quelconque: « *Les cercles harmoniquement circonscrits à une conique en coupent orthogonalement le cercle orthoptique.* » Sous le titre: « Der neueste Satz », on a trouvé, dans un manuscrit de Steiner de 1845, ce même théorème et sa généralisation projective dans le plan et dans l'espace.

Parmi la double infinité de cercles harmoniquement circonscrits à une conique, il y en a une simple infinité qui touche la conique; le diamètre de chacun de ces cercles est égal (mais opposé) au rayon de courbure de la conique au point de contact. Ce résultat est énoncé sans démonstration par Steiner (Œ. c. II, p. 342). On peut le généraliser dans l'espace à n dimensions (Comm. Math. Helv., vol. 13, 1940, p. 110) et montrer qu'il n'appartient qu'aux variétés du second ordre.

Une conséquence presque immédiate du théorème de Faure est le suivant, dû à Steiner: « *Le lieu des centres des coniques inscrites à un triangle et telles que la somme des carrés de leurs axes ait une valeur donnée est un cercle dont le centre est l'orthocentre du triangle.* »

Au début d'un travail rédigé en italien: « *Teoremi relativi alle coniche inscritte e circoscritte* » (Œ. c. II, p. 329 - 337), Steiner donne, sans démonstration, deux formules exprimant l'aire d'une ellipse déterminée par son centre et trois points (ou trois tangentes); parmi les nombreuses applications de ces formules* (voir aussi Œ. c. II, p. 669 - 682), il y a la construction simple du *centre de l'ellipse d'aire maximum inscrite à un quadrilatère;* c'est un problème qui avait déjà préoccupé Euler et Gauss.

D'autres théorèmes et problèmes relatifs aux coniques se trouvent en grand nombre dans les mémoires suivants:

1. « *Über einige neue Bestimmungs-Arten der Curven zweiter Ordnung nebst daraus folgenden neuen Eigenschaften* » (Œ. c. II, p. 445 - 468). Les foyers sont remplacés par deux cercles quelconques bitangents à la conique.

2. « *Allgemeine Betrachtungen über einander doppelt berührende Kegelschnitte* » (p. 469 - 483).

3. « *Geometrische Betrachtungen und Lehrsätze* », œuvre posthume, communiquée par C. F. Geiser, d'après les manuscrits de l'auteur.

Dans le mémoire 1, je note le résultat de la page 467: « *Les droites qui coupent deux cercles donnés suivant des cordes dont le rapport k est constant, enveloppent une conique du faisceau tangentiel déterminé par les deux cercles.* »

Lorsque k varie, on obtient toutes les coniques du faisceau. Leurs foyers forment une involution dont les points doubles sont les centres O et O' des deux cercles; si ce sont

* Voir la démonstration: Comm. Math. Helv., vol. 16 (1943), p. 60-64.

les foyers imaginaires qui sont sur la ligne des centres, les foyers réels correspondants sont sur le cercle de diamètre OO'.

Ce théorème est déjà énoncé dans un manuscrit de Steiner de février 1825; il note à ce propos:

«Diesen Satz habe ich bereits im Jahre 1827 mit einer Reihe anderer Sätze dem Herausgeber der Annales de Mathématiques nach Montpellier übersandt, welcher ihn später — vielleicht durch Versehen — unter dem Namen eines anderen abdrucken ließ.»

Dans le cas particulier où $k = 1$, on voit que:

L'enveloppe des droites qui déterminent sur deux cercles donnés des cordes égales, est une parabole ayant pour tangente au sommet l'axe radical des deux cercles et pour foyer le milieu de OO'. La rotation autour de OO' montre que: Tous les plans coupant deux sphères suivant des cercles égaux enveloppent un paraboloïde de révolution qui touche les deux cônes tangents aux sphères.

La note présentée à l'Académie des Sciences de Berlin le 27 novembre 1845 est consacrée aux *courbes du troisième degré* (Œ. c. II, p. 369-373: «Geometrische Lehrsätze»); il en est de même des problèmes et théorèmes (Œ. c. II, p. 486-492) et du travail «Sätze über Curven zweiter und dritter Ordnung» (Œ. c. II, p. 375-380). Voici deux de ces théorèmes:

1. Une cubique plane contient en général 27 points (9 réels et 18 imaginaires) où une conique peut avoir un contact de cinquième ordre avec la courbe*. L'équation du 27^e degré qui détermine ces points est toujours résoluble algébriquement.

2. Le deuxième est un des nombreux théorèmes de fermeture (Schließungssätze) de Steiner:

On part d'un point quelconque P de la cubique c_3; on peut alors trouver un point Q de c_3 (même plusieurs) tel que le polygone suivant se ferme: Soit A_1 un point quelconque de c_3; la droite PA_1 coupe encore c_3 en un point B_1; on trace la droite QB_1 qui coupe encore c_3 au point A_2; la droite PA_2 coupe c_3 en B_2; puis QB_2 coupe c_3 en $A_3, \ldots,$ etc. On obtient ainsi un polygone $A_1 B_1 A_2 B_2 A_3 B_3 \ldots$ inscrit à c_3 dont les côtés passent alternativement par P et Q; s'il se ferme une fois par un choix convenable de Q, il se fermera toujours avec le même nombre de côtés, quelle que soit la position initiale du premier sommet A_1.

Steiner montre comment on doit choisir le point Q pour que le polygone fermé soit un quadrilatère, un hexagone ou un décagone.

Il y a un théorème analogue pour une courbe du quatrième degré de genre un, les points P et Q étant les deux points doubles de la courbe.

Ces théorèmes ont donné lieu ensuite à des travaux de *Clebsch* (Crelle 63, p. 94-121); *Weyr* (Crelle 71, p. 18-23 et 73, p. 87-93), *Hurwitz* (Math. Ann. 15, p. 8-15, Math. Werke, Bd. 2, p. 682 et 693), *Schröter* (Theorie der ebenen Kurven 3. Ordnung, p. 256).

---

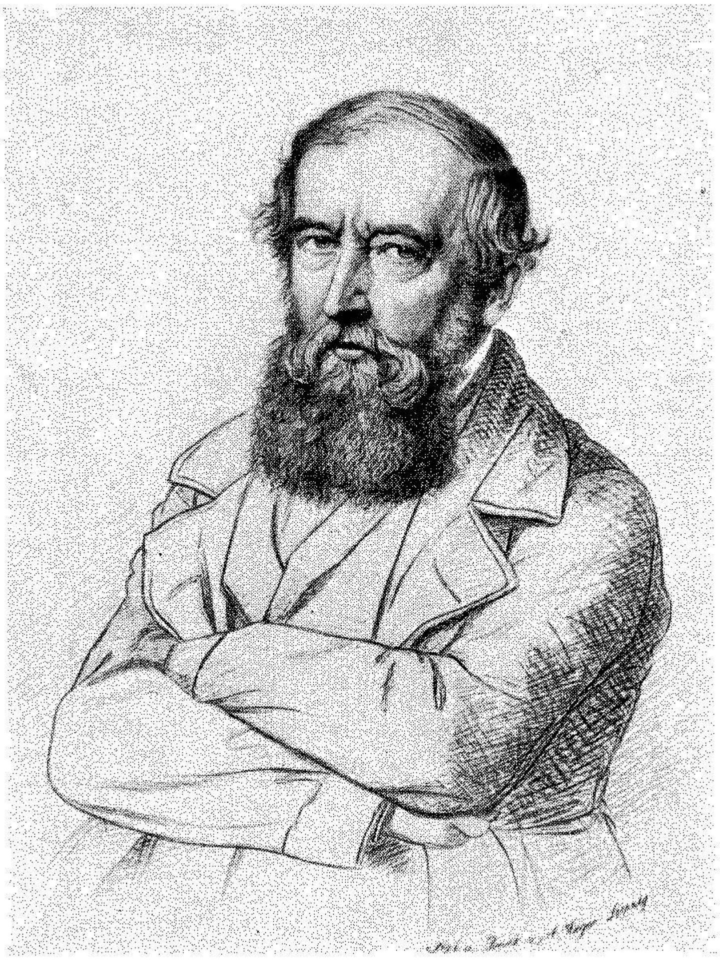
* Hesse l'a démontré analytiquement (Crelle 36, p. 273) et Weyr (Crelle 71, p. 16) par une méthode synthétique.

Voici une remarque complémentaire tirée d'un manuscrit du 10 juillet 1845; nous la publions en fac-similé de l'écriture de Steiner:

Die obigen Sätze finden ferner auf ganz analoge
Weise statt, wenn in der Curve dritter Ordnung
C_3 drei beliebige feste Punkte A, B, C angenommen
werden und dann durch dieselben und abwech-
selnd durch die Punkte P und Q Kegelschnitte
legt, und mittelst dieser die Punkten-Reihe $A_1 B_1$
$A_2 B_2 A_3 B_3$ .... auf der Curve C_3 construirt. Nämlich
das Gesetz ist hierbei genau dasselbe: die Reihe
ist commensurabel oder incommensurabel,
und dann bleibt sie von gleicher Art und im
ersteren Falle behält sie stets die nämliche Punk-
tenzahl, es mag der erste Punkt A_1 in der Curve
angenommen werden, wo man will. — Eben so
verhält es sich, wenn man in einer Curve
vierter Ordnung, welche P und Q zu Doppel-
punkten hat, drei beliebige feste Punkte A, B,
C annimmt und durch diese und abwechselnd
durch P und Q Kegelschnitte legt, und mittelst
der letzteren auf der Curve die Punkten-Reihe
$A_1 B_1 A_2 B_2$ .... bestimmt; u. s. w. —

Ce résultat se ramène au précédent par une transformation quadratique dont les points fondamentaux sont A, B, C.

A propos de ces théorèmes, *Clebsch* écrit dans son mémoire «Über die Anwendungen der Abelschen Funktionen in der Geometrie» (Crelle 62, p. 189): «Daß Steiner diesen Beziehungen nachzugehen gewußt hat, und daß viele von ihm gelöste Probleme durch die Theorie der elliptischen Funktionen erst ihre wahre analytische Ausdrucksweise finden, ist nicht die geringste der merkwürdigen Tatsachen, welche uns beim Studium der Schriften dieses großen Geometers mit stets wachsender Bewunderung erfüllen.»



En octobre 1852, Steiner a publié une étude remarquable *sur la configuration des 28 tangentes doubles des courbes planes du quatrième degré.* Après bien des tentatives, Jacobi a pu déterminer analytiquement le nombre de ces tangentes doubles (Crelle 40, p. 237). Steiner a trouvé synthétiquement leurs relations mutuelles (C. R. Acad. Sc. Paris, 25 juillet 1853; Crelle 49, p. 265-272; Œ. c. II, p. 603-615).

Les 28 tangentes doubles sont arrangées par groupes de six couples tels que les huit points de contact des tangentes de deux couples quelconques d'un même groupe soient sur une conique. On a ainsi 63 groupes, les six couples d'un même groupe n'ayant aucune tangente commune. De plus, on peut faire correspondre à chaque groupe deux courbes covariantes, l'une du troisième degré et l'autre de la troisième classe; ces deux courbes ont entre elles des relations intéressantes.

Les théorèmes de Steiner (dont nous n'avons cité que les plus simples) ont étonné les mathématiciens; ils ont donné lieu à de nombreuses publications. Les plus importantes sont celles de *Hesse* (Crelle 49 et 52), *Aronhold* (Monatsber. Berliner Akad., 1864), *Clebsch* (Crelle 63), *Geiser* (Math. Ann. 1, et Crelle 72), *Cayley* (Crelle 68), *Salmon* (Higher plane curves). Plus tard, la théorie des tangentes doubles a été mise en rapport avec celles des fonctions abéliennes par *Riemann* (Ges. math. Werke, 2. Aufl. 1892, XXXI, aus dem Nachlaß), *Weber* (Theorie der Abel'schen Functionen vom Geschlecht drei, Berlin 1876), *Frobenius* (Crelle 99 et 103).

Le côté algébrique de la question a été traité par *Weber* (Math. Ann. 23: Über die Galois'sche Gruppe der Gleichung 28. Grades von welcher die Doppeltangenten einer Curve vierter Ordnung abhängen); il consacre un chapitre spécial à ce sujet dans son traité d'algèbre (Heinrich Weber, Lehrbuch der Algebra, 2. Band, 1899, p. 419-469).

L'étude des dépendances mutuelles des tangentes doubles des courbes du quatrième degré a aussi conduit Steiner à un problème compliqué *d'analyse combinatoire* dont il a indiqué les premiers résultats dans le tome 45 du Journal de Crelle (Œ. c. II, p. 435 à 438).

Dans la riche et intéressante correspondance entre Steiner et Schläfli (1848-1856), publiée par Graf chez K. J. Wyss, à Berne, en 1896, Steiner pose le problème sous la forme suivante:

«On a N points 1, 2, 3, ... dans un plan. Quelle doit être la forme du nombre N pour que ces points puissent être joints trois à trois en triangles tels qu'un couple quelconque de points appartiennent *toujours* à un triangle et à *un seul*?»

Il ajoute que N doit être de l'une des deux formes $6n+1$ ou $6n+3$ et que le nombre des triangles est $\frac{N(N-1)}{6}$.

Pour $N = 7$, il n'y a qu'*un système de triples* de Steiner:

$$123,\ 145,\ 167,\ 246,\ 257,\ 347,\ 356.$$

Il en est de même pour $N = 9$. Il y a deux systèmes différents pour $N = 13$. Leur nombre augmente rapidement avec N. La détermination générale du nombre de systèmes différents pour chaque N n'est pas encore résolue.

S. Bays a publié plusieurs mémoires sur les systèmes *cycliques* de triples de Steiner différents pour N premier (ou puissance de nombre premier) de la forme $6n+1$. On trouvera l'historique de cette question et les résultats obtenus dans les volumes 2, 3, 4 et 6 des Commentarii Mathematici Helvetici.

Le problème des triples n'est que le premier échelon du problème plus général des quadruples, quintuples, .. posé par Steiner; il n'a pas été, à ma connaissance, l'objet de recherches dépassant les résultats de l'auteur et ceux de *Bays* et *de Weck* sur les quadruples (Comm. Math. Helv., vol. 7).

Jacobi (1804-1851) et *Dirichlet* (1805-1859) auraient désiré que leur ami Steiner mît son grand talent au service d'autres parties des mathématiques: théorie des nombres, mécanique, théorie des fonctions, etc.; l'étude des fonctions abéliennes aurait pu lui rendre de grands services; les fonctions elliptiques (appliquées à la géométrie par Jacobi et Clebsch) s'imposent dans l'étude analytique des courbes algébriques de genre un. *Poincaré* a résolu plus tard le problème général de l'uniformisation des courbes algébriques de genre quelconque à l'aide de ses fonctions fuchsiennes. Mais, à quelques rares exceptions près, Steiner est resté fidèle à sa géométrie.

Dans un de ses mémoires les plus importants, il étudie les *propriétés générales des courbes algébriques planes de degré n* (Œ. c. II, p. 493-509).

Il définit d'abord les différentes *polaires* d'un point P et leurs *enveloppes* quand P décrit une courbe, puis les *polaires mixtes* de deux points P et Q.

Si Q est sur la $x^{\text{ème}}$ polaire de P, la $(n-x)^{\text{ème}}$ polaire de Q passe par P. Les *points doubles des polaires* jouent un rôle essentiel: Si la $x^{\text{ème}}$ polaire de P a un point double en Q, la $(n-x-1)^{\text{ème}}$ polaire de Q a un point double en P. Pour $x=1$, on a les courbes covariantes que Steiner appelle « *konjugierte Kernkurven* »: le lieu (P) des points P dont les premières polaires (par rapport à la courbe donnée c_n) ont un point double Q, et le lieu (Q) de ces points doubles Q. La première courbe (P) se nomme aujourd'hui la *steinerienne* de c_n; son degré est $3(n-2)^2$ et sa classe $3(n-1)(n-2)$. La seconde (Q), la *hessienne** de c_n, a le degré $3(n-2)$ et passe par les $3n(n-2)$ points d'inflexion de c_n, tandis que la steinerienne touche les tangentes d'inflexion. L'enveloppe des droites joignant les paires de points correspondants P et Q est la *cayleyenne*** de c_n.

Comme les coniques sont engendrées par deux faisceaux projectifs de droites, les courbes algébriques quelconques peuvent être engendrées à l'aide de faisceaux de courbes de degré inférieur. Toutes les c_n passant par $\frac{1}{2}n(n-3)-1$ points donnés forment un faisceau et passent nécessairement encore par $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ autres points.

Bien des résultats importants sont encore énoncés sans démonstration dans ce mémoire fondamental.

Par exemple: Une courbe plane donnée c_m de degré m peut être tangente aux courbes c_n d'un faisceau $f(c_n)$ en $m(m+2n-3)$ points qui sont avec les $3(n-1)^2$ points doubles du faisceau sur une courbe algébrique du degré $(m+2n-3)$.

Si l'on a deux faisceaux de courbes algébriques dans un plan $f(c_m)$ et $f(c_n)$, le lieu des points de contact de deux courbes appartenant respectivement à chacun des faisceaux est une courbe du degré $2m+2n-3$; le nombre des points où deux courbes de chaque faisceau sont osculatrices est $3[(m+n)(m+n-6)+2mn+5]$.

Si l'on a trois faisceaux de courbes algébriques dans un plan $f(c_m)$, $f(c_n)$ et $f(c_p)$, le nombre des points où trois courbes (appartenant respectivement à chacun des faisceaux) sont tangentes entre elles est, en général, égal à $4(mn+mp+np)-6(m+n+p-1)$.

Ces résultats, appliqués en particulier aux courbes du troisième et du quatrième degré, donnent de nombreuses propriétés nouvelles intéressantes.

Le mathématicien *Luigi Cremona* (1830-1903) qui fut professeur à l'Université de

---

* Hesse (1811-1874).
** Cayley (1821-1895).

Bologne, puis directeur de l'Ecole Polytechnique de Rome, continua l'œuvre de Steiner dans son « Introduzione ad una teoria geometrica delle curve piane » (Bologne 1862; Opere mat. t. I, p. 313-466). Il réussit à résoudre plusieurs des énigmes de celui qu'il appelait le « Sphinx ». Par sa théorie générale des transformations birationnelles (généralisations des transformations quadratiques de Steiner), il est devenu le chef de l'Ecole italienne de géométrie algébrique.

Une extension des idées de Steiner et de Hesse se trouve dans les « Leçons sur la Géométrie » de *Clebsch* (Vorlesungen über Geometrie, 1876, publiées par Lindemann [Teubner] et traduites en français par Benoist en 1879/80). Elles contiennent aussi une introduction à la théorie des formes algébriques et une initiation aux travaux de *Brill* et *Nöther* sur les applications des fonctions algébriques à la géométrie (Gött. Nachr., 1873, et Math. Ann. 7, p. 269).

Dans un grand mémoire, Steiner applique sa méthode générale aux *courbes algébriques ayant un centre* (Œ. c. II, p. 501-596).

Il résoud aussi le *problème des normales* menées d'un point P à une courbe c_n et à une surface algébrique s_n d'ordre n. Les pieds des $n\,(n^2 - n + 1)$ normales menées de P à s_n sont sur une courbe gauche d'ordre $(n^2 - n + 1)$, lieu des points P' pour lesquels le plan polaire par rapport à s_n est perpendiculaire à la droite PP' (Œ. c. II, p. 621-637).

En s'occupant de problèmes plus difficiles, Steiner sentit souvent le besoin de faire contrôler ses résultats par un analyste. Ce fut d'abord Jacobi qui lui rendit ce service. Plus tard, il demanda à Schläfli de rédiger avec lui une théorie générale des *surfaces algébriques* (Briefwechsel, p. 190), « wobei aber doch meine Schulmeister-Methode befolgt würde, was ohne Zweifel später auch Ihre eigenen Arbeiten etwas herablassender gestalten und sie dem Publikum leichter und zugänglicher machen müßte ».

Ils avaient déjà trouvé bien des résultats nouveaux. L'éditeur Reimer était disposé à publier cette œuvre commune. Il est très regrettable que ce beau projet n'ait pas pu se réaliser.

Cremona a comblé cette lacune dans ses « Preliminari di una teoria geometrica delle superficie » (Bologne, 1866; Opere mat. II, p. 279-387)*.

La collaboration Steiner-Schläfli a été plus efficace dans l'étude des *surfaces générales du troisième degré* (Œ. c. II, p. 651-659, et Briefwechsel). Steiner a trouvé quatre manières différentes de les engendrer, ainsi que de nombreuses propriétés: la configuration des 27 droites, les 45 systèmes de quadriques coupant la surface suivant quatre coniques, etc... Schläfli a découvert son fameux double-six. Il écrit à Steiner le 2 mai 1854: « Wie gefällt Ihnen dieser Doppelsechser? Zwölf Strahlen bilden ein an sechs

* Voir aussi L. Pauli: Sur les polaires des courbes planes, des surfaces et des hypersurfaces algébriques. Thèse de doctorat E. P. F. Zurich 1936.

Stellen schadhaftes Gitter». Schläfli a fait une classification des différentes surfaces du troisième degré.

Cayley, Sylvester, Salmon, Cremona, R. Sturm, ... se sont aussi occupés de la surface. Clebsch et Jordan ont étudié l'équation algébrique dont dépendent les 27 droites et sa réduction quand on connaît une ou deux des racines. *Geiser* (1843-1934) a trouvé la relation simple qui existe entre ces 27 droites et les 28 tangentes doubles des courbes planes du quatrième degré (Math. Ann. I, p. 129-138).

Pendant son voyage à Rome en 1844 avec Dirichlet, Jacobi, Schläfli et Borchardt*, Steiner a trouvé (par des considérations simples) sa célèbre «*Römerfläche*» (Œ. c. II, p. 723/724); c'est une *surface de quatrième degré et de la troisième classe* qui a inspiré plus tard bien des mathématiciens: Kummer, Weierstrass, Clebsch, Kronecker, Schröter en Allemagne, le Norvégien Sophus Lie, l'Anglais Cayley, les Français Laguerre, Darboux, Picard, les Italiens Guccia, Castelnuovo, Beltrami, Cremona, Gerbaldi, Veronese.

Tous les plans tangents à la surface la coupent suivant une paire de coniques. Elle a trois droites doubles qui se réunissent en un point triple de la surface. Parmi les quatre points communs aux deux coniques situées dans chaque plan tangent, l'un est le point de contact, les trois autres sont respectivement sur chacune des droites doubles. Il y a quatre plans singuliers qui touchent la surface en chaque point d'une conique.

Weierstrass a montré que les coordonnées homogènes des points de la surface sont des formes quadratiques ternaires. *Cayley* et *Clebsch* ont trouvé qu'elle est la surface algébrique de genre zéro la plus générale dont les coordonnées jouissent de la propriété précédente.

Lie a démontré que le lieu des pôles d'un plan quelconque par rapport à toutes les coniques de la surface est encore une surface de Steiner. Les propriétés des courbes asymptotiques de la surface ont été étudiées par *Clebsch, Cremona, Laguerre.* Les 4 plans singuliers sont des plans stationnaires pour toutes les courbes asymptotiques.

Darboux a trouvé que les seules surfaces algébriques qui contiennent une double infinité de coniques sont les quadriques, les surfaces réglées du troisième ordre et la surface de Steiner.

D'après *Picard,* il n'y a pas d'autres surfaces algébriques non réglées que les quadriques et la surface de Steiner, dont toutes les sections planes sont unicursales.

Cette brève analyse n'a pas la prétention d'être complète; elle ne donne qu'une idée sommaire des nombreuses et belles découvertes de notre éminent compatriote.

On hésite à évoquer les dernières années du grand géomètre. Malgré les nombreuses cures qu'il faisait en été, sa santé devenait de plus en plus précaire; la force, la fantaisie, la mémoire diminuaient; il ne pouvait plus travailler que quelques heures par jour. Et il aurait eu encore tant de choses à mettre au point, à expliquer tant de résultats qu'il avait seulement énoncés!

---

* Successeur de Crelle comme rédacteur du «Journal für reine und angewandte Mathematik».

Le premier avril 1856, il demanda un congé de deux ans pour rédiger quelques travaux en Suisse, où deux de ses élèves, Schläfli et Sidler, se mettraient à sa disposition. Le congé lui fut accordé: mais il dut renoncer à l'aimable offre de ses amis; sa maladie l'empêcha de réaliser ses projets. Une première attaque en avril 1857 et une deuxième en novembre l'obligèrent à demander le prolongement de son congé jusqu'en octobre 1858. Pendant les semestres d'hiver suivants, il put encore faire ses cours à l'Université, mais il passa tous les étés en Suisse. En 1862, il n'est plus retourné à Berlin; le 25 novembre, il a fait écrire au ministre qu'à la suite d'une nouvelle attaque, il a été paralysé pendant deux mois. Il était alors à l'hôtel «Zum wilden Mann» à Berne. Plus tard, il a été transporté à la Kramgasse 162 (aujourd'hui n⁰ 38) où il est mort le 1er avril 1863, entre trois et quatre heures du matin, après avoir refusé obstinément l'aide d'un médecin.

Steiner est resté célibataire. Dans son testament, il a légué 750 francs à sa commune d'origine pour récompenser les meilleurs élèves en calcul mental, et 8000 «thaler» à l'Académie des Sciences de Berlin, dont l' intérêt devait être employé tous les deux ans pour un prix de géométrie. Il a été décerné à Schläfli le 31 octobre 1870.

L'Académie de Berlin a demandé à *Weierstrass*, en 1880, de publier les Œuvres de celui qu'on appelait alors le plus grand géomètre de son temps.

Aux travaux déjà imprimés dans les revues scientifiques, on a ajouté des remarques importantes de Weierstrass et deux communications de Geiser d'après des manuscrits de Steiner.

LOUIS KOLLROS, Zurich.

BIBLIOGRAPHIE

Jacob Steiner's Gesammelte Werke, Bd. 1 (1881), Bd. 2 (1882). Berlin, G. Reimer.

Jakob Steiner. Allgemeine Theorie über das Berühren und Schneiden der Kreise und der Kugeln. Zürich und Leipzig, Orell Füssli, 1931.

O. Hesse. Jakob Steiner. Crelle 62 (1863), p. 199.

C. F. Geiser. Zur Erinnerung an Jakob Steiner. Schaffhausen, Gelzer, 1874.

F. Bützberger. Zum 100. Geburtstage Jakob Steiners. Zeitschr. math. Unterricht XXVII, 3, 1896.

F. Bützberger. Über bizentrische Polygone, Steinersche Kreis- und Kugelreihen und die Erfindung der Inversion. Teubner, 1913.

J. H. Graf. Der Briefwechsel Steiner-Schläfli. Bern, K. J. Wyss, 1896.

J. H. Graf. Der Mathematiker Jakob Steiner von Utzenstorf. Bern, K. J. Wyss, 1897.

J. Lange. Jacob Steiners Lebensjahre in Berlin. Berlin, R. Gaertners, 1899.

Große Schweizer (Atlantis-Verlag 1938, M. Hürlimann), note de *R. Fueter* (p. 503-506).

Le portrait de la première page (Steiner à environ 30 ans) est emprunté à ce dernier ouvrage: «Große Schweizer».

Le portrait de la page 19 (Steiner à environ 60 ans) est extrait du tome 1 des Œuvres complètes.

48, 74, Verf