Leonhard Euler

Autor(en): **Fueter, Rudolf**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik (Beihefte zur Zeitschrift)**

Band (Jahr): **3/4/5 (1948)**

PDF erstellt am: **06.08.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-3640

Leonhard Euler

Leonhard Euler würden wir heute als den prominentesten Auslandsschweizer bezeichnen. Aber während der Auslandsschweizer im wesentlichen materielle Produkte unseres Landes in fremden Ländern verbreitet, so waren es zu Eulers Zeit rein geistig-wissenschaftliche Güter, die er von Basel nach Rußland und Berlin mitbrachte. Es war die weltberühmte mathematische Basler Schule der Bernoulli und anderer, die Euler nach St. Petersburg verpflanzen sollte, und der er es verdankte, schon in jungen Jahren in der Akademie des Zarenhofes eine glänzende Stellung zu erhalten. Euler war nicht nur als Basler unser größter Landsmann des 18. Jahrhunderts, sondern er brachte auch Schweizer Wissenschaft mit sich, die er im Ausland zu größter Blüte erhob. Von diesem Gesichtspunkt aus wäre es grundfalsch, etwa die engen einheimischen Verhältnisse dafür verantwortlich zu machen, daß Euler nie mehr in seine Vaterstadt zurückkehrte, mit der er übrigens innerlich stets aufs engste verbunden blieb.

Diese Basler Schule war von jeher durch ihre Universalität ausgezeichnet, allerdings einer Universalität, wie sie für das 18. Jahrhundert bezeichnend ist. Schon die Bernoullis hatten sich mit allen Problemen der damaligen Zeit beschäftigt, von den tiefsten philosophischen Gedanken bis zur Technik etwa des Schiffbaus. Euler hat dieses Allumfassende ins Ungeheure gesteigert. Er beherrschte die Quintessenz seines Jahrhunderts in unerreichter Vollkommenheit. Nichts ist dafür bezeichnender als sein 1768 erschienenes Werk «*Lettres à une princesse allemande sur divers sujets de physique et de philosophie*» (Opera omnia, series III, vol. 11 u. 12), in dem er in seiner unerreichten Klarheit alle brennenden Fragen seines Jahrhunderts behandelt. Es mußte nicht nur in der Originalfassung neu aufgelegt werden, sondern wurde 1768 ins Russische, 1769 ins Deutsche, 1785 ins Holländische, 1786 ins Schwedische, 1787 ins Italienische, 1792 ins Dänische, 1795 ins Englische und 1798 ins Spanische übersetzt.

Man hat den Mathematikern oft Einseitigkeit, bedingt durch eine einseitige Begabung, vorgeworfen; wohl mit Unrecht! Denn abgesehen von Euler zeigt die Geschichte der Wissenschaft, daß gerade Mathematiker dank ihrer Wissenschaft zu größter Vielseitigkeit befähigt sind. Man denke an den Philosophen und Mathematiker *Plato*, den Mathematiker, Physiker und Ingenieur *Archimedes* im alten Griechenland; oder an den Künstler, Mathematiker und Ingenieur *Leonardo da Vinci*, den Parlamentsrat und Mathematiker *Fermat*, den Staatsmann, Philosophen und Mathematiker *Leibniz* oder den General, Minister und Mathematiker *Carnot* in der Neuzeit. Sie alle haben die universelle Bedeutung der Mathematik als grundlegende Wissenschaft erwiesen, die durch ihre Begriffsbildung jene Fundamente schafft, auf der sich alle Erkenntnis der Umwelt aufbaut.

Die Darstellung des Lebenswerkes Eulers muß von dieser Tatsache ausgehen, ja sie wird sie aufs neue erhärten. Kein Wunder, daß die *Opera omnia Leonhardi Euleri*, die im Erscheinen begriffen sind, 80 Quartbände verlangen. Aber auch die Forschung eines Mathematikers ist aufs engste verknüpft mit seinem *äußern* Lebensgange. Beide können nicht getrennt werden, sondern müssen in inniger Gemeinsamkeit dargestellt werden. Wir werden sehen, wie gerade das Schicksal des Eulerschen Lebensweges es war, das ihn zu seiner Universalität führen mußte. Sein Leben und sein Werk durchdringen sich gegenseitig; die folgenden Ausführungen sind in diesem Sinne aufzufassen.

Jugendzeit

Euler wurde am 15. April 1707 in Basel als Sohn des Pfarrers zu St. Jakob *Paul Euler* und seiner Frau *Margareta Brucker* geboren. Sein Vater wurde binnen Jahresfrist nach Riehen bei Basel versetzt, wo Euler seine Jugendjahre verlebte. Das für die Entwicklung des Menschen so bestimmende Milieu, in dem er aufwuchs, war, ähnlich wie bei Mozart, wie geschaffen, um ihn für sein Lebenswerk vorzubereiten. Sein Vater hatte selbst größtes Interesse für Mathematik und hatte einst bei *Jakob Bernoulli* (1654—1705) eifrig und mit Erfolg mathematische Vorlesungen besucht. Seine Mutter entstammte einer alten Basler Gelehrtenfamilie. Die Eltern waren mit dem Basler Mathematiker *Hermann*, sowie mit dem um 13 Jahre jüngern Bruder Jakob Bernoullis, *Johann Bernoulli* (1667 bis 1748), befreundet. Die erste Einführung in die Mathematik empfing Euler von seinem Vater selbst. Dann durchlief er Basels Schulen und immatrikulierte sich, vierzehnjährig, am 9. Oktober 1720 an der Basler Universität, und zwar an der philosophischen Fakultät. Damit folgte er einem damals allgemein üblichen Brauche. Den Lehrstoff, der heute in den obern Klassen der Mittelschule verlangt wird und über dessen Verarbeitung das Maturitätsexamen Aufschluß geben soll, holte sich der damalige Student an der philosophischen Fakultät der Universität, um sich erst nach einigen Semestern in derjenigen Fakultät zu immatrikulieren, deren Wissensgebiet er sich zu seinem Lebensberufe erwählt hatte. Euler sollte auf Wunsch seines Vaters Theologe werden, und wirklich hat er sich am 29. Oktober 1723 an der theologischen Fakultät immatrikuliert. Aber die mathematischen Wissenschaften hatten Euler bereits viel zu stark umgarnt, als daß sein theologisches Studium etwas anderes als eine Formsache wurde. Denn er hatte die enorme Chance, bei *Johann Bernoulli*, der damals als einer der größten lebenden Mathematiker galt, ein mathematisches Privatissimum absolvieren zu dürfen, in dem er von seinem Lehrer Aufgaben erhielt, die er für sich löste und deren Resultate er später mit Johann Bernoulli besprach. Zugleich befreundete er sich mit den drei ausgezeichneten Söhnen Johanns. Man kann sich lebhaft die Diskussionen, die in diesem Freundeskreise über mathematische und physikalische Probleme gepflogen wurden, vorstellen. Durch den Verkehr mit den Bernoullis wurden Eulers Forschungen für die nächsten zehn Jahre bedingt. Zunächst erhielt Euler am 8. Juni 1724 die philosophische Magisterwürde der Universität. Wichtiger war, daß der Einfluß der Bernoullis den Vater Eulers umzustimmen wußte, so daß er den Gedanken aufgab, seinen Sohn zum Pfarrer ausbilden zu lassen.

An der Basler Universität war es Sitte, daß jede Neubesetzung einer Professur durch das Los unter drei Kandidaten entschieden wurde. Die Aussicht, bald eine Lebensstellung an ihr zu erhalten, war deshalb für Euler nicht groß. Trotzdem bewarb er sich 1726 um die frei gewordene Physikprofessur und verfaßte als Ausweis seiner Befähigung eine seiner ersten Abhandlungen, nämlich seine Dissertation über den Schall, die 1727 in Basel erschien. Der erst neunzehnjährige Euler wurde jedoch, wohl seiner Jugend wegen, nicht unter die drei Kandidaten aufgenommen, die ins Los kamen. Dies bedeutete für Euler eine starke Enttäuschung, die nur dadurch gemildert wurde, daß ihm zur selben Zeit die Pariser Akademie der Wissenschaften für die Lösung eines Problems über die beste

Schiffsbemastung, das von ihr als Preisaufgabe gestellt worden war, ein «Accessit» erteilte. Die Arbeit erschien 1728 in Paris. So ereignete sich das Merkwürdige, daß Euler, der nie über die Grenzen Basels hinausgekommen war, nie ein Schiff mit Masten gesehen hatte, ein praktisches Problem des Schiffbaus mit Erfolg in Angriff genommen hatte! Seine wissenschaftlichen Forschungen liegen übrigens noch ganz im Gesichtskreis der Bernoullischen Schule[1]). Er wollte und brauchte nicht als Wunderkind aufzutreten, sondern ließ seine Probleme und Gedanken sich ruhig ausreifen. Sein Tagebuch zeigt aber, wie mannigfaltig damals schon seine Interessen und Kenntnisse waren und wie beweglich sein Geist allen Zusammenhängen nachspürte.

Jünglingsjahre und erster Petersburger Aufenthalt

Im Jahre 1725 gründete die Witwe Peters des Großen, *Katharina I.*, in Petersburg, dem heutigen Leningrad, die Akademie der Wissenschaften und suchte sie durch Berufung von Gelehrten mit Weltruf zu internationalem Ansehen zu bringen. Was lag näher, als im Gebiet der Mathematik sich an die damals blühendste mathematische Schule, diejenige Basels, zu wenden, um sie womöglich nach Rußland zu verpflanzen und durch ihren Ruf die Bedeutung der neuen Akademie zu erhöhen. *Johann Bernoulli*, der schon andere verlockende Angebote des Auslandes abgelehnt hatte, blieb Basel treu. Dagegen sandte er seine beiden Söhne *Daniel* und *Niklaus Bernoulli* nach Petersburg. Beide erhielten im Jahre 1725 an der Akademie gutbezahlte Professuren. Für Euler war der Verlust seiner beiden Studienfreunde schmerzlich. Als darum Daniel Bernoulli an Euler schrieb, daß in der Akademie voraussichtlich die Stelle für Physiologie und Anatomie frei werde und er sich für die Übernahme derselben vorbereiten möge, immatrikulierte sich Euler an der medizinischen Fakultät und warf sich mit Eifer auf das Studium der beiden genannten Disziplinen. Mit diesem Rüstzeug versehen, entschloß sich Euler, das Wagnis einer Reise nach Petersburg zu unternehmen; denn einmal war der ältere der beiden Bernoulli, Niklaus, am 20. Juli 1726 gestorben (er hatte das Klima nicht ertragen); außerdem erwartete er von seinem Freunde Daniel Bernoulli, daß er ihm wohl eine Anstellung vermitteln werde. So reiste Euler am 5. April 1727, kaum zwanzigjährig, per Schiff den Rhein hinunter bis Mainz und dann über Frankfurt, Kassel, Hamburg und Lübeck nach Petersburg, wo er am 17. Mai 1727 wohlbehalten anlangte. Über die Stationen orientieren uns genau Eulers Eintragungen in seinem Tagebuch.

In Petersburg fand er eine völlig veränderte Situation vor. Am Tage seiner Ankunft war die Kaiserin Katharina I. gestorben, wodurch die Existenz der Akademie ernstlich in Frage gestellt wurde. Trotzdem wurde Euler Adjunkt der mathematischen Klasse der Akademie; aber seine Lage war so prekär, daß er froh war, die Stelle eines Marine-

---

[1]) Das Herauswachsen Eulers aus dem Gedankenkreis Johann Bernoullis ist für die Variationsrechnung von C. Carathéodory in einem glänzenden Artikel in allen Details herausgearbeitet worden. Siehe Festschrift zum 60. Geburtstage von Prof. Dr. A. Speiser, p. 1. Zürich, Orell Füssli, 1945.

leutnants in der entstehenden russischen Flotte anzunehmen, um so mehr, da man ihm große Versprechungen über sein Avancement machte. Doch wurde schon 1730 die Physikprofessur der Akademie frei, deren Inhaber, der Basler *Jakob Hermann*, in seine Heimat zurückkehrte, und Euler wurde sein Nachfolger. Erst 1733 erhielt er die Mathematikprofessur, die bis anhin *Daniel Bernoulli* innehatte, der in diesem Jahre ebenfalls nach Basel zurückreiste. Die politischen Zustände hatten sich unterdessen gebessert, seit die Kaiserin Anna die Herrschaft 1730 übernommen hatte. So hatte Euler mit 26 Jahren in Petersburg eine glänzende Stellung errungen und konnte einen eigenen Hausstand gründen. Am 27. Dezember 1733 heiratete er die gleichaltrige *Katharina Gsell* aus St. Gallen, die Tochter des Malers und Direktors der Petersburger Malakademie, Georg Gsell. Seine Frau schenkte ihm im Laufe der Jahre 13 Kinder, von denen aber nur fünf am Leben blieben, drei Söhne und zwei Töchter.

Fragen wir nach der wissenschaftlichen Arbeit dieser Zeit, so ist die Ausbeute im Vergleich zu später immer noch spärlich. Nur die sorgfältig geführten Notizbücher und der Briefwechsel mit zahlreichen Mathematikern zeigen, wie weitumspannend und tiefschürfend Eulers Forschungen bereits in diesen Jahren in die Mathematik eingedrungen sind. In den Jahren 1728/29 verfaßte er je drei Abhandlungen, die sich durchweg im Geiste der Bernoullischen Schule bewegen. Er behandelte Kurvensysteme und Differentialgleichungen. Das Jahr 1730 dagegen bringt zwei Abhandlungen über geodätische Linien, die für die Entwicklung der Variationsrechnung grundlegend wurden, indem Euler die Differentialgleichungen derselben «mit staunenswerter Geschicklichkeit[1])» fast ohne Rechnung aufstellt. Er ebnete damit den Weg zu seiner 1732 verfaßten bedeutenden Abhandlung über das isoperimetrische Problem (Opera omnia, series I, vol. 25). Im Jahre 1732 beginnt Euler sich auch als eminenter Zahlentheoretiker auszuweisen, in welche Disziplin ihn nicht die Bernoullis, sondern der Briefwechsel mit *Goldbach* drängte. Euler widerlegte nämlich die *Fermatsche* Behauptung, daß jede Zahl der Gestalt $2^{2^n}+1$ für $n=0, 1, 2, 3, \ldots$ eine Primzahl sei, indem er zeigt, daß für $n=5$ die Zahl 4 294 967 297 den Teiler 641 besitzt (Opera omnia, series I, vol. 2, p. 3): $4\,294\,967\,297 = 641 \cdot 6\,700\,417$.

Zusammenfassend kann gesagt werden, daß Euler in dieser Zeit vor seiner Verheiratung einen bedeutenden Sprung zur selbständigen Forschung machte und alle einengenden Fesseln sprengte.

Mit dem Jahr seiner Verheiratung ist demnach Euler im Vollbesitz seiner genialen Forschertätigkeit. Seine Abhandlungen machen Aufsehen und bringen ihm Weltruf; sein Ruhm steigt. Er beginnt in diesen Jahren etwas ganz Neues, was vor ihm noch niemand in diesem Umfange unternommen hatte: Er schreibt umfangreiche, zusammenfassende *Lehrbücher*. Damit sicherte er sich einen Einfluß auf die Entwicklung der reinen und angewandten Mathematik, wie ihn niemand vor ihm und mit ihm besessen hat. Das gigantische Unternehmen, die einzelnen mathematischen Disziplinen, die vielfach nur bruchstückweise existierten, im ganzen organisch aufzubauen, zwangen ihn, manche Lücke auszufüllen und eigene Forschungen einzuschalten.

---

[1]) Carathéodory, a. a. O. p. 8 u. ff.

1734 ist der erste, 1736 der zweite Band seines ersten Lehrbuches, der

Mechanica sive motus scientia analytice exposita
(Opera omnia, series II, vol. 1 und 2)

vollendet. Es ist schwer, sich heute die Wirkung dieses Buches vorzustellen, das übrigens noch 1848 würdig befunden wurde, ins Deutsche übersetzt zu werden. Sein Inhalt ist uns völlig zu eigen geworden. Die in diesem Werke geformte Begriffsbildung der Bewegungslehre hat nicht nur für hundert Jahre den Mathematiker, sondern auch den Physiker und bis heute den Ingenieur beherrscht. Im Jahre 1735 folgte die Niederschrift der erst 1738 gedruckten, auch ins Russische übersetzten:

Einleitung zur Rechen-Kunst zum Gebrauch des Gymnasii bey der Kaiserlichen Academie der Wissenschafften in St. Petersburg, I. Teil,
(Opera omnia, series III, vol. 2, p. 1)

ein mit überlegener Klarheit geschriebenes elementares Lehrbuch, das den Schüler einzigartig in die elementare Arithmetik einführt. Möchte es auch heute noch in Mittelschulen Verwendung finden, sei es, um als Lektüre im Unterricht zu dienen oder zu selbständigen Vorträgen durch Schüler benutzt zu werden! Der II. Teil wurde 1740 verfaßt (Opera omnia, ebenda). Auch Anwendungen der Mathematik wurden in diesen Jahren von Euler einer zusammenhängenden Darstellung für würdig befunden. 1731 wurde sein

Tentamen novae theoriae musicae ex certissimis harmoniae principiis dilucide expositae (Erscheinungsjahr 1739)
(Opera omnia, series III, vol. 1, p. 197),

eine noch viel zu wenig beachtete, 1865 ins Französische übersetzte Musiktheorie; und 1738 seine

Scientia navalis seu tractatus de construendis ac dirigendis navibus
(Erscheinungsjahr 1749) (Opera omnia, series II, vol. 18 und 19)

geschrieben.

Neben diesen größern Werken erschienen von Euler eine Unmasse von rein mathematischen Abhandlungen über alle Gebiete der Mathematik. Zudem befruchtete Euler in diesen Jahren das Gebiet der Astronomie mit entscheidenden Entdeckungen. Seine 1735 verfaßten und 1740 erschienenen Abhandlungen lösten sowohl das Problem, aus drei Beobachtungen eine Planetenbahn zu bestimmen als auch aus zwei Sonnenmessungen die «Mittagsgleichung» des Ortes zu berechnen.

An letztere Aufgabe sei folgende Bemerkung geknüpft. Vielfach wird in Biographien großer Männer auf das Urteil und die Tradition von dessen Familie großes Gewicht gelegt, trotzdem diese Quelle sehr unsicher ist und sich bei näherem Zusehen häufig als falsch erweist. Man denke etwa an die Beurteilung von *Blaise Pascal* durch seine Schwester, die sicherlich das Genie ihres Bruders nie erkannt hat. Ähnlich liegen die Verhältnisse bei Euler, dessen Schüler *Nikolaus Fuß*, der eine Enkelin Eulers geheiratet hat, im Jahre 1786, drei Jahre nach Eulers Tod, bei Schweighauser in Basel seine berühmte:

Lobrede auf Herrn Leonhard Euler
(Opera omnia, series I, vol. 1, p. XLIII)

herausgab. Sie war eine Übersetzung aus dem Französischen eines von Fuß verfaßten, der Petersburger Akademie am 23. Oktober 1783 vorgelesenen Nachrufes auf Euler. Dieses Buch vermittelt sehr viel Wertvolles über Euler und bringt ein erstes (unvollständiges) Verzeichnis [1]) der Schriften Eulers. Es hat viel zur Kenntnis des Menschen und Forschers Euler beigetragen. Trotzdem sind manche seiner Ausführungen mit größter Vorsicht aufzunehmen. Schon Fuß' Behauptung, daß Euler in Basel durch das Los von der Physikprofessur ausgeschlossen worden sei, ist unrichtig. Bezüglich Eulers Abhandlung über die Mittagsgleichung berichtet Fuß: «Von seinem eisernen Fleiße gab er noch ein auffallenderes Beispiel; als im Jahre 1735 eine Berechnung gemacht werden sollte, die Eile hatte, zu der verschiedene Akademiker einige Monate Zeit haben wollten, und die er in drei Tagen vollendete. Aber wie teuer mußte er diese Anstrengung bezahlen! Sie zog ihm ein hitziges Fieber zu, das ihn bis an den Rand des Grabes brachte. Seine Natur siegte zwar und er genas, aber mit dem Verlust des rechten Auges, welches ihm ein Abszeß raubte, der sich während der Krankheit formiert hatte.» Dieser ganze Abschnitt trägt alle Merkmale einer Familiensage und hält einer kritischen Betrachtung nicht stand[2]). Euler schreibt selbst am 21. August 1740 an Goldbach: «Die Geographie ist mir fatal. Ew. wissen, daß ich dabei ein Aug eingebüßt habe, und jetzt wäre ich bald in gleicher Gefahr gewesen. Als mir heute eine Partie Charten um zu examinieren zugesandt wurden, habe ich sogleich neue Anstöße empfunden. Denn die Arbeit, da man genötigt ist, immer einen großen Raum zu übersehen, greifet das Gesicht weit heftiger an als nur das simple Lesen oder Schreiben.» Sicher ist also nur, daß Euler im Jahre 1735 sein rechtes Auge verlor, was ihn nicht hinderte, seine unbegrenzte Forschungstätigkeit im bisherigen Umfange weiterzuführen.

Berliner Jahre 1741—1766

Im Jahre 1740 greift wieder die Politik in das Leben Eulers ein. Kaiserin Anna starb, und ihr Günstling *Biron* trat die Regentschaft an. Erst im folgenden Jahre konnte Kaiserin Elisabeth die Zügel der Regierung ergreifen. Diese Zeit der innern Umwälzungen des Zarenreiches war für die Akademie eine Zeit der Besorgnis und Ungewißheit. Niemand konnte sagen, ob sie im bisherigen Sinne weitergeführt werden konnte. Es ist daher nicht verwunderlich, daß Euler Mitte 1740 mit Friedrich dem Großen in Verbindung trat, um eventuell eine Stelle als Akademiker in Berlin anzunehmen. Der junge König von Preußen, der den Thron am 31. Mai 1740 bestiegen hatte, schrieb am 27. Juni

---

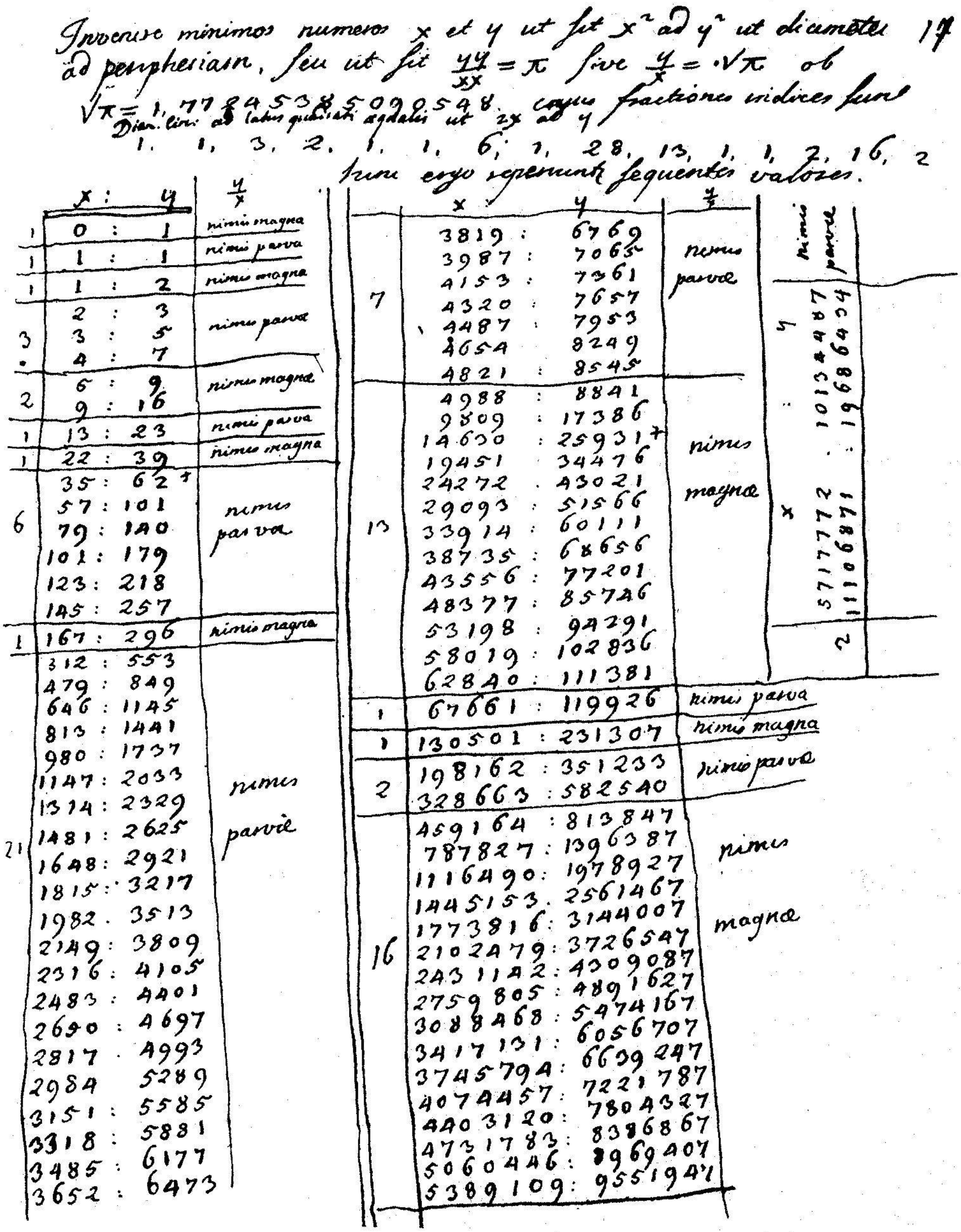
[1]) Das erste vollständige Verzeichnis aller Eulerschen Schriften hat der große schwedische Historiker der Mathematik Gustaf Eneström im Jahre 1910 publiziert: Verzeichnis der Schriften Leonhard Eulers, bearbeitet von Gustaf Eneström, Jahresbericht der Deutschen Math. Vereinigung, IV. Ergänzungsband, erste Lieferung, Leipzig, Teubner, 1910. — Im Jahre 1913 folgte die zweite Lieferung im selben Bande, die den Schluß und die Nachträge enthielt, sowie die Verzeichnisse nach der Verfassungszeit resp. dem Inhalt geordnet. Jede Arbeit hat von Eneström eine Nummer erhalten, die, wie bei Mozart das Köchelsche Verzeichnis, bei bibliographischen Arbeiten maßgebend ist. Im ganzen enthält das Verzeichnis 866 Nummern.

[2]) Siehe die Ausführungen von G. Eneström: Eine Legende von dem eisernen Fleiß Leonhard Eulers, Bibliotheca Math., 3. Folge, Bd. 10, p. 308 (1910).

desselben Jahres an Voltaire, daß er als erste Amtshandlung seine Armee vergrößert und die Fundamente einer neuen Akademie gelegt habe. Es war natürlich, daß er bestrebt war, erstklassige Kräfte für diese königlich-preußische Akademie der Wissenschaften in Berlin zu gewinnen. Voltaire hatte ihm als Direktor *Maupertuis*, und der maßgebende Pariser Mathematiker und Akademiker *d'Alembert*, mit dem der König regelmäßig über seine Akademie korrespondierte und der selbst Paris nicht verlassen wollte, hatte ihm als größten Mathematiker *Euler* empfohlen. Nach längeren Verhandlungen wurde die Berufung Eulers nach Berlin perfekt, trotzdem die Akademie eigentlich noch gar nicht formiert war. So verließ Euler den heißen Boden von Petersburg und langte am 25. Juli 1741 in Berlin an, vom König zunächst gnädig empfangen. Wegen des Einflusses auf Eulers wissenschaftliche Arbeit muß kurz auf die weitere Entwicklung seiner Beziehungen zu Friedrich dem Großen eingegangen werden. Der letztere war kulturell ganz auf Frankreich eingestellt. Im Grunde verachtete er die Deutschen, zu denen er auch Euler, «le grand algébriste», zählte. Er hat Euler niemals zu seinem engeren Kreis zugelassen und kein persönliches Verhältnis zu ihm gewonnen. Zudem hatte Friedrich kein Verständnis für mathematische Forschungen und anerkannte den Wert derselben nur, insofern sie zu nützlichen Anwendungen, vor allem auf militärischem Gebiete, führten. Euler wurde kaum je zu Audienzen bei ihm zugelassen und er litt offenbar unter diesen Umständen, wenn auch kein Beweis dafür zu erbringen ist. Man sieht aber aus dem in Euler erwachten Interesse für militärische und technische Fragen, wie sehr er um die Gunst seines Königs warb. 1745 übersetzte er das Werk des Engländers *Benjamin Robins* «*New principles of gunnery*» ins Deutsche, das im selben Jahre in Berlin unter dem Titel:

Neue Grundsätze der Artillerie enthaltend die Bestimmung der Gewalt des Pulvers nebst einer Untersuchung über den Unterscheid des Widerstands der Luft in schnellen und langsamen Bewegungen aus dem Englischen des Herrn Benjamin Robins übersetzt und mit den nötigen Erläuterungen und vielen Anmerkungen versehen
(Opera omnia, series II, vol. 14, p. 49)

erschien. Dieses Buch enthält zunächst einen Abschnitt über Fortifikationslehre und über sogenannte innere Ballistik («Gewalt des Pulvers»). Dann wendet sich der Verfasser seiner Hauptaufgabe zu, der *äußern Ballistik*. Robins steht derselben als vollkommener Empiriker gegenüber, der von aller Theorie nichts hält. Seit *Galilei* hatten die Artilleristen die Flugbahn der Geschosse als Parabeln angesehen, indem sie den Luftwiderstand wegen der «Dünnheit» der Luft glaubten vernachlässigen zu dürfen. Robins hat als einer der ersten wertvolle Experimente ausgeführt und gezeigt, daß dem nicht so ist; daß im Gegenteil die Flugbahn durch den Einfluß des Luftwiderstandes wesentlich abgeändert werde. Das Gesetz des Luftwiderstandes sucht Robins empirisch zu ermitteln. Hier setzt Euler mit seinen Erläuterungen und Anmerkungen ein, indem er sich auf theoretische Annahmen, unter andern seines Freundes *Daniel Bernoulli*, stützte. Mit seiner souveränen Beherrschung der Infinitesimalrechnung stellt er jedem Robins'schen experimentell gefundenen Satze seine aus den genannten Annahmen entwickelten theoretischen Betrachtungen gegenüber



	x	y	y/x
1	0	1	nimis magna
1	1	1	nimis parva
1	1	2	nimis magna
3	2	3	nimis parva
	3	5	
	4	7	
2	6	9	nimis magna
	9	16	
1	13	23	nimis parva
1	22	39	nimis magna
6	35	62	nimis parva
	57	101	
	79	140	
	101	179	
	123	218	
	145	257	
1	167	296	nimis magna
21	312	553	nimis parvae
	479	849	
	646	1145	
	813	1441	
	980	1737	
	1147	2033	
	1314	2329	
	1481	2625	
	1648	2921	
	1815	3217	
	1982	3513	
	2149	3809	
	2316	4105	
	2483	4401	
	2650	4697	
	2817	4993	
	2984	5289	
	3151	5585	
	3318	5881	
	3485	6177	
	3652	6473	

	x	y	y/x
7	3819	6769	nimis parvae
	3987	7065	
	4153	7361	
	4320	7657	
	4487	7953	
	4654	8249	
	4821	8545	
13	4988	8841	nimis magnae
	9809	17386	
	14630	25931	
	19451	34476	
	24272	43021	
	29093	51566	
	33914	60111	
	38735	68656	
	43556	77201	
	48377	85746	
	53198	94291	
	58019	102836	
	62840	111381	
1	67661	119926	nimis parva
1	130501	231307	nimis magna
2	198162	351233	nimis parva
	328663	582540	
16	459164	813847	nimis magnae
	787827	1396387	
	1116490	1978927	
	1445153	2561467	
	1773816	3144007	
	2102479	3726547	
	2431142	4309087	
	2759805	4891627	
	3088468	5474167	
	3417131	6056707	
	3745794	6639247	
	4074457	7221787	
	4403120	7804327	
	4731783	8386867	
	5060446	8969407	
	5389109	9551941	

	x	y	y/x
1	5717772	10134487	nimis parvae
2	11106871	19686434	

Berechnung von $\sqrt{\pi}$ aus der Kettenbruchentwicklung (undatierte Notiz).

und vergleicht sie mit den von Robins gefundenen. So erhalten diese erst ihre wahre Bedeutung, und die Eulersche Bearbeitung machte aus dem Robins'schen Buche etwas ganz Neues, nämlich *das erste Lehrbuch der Ballistik*. Dieses wurde 1777 wieder ins Englische und 1783 ins Französische übersetzt und in Frankreich sogar als offizielles Lehrbuch in den Militärschulen eingeführt, so daß es sogar *Napoleon I.* als Leutnant studieren mußte[1]). Auch heute noch ist das Werk in seiner klaren Einfachheit dazu geeignet, daß Lehrer in Mittelschulen einzelnes herausgreifen und durch Schüler bearbeiten lassen.

Das Jahr 1743 ließ Euler eine neue technisch weitreichende Entdeckung machen: seine berühmte *Knickformel*, ohne deren Verwendung heute wohl keine Brücke, kein Fachwerk gebaut wird[2]). Dieselbe findet sich in dem 1744 in Lausanne unter dem Titel:

Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes, sive solutio problematis isoperimetrici latissimo sensu accepti
(Opera omnia, series I, vol. 24)

erschienenen Werke, das bei demselben Verleger herausgekommen ist, bei dem später auch seine «Introductio in analysin infinitorum» gedruckt wurde. Dieses grundlegende Buch verdankte seine Entstehung einerseits dem Umstande, daß Euler eine genaue Kenntnis der Bernoullischen Schule hatte, anderseits den hervorragenden eigenen Entdeckungen Eulers im Gebiete der Variationsrechnung. Hatte er doch letztere auf ganz neuer Grundlage aufgebaut. Durch einfache Überlegungen, die schon Daniel Bernoulli angestellt hatte, hat Euler die Potentialkraft elastischer Kurven durch das Integral

$$\int \frac{ds}{R^2}$$

ausgedrückt, wo R der Krümmungsradius der Kurve ist. Durch Einführung rechtwinkliger Koordinaten geht das Integral in

$$\int \frac{y''^2 dx}{\sqrt{(1+y'^2)^5}}$$

über, und Euler hat damit das Problem darauf zurückgeführt, y als Funktion von x so zu bestimmen, daß dieses Integral zu einem Minimum wird. Jetzt kann er seine Variationsrechnung anwenden, die ihm für die Kraft P, die den geraden elastischen Stab unendlich wenig ausbiegen soll, die Formel ergibt:

$$P = \frac{\pi^2 E k^2}{4 f^2} ,$$

wobei Ek^2 die «absolute Elastizität» (Steifigkeit) und $2f$ die Länge des beidseitig gelenkig gelagerten Stabes ist. Damit war seine berühmte Knickformel gefunden. Dies ist wohl eine der genialsten Anwendungen, die wir dem Geiste Eulers verdanken.

1749 erschien Eulers schon längst verfaßtes Werk über das *Schiffswesen*, das sofort für alle Werften grundlegend wurde, und 1751 schrieb Euler, angeregt durch das *Segnersche* Wasserrad, die erste einer Reihe von Abhandlungen über Turbinenbau, unter denen die meisterhafte Mitteilung aus dem Jahre 1753:

---

[1]) Siehe Rud. Fueter: Der Einfluß der mathematischen Disziplinen auf die Kriegswissenschaften, Festschrift Max Huber: Vom Krieg und vom Frieden, Zürich, Schultheß, 1945, p. 282.

[2]) F. Stüssi: 200 Jahre Eulersche Knickformel, Schweiz. Bauzeitung, Bd. 123, Nr. 1, 1944, p. 1.

Théorie plus complête des machines qui sont mises en mouvement par la réaction de l'eau (Erscheinungsjahr 1756)
(Opera omnia, series II, vol. 16)

die Grundlage der modernen Lehre der Turbinen bildet. Ja Euler hat sogar schon die Erscheinung der Kavitation berücksichtigt. Dabei hat er gar nicht daran gedacht, eine Turbine effektiv zu bauen. Dazu hätte die damalige Zeit gar nicht die nötigen Materialien und Maschinen gehabt. Es ist aber außerordentlich interessant, daß die Fabrikation einer Turbine genau nach Eulers Angaben durch Prof. Ackeret in Zürich im Jahre 1943 vorgenommen wurde[1]. Der Versuch hatte einen durchschlagenden Erfolg. Die Turbine läuft zur vollen Zufriedenheit der Ingenieure. Sie ist abgebildet in der Schweizerischen Bauzeitung, Bd. 123, p. 3.

Schließlich brachte das Jahr 1761 die erste Theorie der *achromatischen Linse.* Die Beschäftigung Eulers mit dieser Frage hat eine bedeutsame Vorgeschichte. Schon 1749 hatte er sich gegen Newtons Ansicht ausgesprochen, daß man aus verschiedenen Medien keine farbenfreie Linse herstellen könne. Im Gegensatz zu Newton hat er in weiteren Arbeiten Formeln hergeleitet, nach denen man aus zwei verschiedenbrechenden Gläsern solche Linsen herstellen kann. Er hat damit den hellen Zorn der Newtonschen Schule in England, vertreten durch den Physiker *Dollond,* heraufbeschworen. Letzterer bestritt die Richtigkeit von Eulers Theorie aufs heftigste. Zufällig war es ihm zu jener Zeit gerade gelungen, zwei verschiedenbrechende Glassorten, das Flintglas und das Crownglas, herzustellen. Er glaubte daher, am schnellsten Eulers Theorie ad absurdum führen zu können, indem er aus den beiden Gläsern genau nach Eulers Vorschrift eine Linse herstelle. Das Experiment wurde von ihm gemacht, ergab aber nicht die Widerlegung Eulers, sondern zu Dollonds Überraschung die erste achromatische Linse (1757). Das Resultat gab somit Euler gegen Newton recht! Damit war die Grundlage geschaffen zu Eulers grundlegender Arbeit des Jahres 1761:

Constructio lentium objectivarum ex duplici vitro quae neque confusionem a figura sphaerica oriundam, neque dispersionem colorum pariant (Erscheinungsjahr 1762)
(Opera omnia, series III, vol. 6).

In die Berliner Zeit fallen auch bedeutende Arbeiten Eulers über *Astronomie.* Er setzt durch Veröffentlichung des folgenden Werkes seine schon 1736 begonnene Reihe von Lehrbüchern fort:

Theoria motuum planetarum et cometarum. Continens methodum facilem ex aliquot observationibus orbitas cum planetarum tum cometarum determinandi. Una cum calculo, quo cometae, qui annis 1680 et 1681 et itemque ejus qui nuper est visus, motus verus investigatur (Erscheinungsjahr 1744)
(Opera omnia, series II, vol. 28).

---

[1]) J. Ackeret: Untersuchung einer nach den Eulerschen Vorschlägen (1754) gebauten Wasserturbine, Schweiz. Bauzeitung, Bd. 123, Nr. 1, 1944, p. 2.

Dieses Buch ist bis in den Anfang des 19. Jahrhunderts maßgebend für die Berechnung der Planeten- und Kometenbahnen gewesen. Auch die Physik genoß Eulers besonderes Interesse. Er publizierte eine Reihe großer physikalischer Abhandlungen, unter denen seine 1744 verfaßte und 1746 erschienene:

Nova theoria lucis & colorum
(Opera omnia, series III, vol. 5)

genannt sei. Ein für allemal muß betont werden, daß bei der enormen Zahl von Eulerschen Abhandlungen und Werken nur eine Auswahl zitiert werden kann.

Doch kehren wir nach dieser Abschweifung in die angewandte Mathematik wieder zur reinen Mathematik und den Geisteswissenschaften zurück. Hier müssen wir die drei zusammenfassenden Lehrbücher über alle Gebiete, die sich auf die Infinitesimalrechnung gründen, wie die Differential- und Integralrechnung, Differentialgleichungen, Funktionentheorie, Variationsrechnung u. a. m., an die Spitze stellen. Sie stellen in ihrer Art etwas Einzigartiges und Einmaliges dar: Eulers

Introductio in analysin infinitorum, tomus primus et secundus
(Opera omnia, series I, vol. 8 und 9),

die schon 1745 aufgeschrieben war, ist 1748 in vollendeter Ausstattung bei Bousquet in Lausanne erschienen. Der erste Band dieses genialen Buches bringt, was man heute «*Höhere Analysis*» nennt, und zwar in einer Form, wie sie für alle Zeiten maßgebend geworden ist. Während hundert Jahren haben alle Mathematiker der Welt ihr wissenschaftliches Rüstzeug aus diesem Buche geholt. Es prägte unsere noch heute gültigen Bezeichnungsweisen und verhalf insbesondere der Leibnizschen Formelsprache zum Durchbruch. Der zweite Band bringt das, was man heute Anwendung der höhern Analysis auf die Theorie der Kurven und Flächen nennt. Beide Bände sind mit einer vorbildlichen Einfachheit und Klarheit geschrieben.

Wir wollen kurz eines der Probleme, die im ersten Teil der «Introductio» behandelt werden, hervorheben. Im berühmten 8. Kapitel werden die trigonometrischen Funktionen eingehend für den allgemeinen Winkelbegriff funktionentheoretisch studiert und ihre Veränderungen bei Zuwachs des Winkels um $\pi/2$ berechnet. Sinus und Cosinus werden systematisch mit sin und cos abgekürzt, was zur allgemeinen Annahme dieser Abkürzung geführt hat. Vor allem wird dann der Zusammenhang mit der Exponentialfunktion durch Einführung der imaginären Einheit i entdeckt, und die berühmten *Eulerschen Formeln:*

$$\sin x = \frac{1}{2i}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right), \qquad \cos x = \frac{1}{2}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right)$$

(Opera omnia, series I, vol. 8, § 138, p. 147)

aufgestellt, womit auch der Zusammenhang mit der *Moivreschen* Formel und den Reihenentwicklungen von $\cos x$ und $\sin x$ leicht hergestellt wird.

Für das zweite Lehrbuch gilt alles über die «Introductio» gesagte im selben Maße: Es ist Eulers Differentialrechnung:

Institutiones calculi differentialis cum ejus usu in analysi finitorum ac doctrina serierum
(Opera omnia, series I, vol. 10),

die 1748 geschrieben, aber erst 1755 in Berlin erschienen ist. Das Buch ist mit solcher pädagogischer Kunst verfaßt, daß der Leser spielend in die verwickeltsten Betrachtungen eingeführt wird. Noch heute ist es eine Fundgrube für schöne Beispiele. Es bringt die für die Ausgleichungsrechnung und die Statistik grundlegende Eulersche Summenformel (Opera omnia, series I, vol. 10, pars posterior, § 111 u. ff., p. 313).

Schließlich bildet das dritte Lehrbuch:

Institutionum calculi integralis volumen primum in quo methodus integrandi a primis principiis usque ad integrationem aequationum differentialium primi gradus pertractatur. Institutionum calculi integralis volumen secundum in quo methodus inveniendi functiones unius variabilis ex data relatione differentialium secundi altiorisve gradus pertractatur. Institutionum calculi integralis volumen tertium, in quo methodus inveniendi functiones duarum et plurium variabilium, ex data relatione differentialium cujusvis gradus pertractatur. Una cum appendice de calculo variationum et supplemento, evolutionem casuum prorsus singularium circa integrationem aequationum differentialium continente
(Opera omnia, series I, vol. 11, 12, 13)

nicht nur eine Einführung in die Integralrechnung, sondern vor allem eine solche in die Theorie der gewöhnlichen und partiellen Differentialgleichungen und der Variationsrechnung. Es wurde von Euler noch in Berlin im Jahre 1763 verfaßt, ist aber erst in den Jahren 1768, 1769 und 1770 in Petersburg erschienen.

Ein weiteres Lehrbuch über *Zahlentheorie* ist leider Torso geblieben. Es ist erst lange nach Eulers Tod von seinen Urenkeln *Fuß* 1849 unter dem Titel «*Tractatus de numerorum doctrina Capita XVI, quae supersunt*» (Opera omnia, series I, vol. 5, p. 182) herausgegeben worden, wurde aber ohne Zweifel um das Jahr 1750 herum von Euler eigenhändig geschrieben[1]. In ihr finden sich Spezialfälle des Eisensteinschen kubischen Reziprozitätsgesetzes angegeben, die Euler empirisch aus einem ungeheuern Zahlenmaterial mit bewundernswerter Intuition vollständig richtig erkannt hat, und die er nirgends sonst veröffentlicht hat.

Damit kommen wir zur Charakterisierung der in Abhandlungen niedergelegten Entdeckungen von Euler während seiner Berliner Zeit, und zwar zunächst zu derjenigen seiner *zahlentheoretischen* Forschungen. Wir haben gesehen, wie die unbewiesenen Behauptungen Fermats Eulers Interesse von Jugend an fesselten. Sie führten ihn in die Theorie der quadratischen Reste und ließen ihn die Restcharaktere von $-1, 2, -2$ bestimmen. Sehr schnell erkannte er das *quadratische Reziprozitätsgesetz*, dessen Beweis ihm aber trotz wiederholter Anstrengungen nicht gelang. Man darf sagen, daß dieser ganze Zweig der Zahlentheorie von Euler eigentlich geschaffen wurde. Daneben gab er sich mit *befreundeten Zahlen* und mit mathematischen Spielen ab, berechnete *magische Qua-*

---

[1]) Siehe die Ausführungen im Vorwort zu vol. 4 der Opera omnia, series I, p. XIX u. ff.

drate, geschlossene *Rösselsprünge* (1759) und die nach ihm benannten Quadrate. Euler war ein leidenschaftlicher Rechner. Mit einer ans Unfaßliche grenzenden Intuition begabt, führte ihn ein ungeheures Zahlenmaterial, wie oben schon bezüglich des kubischen Reziprozitätsgesetzes ausgesprochen wurde, zur Entdeckung ganz neuer Zusammenhänge. Er begnügte sich nicht, ein empirisch gefundenes Gesetz etwa für die Primzahlen 2, 3, 5, 7 zu erproben, sondern ging gleich bis zu allen Primzahlen unter 300.

Ein zweites Gebiet, das er eigentlich neu schuf, ist die *Topologie*. Seine 1752 gefundene und 1758 in der Abhandlung:

Elementa doctrinae solidorum
(Opera omnia, series I, vol. 26)

niedergelegte *Polyederformel*, daß die Summe der Zahl der Ecken und Flächen eines Polyeders gleich der um 2 vermehrten Zahl der Kanten ist, bildet eine Grundlage der heutigen Theorie der Simplexe. Sie hat in der Folge die weitreichendsten Theorien inspiriert. Topologischer Natur war auch sein berühmtes Königsberger Brückenproblem, das er noch in der ersten Petersburger Zeit (1735) löste und 1741 publizierte:

Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis
(Opera omnia, series I, vol. 7, p. 1).

Es beantwortet die Frage, ob man in Königsberg über die 7 Pregelbrücken gehen kann, ohne eine zweimal zu überschreiten [1]).

Ebenso grundlegend sind Eulers Arbeiten aus den Gebieten der *Analysis*, speziell der Reihentheorie und der Differentialgleichungen, sowie der *Funktionentheorie*, *Flächentheorie* und *Geometrie*. Es ist nicht möglich, alle seine Entdeckungen im einzelnen zu nennen.

Besonders wertvoll ist, daß Euler in seinen Abhandlungen den Leser Anteil nehmen läßt an seiner Arbeitsweise. Er scheut nicht davor zurück, auch verfehlte Versuche anzugeben, die zu keinem Ziele geführt haben. So erlebt der Leser auch heute noch die Art und Weise mit, in der Euler seine Entdeckungen machte. Die Arbeiten sind alle mit derselben Klarheit und Einfachheit in einem unkomplizierten und leicht leserlichen Latein geschrieben. Sie beginnen gewöhnlich mit einer Analyse des Problemes, das zuerst auf seine einfachste und zugleich tiefste Form gebracht wird. Darauf setzt die Begriffsbildung ein, die nach wenigen Überlegungen zu überraschenden Resultaten führt.

Gehen wir zu seinen erkenntnistheoretischen philosophischen Arbeiten über, so sind neben den zu Beginn besprochenen «*Lettres à une princesse allemande*» vor allem Eulers Ideen zum *Zeit-Raum-Problem* zu nennen, die ihren Niederschlag fanden in der 1748 verfaßten und 1750 veröffentlichten Abhandlung:

Réflexion sur l'espace et le temps
(Opera omnia, series III, vol. 2, p. 376),

auf der *Kant* und damit ein Jahrhundert später *Riemann* fußten. Eine besondere Stellung nimmt Eulers:

---

[1]) Über das Problem und die Pregelbrücken siehe etwa: Ahrens: Mathematische Unterhaltungen und Spiele, Bd. 2, Leipzig, Teubner, 1918, p. 183.

Rettung der göttlichen Offenbahrung gegen die Einwürfe der Freygeister
(Opera omnia, series III, vol. 12)

aus dem Jahre 1747 ein, in der er sich gegen gewisse plumpe Versuche der Rationalisten zur Erklärung der Wunder wandte.

So sehen wir Euler in der Berliner Zeit im Vollbesitze seiner Schöpferkraft. Sein Ruhm erfüllt die ganze wissenschaftliche Welt und sein Wissen umspannt alles damals Wissenswerte. Mit dieser unerhörten Leistung geriet seine äußere Stellung immer mehr in Widerspruch, was in letztem Grunde mit seinem Verhältnis zu Friedrich dem Großen zusammenhing. Dasselbe hat sich nie zufriedenstellend entwickelt, wie die folgenden Tatsachen zeigen: Die offizielle Gründung der Berliner Akademie der Wissenschaften, für die Euler berufen war, verzögerte sich, wohl als Folge des Siebenjährigen Krieges, bis 1744, so daß Euler keine offizielle Stellung innehatte. Erst in diesem Jahre wurde er Direktor der mathematischen Klasse der Akademie, während Maupertuis zu ihrem mit vielen Kompetenzen ausgestatteten Präsidenten ernannt wurde. Mit letzterm war Euler eng befreundet; er hielt in jeder Weise zu ihm, auch während des peinlichen Konfliktes mit *Samuel König*, der bekanntlich den Zwist zwischen Friedrich dem Großen und Voltaire auslöste. Ob Euler innerlich nicht König recht geben mußte, läßt sich nicht beweisen. Euler war auch der offizielle Stellvertreter Maupertuis' als Präsident der Akademie bei dessen Abwesenheit und übte die Funktion nach dessen Tode (1759) weiter aus, ohne Präsident zu werden. Der König wollte damals mit allen Mitteln d'Alembert nach Berlin ziehen. Aber dieser zog es vor, in Paris zu bleiben, um von dort aus durch seinen ständigen Briefwechsel mit dem König die Akademie zu leiten. Man kann sich vorstellen, was dies für Euler bedeutete, der doch als Mathematiker d'Alembert in jeder Hinsicht überlegen war. Man darf gerade in diesen Verhältnissen eine der Hauptursachen des schließlichen Zerwürfnisses Eulers mit dem König sehen. Euler, der sich seines Wertes und seines Weltrufes wohl bewußt war, besaß effektiv die Leitung der Akademie *nicht*.

Zu diesen innern Gründen kamen äußere. Friedrich der Große war mit der Finanzierung der Akademie nicht einverstanden und machte mehr oder weniger offen Euler dafür verantwortlich. Die Einnahmen flossen wesentlich aus dem Verkauf eines Almanaches, den die Akademie herausgab. Nach des Königs Ansicht war das Ergebnis zu gering und sollte erhöht werden. Er entzog daher die Finanzgeschäfte der Akademie und übergab sie einer neuen Kommission, der Euler allerdings auch angehörte. Letzterer sah in dieser Verfügung mit Recht ein Mißtrauensbeweis von seiten des Königs ihm gegenüber. Schließlich konnte Euler nicht erreichen, daß die ihm in Aussicht gestellte Sicherstellung der Zukunft seiner Söhne vom König sanktioniert wurde. Diese Frage scheint Euler besonders am Herzen gelegen zu haben. Alle diese Umstände zusammengenommen ließen Euler erneut seine Blicke gen Petersburg wenden, mit dessen Akademie er stets in allerbestem Einvernehmen geblieben war.

In Rußland hatten sich unterdessen die politischen Verhältnisse zum Bessern gewandt. Katharina II. war 1763 auf den Thron des Zarenreiches gestiegen. Sie förderte Kunst und Wissenschaft mit allen Mitteln und bevorzugte die Akademie der Wissenschaften in jeder Weise. Es ist selbstverständlich, daß sie suchte, den Glanz derselben durch erneute Gewinnung von Euler zu erhöhen. Die Angebote, die sie Euler machen ließ, falls er wieder nach Rußland zöge, waren in jeder Hinsicht glänzend. Euler verlangte für sich die Stellung eines Direktors der Akademie der Wissenschaften mit 3000 Rubel Gehalt, für seine Frau eine Witwenpension von 1000 Rubel, für seinen ältesten Sohn die Stelle eines Sekretärs der Akademie mit 2000 Rubel Gehalt und für seine jüngern Söhne eine gesicherte Zukunft. Alles wurde ohne weiteres bewilligt.

Friedrich der Große ließ Euler sein Entlassungsgesuch der Form halber dreimal wiederholen und bewilligte es schließlich, da er seine Gönnerin Katharina II. nicht brüskieren konnte. Er entließ Euler ohne ein Wort des Dankes! Seinem Spott machte er in einem Schreiben an d'Alembert Luft, indem er diesem über Eulers Reise nach Petersburg schrieb: «M. Euler qui aime à la folie la grande et la petite ourse, s'est approché du nord pour observer à son aise. Un vaisseau qui portait ses *xz* et son *kk* a fait naufrage; tout est perdu, et c'est dommage parcequ'il aurait eu de quoi remplir six volumes in folio de mémoires chiffrés d'un bout à l'autre et l'Europe sera vraisemblablement privée de l'agréable amusement que cette lecture lui aurait donné.»

So verließ Euler am 9. Juni 1766 mit seiner Familie Berlin, um wieder nach Petersburg zu ziehen.

Zweiter Petersburger Aufenthalt. Alter und Tod

Die Familie Euler langte am 17. Juli 1766 an dem Orte an, der einst den ersten Ruhm ihres Oberhauptes hat entstehen sehen. Kaiserin Katharina II. empfing Euler mit seinen beiden Söhnen sofort in Audienz und zeichnete ihn in jeder Hinsicht aus. Er mochte fühlen, daß er an diesem Hofe seiner Bedeutung nach eingeschätzt wurde und daß er als eine der unumschränkt führenden Persönlichkeiten der Akademie betrachtet wurde. Sein und seiner Familie Ansehen wurde demjenigen des einheimischen Adels gleichgestellt und ist es nach Eulers Tode geblieben. Zum Ankauf eines Hauses wurden Euler von der Monarchin 8000 Rubel geschenkt. So könnte man annehmen, daß sich Euler in seiner neuen Stellung außerordentlich wohl gefühlt hätte, wenn nicht ein beginnender Altersstar sein einziges noch erhaltenes Auge bedroht hätte. Er wurde 1771 von dem berühmtesten Staroperateur der damaligen Zeit, dem Freiherrn von Wenzel, operiert. Der Sohn Wenzels hat die Operation ausführlich in seinem Buche [1]) beschrieben. Diese schien zuerst Erfolg zu versprechen. Euler konnte wieder etwas sehen; aber nach wenigen Tagen stellte sich der alte Zustand ein. Euler behalf sich dank seinem phänomenalen Gedächtnis von nun an so, daß er sich einen Kreis von Schülern (worunter auch sein Sohn) heranzog, mit denen er um einen Schiefertisch herum die Probleme und deren Lösung besprach. Die Schüler schrieben die nötigen Notizen auf den Tisch. Ja, Euler, dem immer noch ein Schimmer von Licht geblieben war, schrieb selbst in großen Charakteren öfters mit Kreide auf den Tisch. Nachher verfaßten die Schüler aus den Notizen Abhandlungen, die sie Euler vorlasen. Auch alle Neuerscheinungen wurden Euler vorgelesen. Dank diesen einzigartigen Umständen kann man bis zu Eulers Tod in keiner Weise ein Nachlassen seiner geistigen Produktion beobachten.

Noch einen zweiten großen Verlust erlitt Euler zu Beginn seines zweiten Petersburger Aufenthaltes. Er verlor 1773 seine Gattin, mit der er 40 Jahre zusammengelebt hatte. Zum Glück fand er in der Halbschwester der Verstorbenen, *Salome Abigael Gsell*, eine zweite Frau. Die Heirat fand 1776 statt. Ohne ihre Pflege und Fürsorge wäre das Leben für Euler nicht möglich gewesen.

---

[1]) De Wenzel: Traité de la Cataracte avec des observations, Paris 1786, p. 135. Über die Augenkrankheiten Eulers siehe auch: Rud. Fueter: Über eine Eulersche Beweismethode in der Zahlentheorie, Schweiz. med. Wochenschrift, 69. Jahrgang, Nr. 43, p. 103.

Sehen wir jetzt, welche wissenschaftlichen Leistungen Euler in dieser Zeit vollbrachte. Zuerst ist die Abfassung seiner:

Vollständige Anleitung zur Algebra. Erster Theil. Von den verschiedenen Rechnungs-Arten, Verhältnissen und Proportionen, St. Petersburg 1770.
Vollständige Anleitung zur Algebra. Zweyter Theil. Von Auflösung algebraischer Gleichungen und der unbestimmten Analytic. St. Petersburg 1770
(Opera omnia, series I, vol. 1)

zu nennen, ein epochemachendes Werk, das wieder in alle Kultursprachen übersetzt wurde. Eine russische Übersetzung war schon 1768 erschienen. Seine Entstehungsgeschichte gibt Anlaß, wieder auf das Problematische der Familientradition hinzuweisen. Fuß berichtet nämlich, daß Euler dieses Buch nach seiner Erblindung verfaßt habe, sozusagen, um sein Gedächtnis zu erproben. Diese Mitteilung ist mit Vorsicht aufzunehmen. Aller Voraussicht nach hat Euler schon 1765 in Berlin angefangen, die Algebra seinem Diener, einem ungebildeten Schneidergesellen, zu diktieren. Dieses Verfahren schlug Euler offenbar ein, um zu sehen, ob er seinen Stoff so einfach vortragen könne, daß auch ein mittelmäßig begabter Laie denselben sich zu eigen machen könne. Der Diener mußte den Stoff verarbeiten und die Rechnungen selbständig ausführen. Das Experiment ist nach Aussage Eulers völlig geglückt. So sehen wir, daß Euler schon im 18. Jahrhundert *das*, was wir heute einen Volkshochschulkurs nennen würden, mit Erfolg durchgeführt hat. In dieser Hinsicht war das Buch epochemachend und ist es bis heute geblieben. Denn es begnügt sich nicht nur etwa, die einfachsten algebraischen Grundsätze zu entwickeln, sondern führt in die sublimsten Details der *unbestimmten Analysis* ein. Möge sein Geist auch heute noch unsern Mittelschulunterricht befruchten und beleben! Wie schön wäre es, wenn der Mittelschüler gleich jenem Schneidergesellen selbst einzelne Probleme unter Eulers Anleitung durchdenken dürfte!

Als zweites großes Werk des zweiten Petersburger Aufenthaltes ist die 1768 verfaßte und in den Jahren 1769—1771 erschienene Dioptrik zu nennen:

Dioptricae pars prima continens librum primum, de explicatione principiorum, ex quibus constructio tam telescopiorum quam microscopiorum est petenda.
Dioptricae pars secunda, continens librum secundum, de constructione telescopiorum dioptricorum cum appendice de constructione telescopiorum catoptrico-dioptricorum.
Dioptricae pars tertia, continens librum tertium, de constructione microscopiorum tam simplicium, quam compositorum.
(Opera omnia, series III, vol. 3 und 4)

Dieses Werk bildet den Höhepunkt und Abschluß aller Eulerschen Untersuchungen über Optik, speziell über das Verhalten der Lichtbündel. Es ist in seiner gewohnten Klarheit die Grundlage für die optische Industrie.

In den rein mathematischen Abhandlungen dieser Jahre sehen wir ein deutliches Überwiegen der *zahlentheoretischen Untersuchungen*. Euler trat hier in wissenschaftlichen Wettstreit mit dem großen *Lagrange*, der verschiedene zahlentheoretische Sätze zuerst bewiesen hat, wie die Reduktion der binären quadratischen Formen, den Wilsonschen Satz u. a. m. Euler gab seinen neuen einfachen Beweis des Wilsonschen Satzes (Opera omnia, series I, vol. 4, p. 91), entdeckte die Primitivwurzeln (Opera omnia, series I, vol. 3, p. 253 u. ff.) und untersuchte die sogenannten «numeri idonei», die als Diskriminanten quadratischer binärer Formen nur eine Klasse in jedem Geschlechte erzeugen. Insbesondere aber beschäftigte er sich eingehend mit der Lösung diophantischer Gleichungen und entwickelte eine Unmasse neuer Gesichtspunkte und Methoden.

Bei dem Problem der «numeri idonei» wollen wir einen Moment verweilen und die betreffenden Gedankengänge Eulers etwas näher zergliedern, weil sie besonders tief in Eulers Forschungsmethode Einblick gewähren. Der Ausgangspunkt ist das Problem der *großen Primzahlen*, auf das er durch die früher schon formulierte Fermatsche Behauptung geführt worden ist: Es soll entschieden werden, ob eine vorgelegte «große» Zahl, z. B. 2232037 oder 1000009 Primzahl sei oder nicht! Das Sieb des Eratosthenes kann natürlich die Frage entscheiden, aber als Methode ist sie viel zu langwierig. Euler erkennt den Zusammenhang des Problems mit der von ihm entwickelten Theorie der Zerlegung von Zahlen in die Summe von zwei Quadraten, die scheinbar nichts mit ihm zu tun hat. Euler hatte nämlich als erster den Satz bewiesen (Opera omnia, series I, vol. 2, p. 314), daß jede Primzahl der Form $4n+1$ in die Summe von zwei Quadraten zerlegbar ist, und daß umgekehrt jede Zahl, die nur auf eine Weise in die Summe von zwei Quadraten zerlegbar ist, eine Primzahl sein muß. Da also:

$$2232037 = 1^2 + 1494^2$$

nur auf diese eine Weise zerlegbar ist, muß sie Primzahl sein. Dagegen ist:

$$1000009 = 1000^2 + 3^2 = 972^2 + 235^2$$

also keine Primzahl (Opera omnia, series I, vol. 4, p. 245). Aus den zwei Darstellungen kann man sehr leicht die Teiler berechnen. Euler ließ es nicht bei dieser Tatsache bewenden, sondern suchte nach Methoden, um die Rechnung zu vereinfachen. Ist n die Zahl, die man auf ihre Eigenschaft als Primzahl prüfen möchte, so müßte man eigentlich von n alle Quadratzahlen kleiner als $n/2$ subtrahieren und zusehen, ob ein Quadrat übrigbleibt. Dies ist nach Eulers Entwicklungen nicht nötig, da seine Theorie der quadratischen Reste ihm erlaubt, nur Quadratzahlen zu subtrahieren, deren Basis bestimmte Restklassen durchlaufen. Ist z. B. n von der Form $3n+2$, so darf keines der Quadrate durch 3 teilbar sein, weil das Quadrat einer nicht durch 3 teilbaren Zahl $\equiv 1 \pmod{3}$ ist (Opera omnia, series I, vol. 3, p. 115). Euler gibt für diese Ausführungen ein ungeheures Zahlenmaterial an, wie etwa die Abhandlung: «*De tabula numerorum primorum usque ad millionem et ultra continuanda in qua simul omnium numerorum non primorum minimi divisores exprimantur*» (Opera omnia, series I, vol. 3, p. 359) zeigt.

Dieses neue Verfahren hatte den Mangel, daß es nur für Zahlen der Form $4n+1$ angewandt werden kann und zudem immer noch ziemlich viel Zeit beansprucht. Nun hatte Euler die Theorie der Zerlegung der Zahlen in die Summe von zwei Quadraten x^2+y^2 auf die Zerlegung in x^2+2y^2 und x^2+3y^2 ausgedehnt (Opera omnia, series I, vol. 4, p. 174 u. ff.). Auch hier gelten dieselben Sätze wie für die Zerlegung in $x^2 + y^2$. Dagegen ergab die Zerlegung in $x^2 + 11y^2$ andere Verhältnisse. Z. B. ist $15 = 2^2 + 11 \cdot 1^2$ nur auf diese Weise zerlegbar, trotzdem es keine Primzahl ist. Dadurch entstand für Euler das neue Problem, alle natürlichen Zahlen m anzugeben, für die der Satz gilt: Wenn eine Zahl n auf eine und nur eine Weise in der Form:

$$n = x^2 + my^2; \quad x, y \text{ teilerfremd},$$

darstellbar ist, so ist sie eine Primzahl. Diese Zahlen m nannte er passende Zahlen, «numeri idonei»; 1, 2, 3, 5 sind solche, dagegen 11 nicht. Das ganze Problem (ohne Beweise) ist sehr schön in einem Brief an Béguelin dargestellt:

Extrait d'une lettre de M. Euler à M. Béguelin (Berlin 1776)
(Opera omnia, series I, vol. 3, p. 418).

Wie packt Euler die Aufgabe an, alle «numeri idonei» zu berechnen? Eigentlich müßte man für jedes m unendlich viele Zahlen n auf ihre Darstellbarkeit durch $x^2 + my^2$ prüfen. Da dies unmöglich ist, sucht Euler nach einem Satze, der das Problem auf endlich viele Entscheidungen zurückführt. Er findet ihn durch folgendes Resultat: Für jedes m, das *keine* der «numeri idonei» ist, gibt es eine natürliche Zahl *kleiner als* $4m$, die nur auf eine Weise durch $x^2 + my^2$ darstellbar ist, trotzdem sie *keine* Primzahl ist (Opera omnia, series I, vol. 4, p. 317). In der modernen Zahlentheorie heißt dies, daß in jeder Idealklasse des Körpers $k(\sqrt{-m})$ (oder Ringes) ein solches Ideal auftritt, dessen Norm kleiner als $4m$ ist. Und jetzt kann Euler alle «numeri idonei» ausrechnen; er setzt die Rechnung bis über $m = 10\,000$ fort. Dabei macht er die merkwürdige Entdeckung, daß nach $m = 1848$ keine weiteren passenden Zahlen mehr gefunden werden. Im ganzen existieren 65 «numeri idonei», die Euler sämtliche angibt[1]. Sie erhielten später durch Gauss' «Disquisitiones arithmeticae» die obengenannte besondere zahlentheoretische Bedeutung (Gauss' Werke, Bd. 1, 1870, p. 366 u. ff.; siehe auch die Ausführungen in der Vorrede zum vol. 4 der Opera omnia, series I, p. XVI). Natürlich konnten Euler und später Gauss mit ihren Hilfsmitteln noch nicht beweisen, daß es wirklich nur endlich viele «numeri idonei» gibt. Dieses tiefliegende schwierige Problem ist erst in neuester Zeit durch *Heilbronn* und *Chowla* bewiesen worden (1934).

Fassen wir nochmals zusammen, wie Euler arbeitet. Er geht von einem ganz einfachen Problem aus, womöglich von einem Zahlenbeispiel (Große Primzahl). Begabt mit einer fabelhaften Intuition bringt er dieses in Zusammenhang mit allgemeinen Theorien (Zerlegung der Zahlen in die Summe von zwei Quadraten, Quadratische Reste), mit deren Hilfe er auf einfachste Weise die merkwürdigsten Resultate findet. Diese führen ihn zu weitgehenden Rechnungen, aus denen er wieder intuitiv neue Folgerungen zieht (Endliche Zahl der «numeri idonei»), die die mathematische Forschung bis zur neuesten Zeit beschäftigten. So ist er einer der anregendsten Mathematiker, dessen Werk immer wieder zu neuen Arbeiten Anlaß gibt.

Neben der Zahlentheorie leistete Euler auch in der Analysis Erstaunliches. Alles

---

[1] Siehe das Verzeichnis der «numeri idonei» am Schlusse, p. 24.

anzuführen ist unmöglich. Es sei nur auf die Berechnung der nach ihm genannten Integrale und auf seine Theorie der *Gammafunktion* hingewiesen. Weiterhin ist die *Variationsrechnung* Euler zeitlebens ans Herz gewachsen geblieben. Er hat sie auch in diesen Lebensjahren bereichert.

Neben den rein mathematischen Forschungen wurden die Anwendungen nicht vergessen. Seine Mondtafeln sind lange dem Astronomen maßgebend gewesen. Er beschäftigte sich eingehend mit der Frage der Witwenpensionskassen und gab eine neue Methode an, um ihre Prämien zu berechnen. Sein großes Werk über Führung und Konstruktion von Schiffen ist in alle Sprachen übersetzt worden und galt als Grundlage der Marinewissenschaft.

Diese beispiellose Fruchtbarkeit machten Euler zum berühmtesten Forscher seiner Zeit. Er war Mitglied aller führenden wissenschaftlichen Gesellschaften und wurde mit Preisen der Akademien und Gunstbeweisen der Fürsten überschüttet. Als Euler am 18. September 1783 mitten in der Arbeit einen Schlaganfall erlitt, dem er nach wenigen Stunden erlag, wußte die Petersburger Akademie, daß sie ihren Besten verloren hatte und daß sie keinen Ersatz für ihn finden werde. Sie ehrte sein Andenken entsprechend. Seine Familie blieb in Rußland, von allen hochgeehrt.

Versuchen wir zum Schlusse neben dem *Forscher* Euler uns auch ein Bild des *Menschen* Euler zu machen. Über sein Äußeres sind wir gut orientiert, da eine große Zahl von Ölgemälden und Stichen aus den verschiedenen Lebensstufen Eulers existieren. Das beste Porträt ist wohl dasjenige des bekannten Basler Malers *Em. Handmann*, das sich in der Aula der Basler Universität befindet und aus der Berliner Zeit stammt. Nach *A. Speiser*[1]) hat Euler das typische Aussehen eines Baslers, wie man ihn noch heute oft in den Straßen Basels antrifft. Sein Umgang und wohl auch seine Lebenshaltung waren von einer bekannten schweizerischen Einfachheit. Sein Schüler Fuß sagt von ihm in der Lobrede: «Die Kunst, das gelehrte Air in der Studierstube abzulegen, seine Überlegenheit zu verbergen und sich zu jedermanns Fähigkeiten herab zu stimmen, ist zu selten, als daß man den Besitz derselben Eulern nicht zum Verdienst anrechnen sollte.» Er hatte sicherlich nichts «Bonzenhaftes» an sich, so daß seine vielen Besucher, wie Fuß weiter meldet, ihn «mit einer Mischung von Erstaunen und Bewunderung» verließen. Das waren sie bei andern Gelehrten nicht gewohnt! Man kann annehmen, daß er nie von sich selbst sprach; denn in seinen unzähligen Schriften findet man keine Stelle, wo er sich selbst in ein rühmliches Licht stellt; er spricht stets nur von andern, wie etwa von *Lagrange*, in Worten größter Bewunderung. Seinen Basler Dialekt hat er bis zum Tode rein bewahrt, reiner als mancher Basler, der ihn besuchte. Ja, die Schweizer Unart, das Wörtchen «eben» gar zu oft zu verwenden, hat er sogar auf sein Lateinisch übertragen, indem er das Wörtchen «plane» beständig braucht. Siehe etwa den Satz aus einer 1780 verfaßten Abhandlung: «... tum vero imprimis omnes *plane* solutiones requiruntur, quod quomodo fieri sine ambagibus possit, in hac dissertatione novo *plane*

---

[1]) A. Speiser: Die Basler Mathematiker, 117. Neujahrsblatt, herausg. von der Gesellschaft zur Beförderung des Guten und Gemeinnützigen. Basel 1939, p. 40.

modo ostendere constitui. Notandum autem hic est a, b, ⅃ arbitrio nostro *plane* esse relictas» (Opera omnia, series I, vol. 5, p. 71).

Alle Freunde Eulers rühmen seinen Gerechtigkeitssinn und seinen selbstlosen Charakter. Er konnte leicht aufbrausen; aber sein Zorn verschwand auch ebenso schnell. Seine Unterhaltung hatte gewiß nichts von der Geistreichheit eines *Voltaire* oder *Diderot*, befriedigte aber durch die Tiefe der Kenntnisse. Dazu trat die aus seinem Elternhause mitgebrachte Religiosität, die er sich zeitlebens bewahrte. Es unterliegt keinem Zweifel, daß alle diese Eigenschaften, die im 18. Jahrhundert so eminent unmodern waren, dem *Menschen* Euler unter seinen französischen Fachkollegen keine großen Sympathien gewannen. Sie zollten der Persönlichkeit Eulers wenig Gerechtigkeit. Dies drückt sich in fast allen Nachrufen auf Euler in den verschiedenen Akademien aus. Dem Nachruhm Eulers tat dies keinen Schaden. Im Gegenteil stieg und steigt immer noch seine Bedeutung. Euler erscheint uns heute als ein einzigartiges Phänomen. Man darf ihn ruhig als eine der bedeutendsten Stützen unserer heutigen Zivilisation anerkennen.

Am 6. September 1909 hat die Schweizerische Naturforschende Gesellschaft in Lausanne den großartigen und kühnen Entschluß gefaßt, die *Opera omnia Eulers* herauszugeben. Sie wurde hierzu ermuntert durch die Russische und Preußische Akademie der Wissenschaften. Es sollte dem großen Forscher Leonhard Euler das denkbar schönste Denkmal gesetzt werden. Der Entschluß war kühn wegen des ungeheuren Umfanges der Eulerschen Publikationen. Nach dem vorliegenden neuesten Plane [1] — er mußte im Laufe der Jahre und Erfahrungen, auch der beiden Weltkriege wegen, verschiedentlich revidiert werden — sind in den ersten drei Serien 72 Quartbände vorgesehen. Dazu treten noch wenigstens 6—7 Bände mit den Notizbüchern (Adversaria) und Briefen, so daß im ganzen mit 80 Quartbänden zu rechnen ist. Von diesen sind heute (1947) 32 gedruckt und erschienen. Die Finanzierung konnte ohne jede Subvention von seiten des Staates, allein mittels freiwilliger Beiträge, insbesondere von Industrien und Banken, aber auch von zahllosen Einzelpersonen geregelt werden. Eine besondere Stütze ist die *Leonhard Euler-Gesellschaft*, deren Mitgliederbeiträge ganz dem Werke zugutekommen. Das Unternehmen darf wohl als größtes bibliographisches Werk bezeichnet werden. Seine Durchführung war eine Pflicht, einmal weil es galt, Euler die verdiente Anerkennung durch sein Heimatland zu zollen, anderseits weil das Werk lebt und immerzu die heutige Forschung befruchtet. Die Lebensarbeit Eulers ist noch voller Schätze, deren Hebung erst durch die Herausgabe seiner Werke ermöglicht wird. Die Herausgeber jedes einzelnen Bandes leisten durch ihre Vorworte, in denen sie die Bedeutung der einzelnen Abhandlungen von unserm heutigen Standpunkt aus beleuchten, eine überaus wertvolle Vorarbeit.

Möge das große Werk fort und fort wirken und unsere Zivilisation wie bisher befruchten.

RUDOLF FUETER, Zürich.

---

[1]) A. Speiser: Einteilung der sämtlichen Werke Leonhard Eulers. Commentarii Mathematici Helvetici, vol. 20, p. 288. Zürich 1947.

ZEITTAFEL

1707 (15. April) Geburt in Basel.
1720 (9. Oktober) Immatrikulation an der philosophischen Fakultät der Universität Basel.
1723 (29. Oktober) Immatrikulation an der theologischen Fakultät der Universität Basel.
1724 (8. Juni) Magister der philosophischen Fakultät der Universität Basel.
1727 (5. April) Abreise von Basel.
1727 (17. Mai) Ankunft in Petersburg.
1730 Professor der Physik an der Petersburger Akademie.
1733 Professor der Mathematik an der Petersburger Akademie.
1733 (27. Dezember) Verheiratung mit Katharina Gsell.
1735 Verlust des rechten Auges.
1736 Erscheinen der «Mechanik».
1738 Erscheinen der «Rechenkunst».
1741 (25. Juli) Ankunft in Berlin.
1743 Entdeckung der Knickformel.
1744 Gründung der Berliner Akademie.
Direktor der mathematischen Klasse.
1745 Erscheinen der «Grundsätze der Artillerie».
1747 Erscheinen der «Göttlichen Offenbarung».
1748 Erscheinen der «Introductio».
1749 Entdeckung der achromatischen Linse.
1753 Erscheinen der Arbeiten über Turbinenbau.
1755 Erscheinen der «Differentialrechnung».
1758 Entdeckung der Polyederformel.
1766 (9. Juni) Abreise von Berlin.
1766 (17. Juli) Ankunft in Petersburg.
1768 Erscheinen der «Lettres à une princesse allemande».
1768-1770 Erscheinen der «Integralrechnung».
1769-1771 Erscheinen der «Dioptrik».
1770 Erscheinen der «Algebra».
1771 Staroperation des linken Auges. Erblindung.
1773 Tod der Gattin Eulers.
1776 Wiederverheiratung.
1783 (18. September) Tod.

TABELLE DER «NUMERI IDONEI»

$m =$	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	10,
	12,	13,	15,	16,	18,	21,	22,	24,	25,	28,
	30,	33,	37,	40,	42,	45,	48,	57,	58,	60,
	70,	72,	78,	85,	88,	93,	102,	105,	112,	120,
	130,	133,	165,	168,	177,	190,	210,	232,	240,	253,
	273,	280,	312,	330,	345,	357,	385,	408,	462,	520,
	760,	840,	1320,	1365,	1848.					

Bild auf Titelblatt: Weberscher Stahlstich nach dem Ölgemälde von *Em. Handmann* (1756).

Bild auf Seite 15: Kupferstich nach dem Gemälde von *Darbes* (1780).