Zeitschrift: Elemente der Mathematik (Beihefte zur Zeitschrift)

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 12 (1956)

Artikel: Isaac Newton

Autor: Fleckenstein, J.O.

Kapitel: 1: Die ideengeschichtlichen Voraussetzungen der Entdeckung des Infinitesimalkalküls durch Isaac Newton

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-7615

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 15.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

1. Die ideengeschichtlichen Voraussetzungen der Entdeckung des Infinitesimalkalküls durch Isaac Newton

We all know that the triomph for a historian of science is to prove that nobody ever discovered anything. *Jacques Hadamard*

Aus den Newton Tercentenary Celebrations der Royal Society vom 15. bis 19. Juli 1946.

Schon die Zeitgenossen haben NEWTONS säkulare Bedeutung empfunden. Aber wie der Hymnus von POPE

'Nature and Natures laws lay hid in night
God said: let Newton be, and all was light'

andeutet, wurde diese Bedeutung vor allem in der Physik erblickt. Das Gravitationsgesetz vollends erschien den Enzyklopädisten des 18. Jahrhunderts, den VOLTAIRE, D'ALEMBERT, DIDEROT, gleichsam als Inbegriff aller mechanischen Naturgesetzlichkeit. Ihre popularisierende Schreibweise, welche dem grossen Publikum NEWTON als den unsterblichen Gesetzgeber der Physik für alle Zeiten vorstellte, liess zwar seinen Namen zum Symbol werden, verdeckte aber den wissenschaftsgeschichtlichen Fortschritt in NEWTONS Hauptwerk, den *Philosophiae naturalis principia mathematica* (London 1687). Denn inhaltlich bedeutete das Newtonsche Gravitationsgesetz nur die Anwendung der Formel von HUYGENS für die Zentralkraft (*Horologium oscillatorium*, den Haag 1659) $\mathfrak{K} = v^2/\varrho$ (v Bahngeschwindigkeit, ϱ Krümmungsradius der Bahnkurve) auf das dritte Keplersche Gesetz $a_i^3 : a_k^3 = T_i^2 : T_k^2$. Da man die Bahnkurve sukzessive durch die Oskulationskreise approximieren kann, im Kreis aber $v = 2\pi r/T$ ist, so folgt im Kreisfall aus $\mathfrak{K} = v^2/r$ für $T^2 = c\, r^3$ sofort ein Zentralkraftgesetz von der Form $\mathfrak{K} = 1/r^2$. Die mathematische Bedeutung des Newtonschen Gesetzes lag vielmehr in der Möglichkeit, das Sonnensystem als ein n-Körperproblem zu behandeln, indem man gewissermassen in den Differentialgleichungen

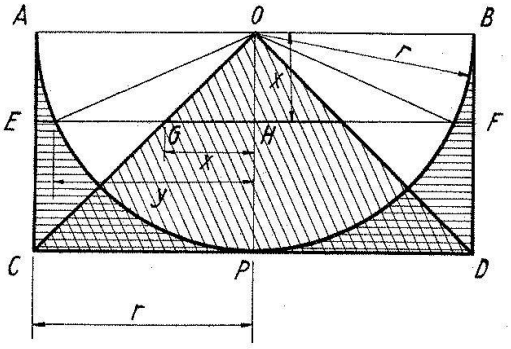
$$m_i \frac{d^2 \mathfrak{r}_i}{dt^2} = \mathfrak{K}_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

für die störenden Kräfte die Formen $\mathfrak{K}_i = m_i\, m_k / r_{ik}^2$ einsetzen konnte. Damit war zum ersten Male die allgemeine Dynamik «more geometrico» deduktiv ableitbar geworden, und diese Ableitungen hat NEWTON selber im kanonischen Rahmen seines Hauptwerkes gegeben.

Freilich gab er diese Ableitungen nicht in der Sprache der *Analysis*. Die Differentialgleichungen für die Bewegungen der Massenpunkte implizieren nämlich den Infinitesimalkalkül. Diesen aber benutzte er in den *Principia* absichtlich nicht, obwohl er wahrscheinlich mehrere der geometrischen Hilfssätze, welche er als Lemmata dem Werk vorausschickt, für sich allein mit infinitesimalen Methoden vorher abgeleitet hat und sie nur post festum synthetisch dem Publikum vorführt; mit diesen

kann dann allerdings alles weitere nach der gewohnten euklidischen Methode der Schule hergeleitet werden. In den geometrischen Hilfssätzen, welche «De methodo rationum primarum & ultimarum, cujus ope sequentia demonstrantur» (Lib. I, Sect. I) überschrieben werden, steckt die eigentliche mathematische Substanz der *Principia*, und an einer Stelle verrät sich NEWTON sogar, indem er (Liber II, Sect. II) seinen Fluxionskalkül preisgibt und von der Fluxion $n\,x^{n-1}$ der Fluente x^n spricht.

Dem Physiker NEWTON erschien ein formaler Kalkül für variable infinitesimale Grössen nicht besonders wichtig. Zwar liegen variable Infinitesimalia jedem dynamischen Prozess zugrunde, aber NEWTON interessierte sich mehr für diesen Prozess selber als für seine kalkulatorische Beschreibung, die er als sekundär und nur als ad hoc brauchbar ansah. Immerhin benutzt NEWTON wenigstens einen für dynamische Überlegungen zurechtgemachten Infinitesimalkalkül, während der Begründer der Dynamik, GALILEI (1564–1642), einen solchen Kalkül, das heisst eine Abbildung der Dynamik auf Algebra gar nicht kennt.



Figur 1

GALILEI hat aber dagegen sich mit besonderem Vergnügen der Betrachtung variabler Grössen gewidmet. In seinen *Dialoghi delle Scienze nuove* (1638), in welchen er die Grundlagen der Mechanik darstellt, beschäftigt er sich ausführlich mit «Paradoxien des Unendlichen», indem er hinschwindende Grössen betrachtet, wie das berühmte Beispiel (1. Buch) des Rasiermesserrundes (Scodella), welches als Restfigur beim Schnitt der Ebene EF mit dem von der Halbkugel APB ausgehöhlten Zylinder $ABCD$ übrigbleibt. Man erkennt leicht, dass der Kegel $2\,OGH = (\pi x^2)\,x/3$ der Scodella in $AEBF$ volumgleich ist, da deren Grundfläche $\pi r^2 - \pi y^2 = \pi r^2 - \pi (r^2 - x^2)$ ist. GALILEI verfolgt nun das Zusammenschrumpfen der Scodella und des Kegels, wenn die Schnittebene nach oben parallel bewegt wird. In der Limite entartet der infinitesimale Kegel zum Punkt O, während die Scodella zu einem Kreisring wird, woraus GALILEI die Paradoxie des Unendlichen herleitet, dass der Punkt einer Kreislinie, ja allen Kreislinien gleich ist, so dass überhaupt alle Kreislinien untereinander gleich sind. Ohne eine algebraische Darstellung der Rauminhalte der beiden Figuren ist in der Tat nur schwer einzusehen, dass die betreffenden Infinitesimalia in verschiedener Ordnung gegen Null gehen.

NEWTON gilt allgemein als der Vollender der Galileischen Dynamik, wobei einige ältere Historiker noch phantasievoll auf die symbolische Tatsache hinweisen, dass NEWTON im Todesjahr GALILEIS geboren wurde. GALILEI hat das erste dynamische Naturgesetz, das Gesetz des freien Falles, gefunden. Fast zwei Jahrtausende hatte die Menschheit sich vergeblich um die einfachste Zustandsänderung in der Natur bemüht; dem antiken Denken war sie verschlossen, weil erstens die Intuition des Trägheitsgesetzes und zweitens die Fassung des Begriffs der kontinuierlichen Veränderung zur Ableitung selbst des einfachsten Naturgesetzes notwendige Voraussetzungen sind. Für das antike Denken war mathematische Physik unmöglich – abgesehen von dem Spezialfall der Statik –; es führt nämlich keine begriffliche Brücke von der Welt der festen geometrischen Gestalten, die allein die antike Mathematik repräsentiert, zur veränderlichen Sinnenwelt der physikalischen Prozesse, welche die moderne Naturwissenschaft seit der Renaissance zu erklären versucht. Zwar über-

wand GALILEI schon allein mit seinem Trägheitsgesetz den naiven Standpunkt der Antike, dass gemäss dem metaphysischen Prinzip des ARISTOTELES der Proportionalität zwischen Zustandsänderung und einwirkender Kraft die Geschwindigkeiten des fallenden Körpers die Kräfte messen müssen, indem er erkannte, dass die gleichförmige (unbeschleunigte) Bewegung – entgegen der Impetustheorie der mittelalterlichen Scholastik – keinerlei Kraft zur Aufrechterhaltung erfordert, also selber als ein Zustand wie die Ruhe anzusehen ist (Gedankenexperiment der schiefen Ebene mit der Neigung Null!), so dass die Kräfte durch die Geschwindigkeitsänderungen gemessen werden müssen.

Aber dass die Kräfte durch die zweiten Derivierten gemessen werden, war eine Erkenntnis, zu der nicht einmal ein DESCARTES, geschweige denn die Schule der Kartesianer gelangte. GALILEI hat dagegen den Begriff der Änderung einer Änderung erfasst und kann damit – wenn auch ohne jegliche algebraische Formalisierung – das Fallgesetz ableiten. Getreu der scholastischen Tradition begreift er die Geschwindigkeit (in den Jugendschriften «Forma motus» genannt) als das Indivisible der Bewegung. Sie erzeugt in stetiger Variation die Bewegung. Die Bewegung ist also, modern ausgedrückt, das Integral aller Geschwindigkeiten über die Zeit. Und so stellt GALILEI in der Tat den beim Fall zurückgelegten Weg als den Flächeninhalt des Dreiecks mit den Seiten t und $v = g\,t$ dar. Die lineare Funktion $g\,t$ ist nun der einfachste Prozess einer Änderung des Geschwindigkeitsindivisibels. Mehr als das Fallgesetz hat GALILEI in der Dynamik nicht finden können, denn es fehlte ihm die Möglichkeit, seine funktionell-dynamischen Vorstellungen zu kalkülisieren und damit den Infinitesimalkalkül zu erfinden.

Es ist ein merkwürdiges Faktum, dass GALILEI und seine Florentiner Schule der CAVALIERI (1598–1647), TORRICELLI (1608–1647) und RICCI (1619–1692) die algebraische Koordinatenmethode des DESCARTES nicht kannten oder kennen wollten, wie denn überhaupt gleichsam als Präludium zu dem späteren grossen Prioritätsstreit zwischen NEWTON und LEIBNIZ schon ein halbes Jahrhundert vorher ein Streit zwischen den Florentinern und den Kartesianern über diverse Tangenten- und Quadraturprobleme stattfand.

Den Kartesianern gelang es nämlich, zunächst für alle algebraischen Kurven die Tangenten zu bestimmen, indem sie diverse Methoden ersannen, aus der Differenz $f(x_2) - f(x_1)$ den Faktor $x_2 - x_1$ herauszuziehen, so dass der sinnlose Differentialquotient $0/0$ nicht auftritt, indem man in dem Grenzwert

$$\lim_{x_2 \to x_1} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{x_2 - x_1}{x_2 - x_1} F(x_2, x_1)$$

vorher den kritischen Wert $x_2 - x_1$ herauskürzen kann (Verfahren von FERMAT, DE SLUSE u. a.). DESCARTES selber vermeidet überhaupt die Auffassung der Tangente als Grenzfall der Sekante, indem er sie rein algebraisch aus der Diskriminantenbedingung für zusammenfallende Schnittpunkte einer Geraden mit der betreffenden Kurve gewinnt. Hiermit gelingt es zwar den Kartesianern, Kinematik zu treiben und sie auf Algebra abzubilden, aber die Dynamik bleibt ihnen verwehrt; und damit ist die kartesische Physik nur eine Kinematik komplizierter höherer algebraischer Kurven.

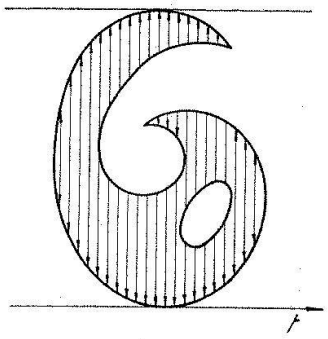
Auch die Integration derartiger algebraischer Kurven wurde von den Kartesianern geleistet. Hatte ARCHIMEDES geometrisch mittels statischer Hilfsüberlegungen schon schwierigere Integrationen ausgeführt und insbesondere die Integration von $\int x^2\,dx$ und $\int \sin x\,dx$ geleistet, so ging FERMAT (1608–1665) mittels eines raffinierten Inter-

vallschachtelungsverfahrens darüber hinaus, indem er allgemein die Integration $\int x^n\,dx = x^{n+1}/(n+1)$ für alle rationalen n leistete. Er besass ferner spezielle Verfahren der partiellen Integration, und seine algebraische Virtuosität erlaubte ihm, mittels geschickter Substitutionen Ausdrücke zu rationalisieren und so beispielsweise das berühmte Integral

$$\int_0^\infty \frac{a^3}{x^2+a^2}\,dx = \frac{\pi}{2}\,a^2$$

zu gewinnen. PASCAL leistete allgemein die Kubatur hufförmiger Körper (1659) und sogar die Integration von speziellen transzendenten Ausdrücken der Form $\int \vartheta^m \cos^n\vartheta \sin\vartheta\,d\vartheta$. Trotzdem besassen die Kartesianer keinen allgemeinen Infinitesimalkalkül; ja er erschien ihnen überhaupt unmöglich, weil die unausgedehnten Infinitesimalia nicht «clare et distincte» zu erkennen seien.

Die Florentiner Schule GALILEIS aber benutzte dagegen ein neues infinitesimales Prinzip, welches als Methode über den archimedischen Rahmen der Antike hinausgriff, und das ihnen gestattete, ohne jede Algebra den virtuosen algebraischen Verfahren der Kartesianer Pari zu bieten. CAVALIERI schrieb ein zuerst von GALILEI selber intendiertes Werk über die Indivisibilienmathematik, *De geometria indivisibilibus continuorum* (Bologna 1635), in welchem die Kontinua nicht mehr im archimedischen Sinne additiv aus unendlichkleinen, aber extensiven Elementen statisch zusammengesetzt werden, sondern aus dem «Fluxus» eines Indivisibels entstehen. Und zwar gilt dabei der Punkt als das Indivisibel der Linie, die Gerade als das Indivisibel der Fläche und die Ebene als das Indivisibel des Raumkörpers. Das Flächenkontinuum entsteht beispielsweise aus dem Fluxus einer Geraden, welche je nach der Berandung desselben nach einem gewissen Gesetz an- und abschwillt, welches der Kartesianer in der Form $g(t)$ schreiben kann. Der entscheidende Denkschritt, welchen CAVALIERI vollzog, lag in der Erkenntnis, dass das Kontinuum aus dem kontinuierlichen Fluss eines *einzigen* sich stetig ändernden Indivisibels genetisch erzeugt wird und nicht durch statische additive Aneinanderlegung mehrerer verschiedener Indivisibilien entsteht.



Figur 2

Die komplizierte Terminologie der scholastischen Indivisibilientheorie hat freilich das Cavalierische Prinzip oft in Misskredit gebracht, insbesondere hat die «mésinterprétation cartésienne» zu Paradoxien geführt, an die sich eine lange Diskussion über die Indivisibilien anschloss, an welcher auch PASCAL teilnahm und die selbst heute noch den Kritikern des Cavalierischen Prinzips Argumente liefert, denen der Autor damals nur mit unbeholfenen Wendungen antworten konnte. So konnte bei dem bekannten Gegenbeispiel der Zerlegung eines Dreiecks durch Parallelen zur Höhe, welche nach dem Cavalierischen Prinzip die Flächengleichheit der beiden Zerlegungsdreiecke folgen lässt – weil alle entsprechenden Höhenparallelen als Indivisibilia von den Basisparallelen in gleichen Abständen gleich abgeschnitten werden –, CAVALIERI nur entgegnen, dass die Dichte der Parallelen (spissitudo) in den beiden Zerlegungsdreiecken verschieden sei, was sein Prinzip ausschliesse. Trotz der Allgemeinheit des Prinzips – die entsprechenden «modernen» Figuren in der *Geometria* von 1635 würde man in zeitgenössischen Werken kartesischer Mathematiker umsonst suchen – gelingt

es ihm aber nicht, begrifflich seine funktionellen Vorstellungen zu formulieren und klar auszudrücken, dass das Erzeugungs*gesetz* des Kontinuums gemäss der Umrandung desselben das entscheidende Motiv des neuen Infinitesimalprinzips sei, welches in der Tat zum ersten Mal in der Geschichte der Mathematik über ARCHIMEDES hinausgeht. Die ROBERVAL, FERMAT, PASCAL u. a. haben natürlich in ihren *Traités des indivisibles* diese wieder zu kartesischen Extensiva degradiert.

CAVALIERI gelang auf diesem Weg geometrisch die Bestimmung von $\int x^n\,dx$ bis $n = 9$, woraus er die Formel

$$\lim_{m\to\infty} \frac{1^n + 2^n + \cdots + m^n}{m^{n+1}} = \frac{1}{n+1}$$

für alle ganzzahligen n mittels einfacher Induktion erschliesst. TORRICELLI glückte später sogar die Integration von $\int x^n\,dx$ für alle rationalen n, ohne auch nur ein einziges Mal sich der algebraischen Methode des DESCARTES bedienen zu brauchen. Hierbei fand er ein infinitesimales Paradoxon, das ihn als würdigen Nachfolger seines Lehrers GALILEI ausweist. Der Flächeninhalt der Hyperbel

$$\int_a^\infty \frac{dx}{x}$$

ist unendlich, das Volumen des Rotationshyperboloides

$$\int_a^\infty \frac{dx}{x^2}$$

aber ist endlich, und zwar π/a. Dieses erste Resultat über Cauchy-Integrale

$$\int_x^\infty \frac{dx}{x^m}$$

leitet TORRICELLI durch Erzeugung des Hyperboloidvolumens aus den einzelnen Oberflächen der zylindrischen Hyperboloidröhren als Indivisibilien her.

Die Infinitesimalverfahren des Florentiner Kreises hat JAMES GREGORY (1638–1675) an Ort und Stelle während seiner italienischen Emigration als schottischer Stuart-Anhänger durch Vermittlung des Cavalieri-Schülers DEGLI ANGELI (1623–1697) kennengelernt. Wenn auch nicht nur durch GREGORYS Vermittlung die Florentiner Infinitesimalverfahren in England bekannt wurden – denn die Werke GALILEIS, CAVALIERIS und TORRICELLIS waren um die Mitte des 17. Jahrhunderts überall zugänglich –, so ist doch GREGORY durch seine Tangenten- und Quadraturmethoden einer der ersten englischen Pioniere des Infinitesimalkalküls geworden, welche der Entdeckung NEWTONS vorarbeiteten.

In Cambridge, wo der junge NEWTON als Schüler BARROWS studierte, war unterdessen der Boden für die fruchtbare Weiterbildung der Ideen GALILEIS vorbereitet worden. In den nordischen Ländern hatte sich die Renaissance zwar später, aber vielleicht mit um so grösserer wissenschaftlicher Methodik vollzogen. Ihr Platonismus, der bei GALILEIS empirischer Naturforschung immer noch wirksam bleibt – sind ihm doch die Fallgesetze gültig, auch wenn es keinen realen Körper gäbe, der jemals fallen würde, so dass dem Experiment nur die Aufgabe bleibt, nachträglich die Deduktionen des Verstandes zu illustrieren –, führte in Cambridge zu einem ausgesprochenen natur-

mystischen Neuplatonismus, als dessen bedeutendster Repräsentant neben GLANVILLE und CUDWORTH HENRY MORE (1614–1687) angesehen werden kann. Hatte schon PLATON im *Phileb* (17 A) illustriert, wie man durch stetige Bewegung des Unbegrenzten die begrenzten Dinge erzeugt (*σημεῖον ἀρχὴ γραμμῆς*), und später PROKLOS (412–485), in seinem berühmten *Euklid-Kommentar* die Ideen der Florentiner antizipierend, die Kontinua aus dem «Fluxus» der Punkte, Geraden usw. entstehen lassen, so gibt HENRY MORE diesen Vorstellungen die metaphysische Basis, indem er die Realität eines immateriellen Raumes und einer gleichmässig fliessenden Zeit postuliert.

Ein Verehrer MORES war ISAAC BARROW (1630–1677), der Lehrer NEWTONS in Cambridge. So sehr sich auch die Cambridger Schule im Kampf gegen die herkömmliche Scholastik mit dem französischen Kartesianismus, ja sogar mit dem Positivismus HOBBES' verband, das Ideal von BARROW blieb der Platonismus GALILEIS. BARROW aber kannte im Gegensatz zur Florentiner Schule die algebraischen Infinitesimalverfahren der Kartesianer. Zudem hatten die englischen Mathematiker schon mit beträchtlichen algebraischen und arithmetischen Leistungen aufgewartet (OUGHTRED, WALLIS). Die Zeit war für Cambridge reif geworden, durch Anwendung der algebraischen Methode des DESCARTES auf die dynamischen Vorstellungen des GALILEI den Infinitesimalkalkül zu erfinden.

Diese Erfindung wäre schon BARROW geglückt, wenn er seine Befangenheit in den geometrischen Vorstellungen des Florentiner Kreises und seine Abneigung gegen den algebraischen Formalismus überwunden hätte. Von der Richtigkeit des Cavalierischen Prinzips ist er überzeugt; er verteidigt die Indivisibilienmethode gegen die Angriffe des Kartesianers TACQUET S. J., welcher mit seiner strengen Kritik den Florentinern arg zu schaffen gemacht hatte. In dem Hauptwerk, den *Lectiones Geometricae; in quibus (praesertim) generalia curvarum linearum symptomata declarantur...* (London 1670) schreibt BARROW in der Lectio II: «... juxta methodum indivisibilium, omnium expeditissimam, et modo rite adhibeatur haud minus certam et infallibilem.» Ausführlich geht er in den ersten Lektionen auf die verschiedenen Arten der Bewegung, über das gegenseitige Verhältnis von Geschwindigkeit und Zeit und ihre Anwendung zur Erzeugung von Kurven ein. Er besitzt nicht nur den jeglicher kartesischen Dialektik unerreichbaren Begriff der Tangente als Grenzfall der Sekante mit dem daraus resultierenden infinitesimalen «triangulum characteristicum» mit den Seiten dx, dy, ds – freilich geometrisch als Dreieck, welches im Berührungspunkt aus Tangente, Subtangente und Ordinate gebildet wird –, sondern auch in geometrischer Form das allgemeine Umkehrtheorem $d/dt \int y(t)\, dt = y$, welches GALILEI nur in dem einfachsten Fall $y = g\,t$ (mit dem Dreiecksinhalt für das Integral beim freien Fall) kennt.

In Lectio IX und Lectio XI des Werkes werden in geometrischer Umschreibung Integration und Differentiation als inverse Operationen deklariert. In IX wird allgemein gezeigt, dass aus

$$R\,y = \int_0^x v\,dx$$

dann $R\,dy/dx = v$ folgt; in XI wird nachgewiesen, dass aus $R\,dy/dx = v$ weiter

$$R\,y = \int_0^x v\,dx$$

folgt.

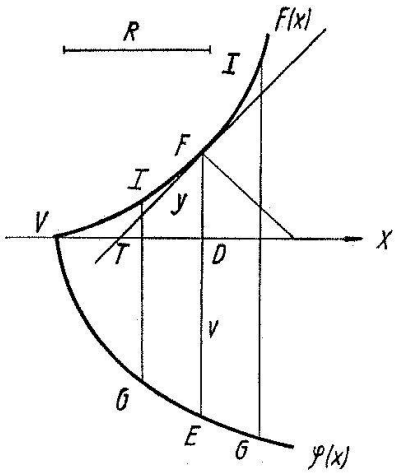
BARROW stellt sich die Kurve $VIFI$ von einem Punkt durchlaufen vor, dessen Projektion auf die X-Achse VD sich mit konstanter Geschwindigkeit R bewegt. Die Ordinate FD dieser Kurve aber wachse mit einer Geschwindigkeit, welche durch die Ordinate v der anderen Kurve $VGEG$ dargestellt wird. Dann ist also $dx/dt = R$; $dy/dt = v$, woraus $R\,dy/dx = v$ folgt. Die Tangente aber kann man nun einfach nach dem Prinzip des Bewegungsparallelogramms aus R und v als Resultante konstruieren. Die Quadratur, mit welcher GALILEI den mit konstanter Beschleunigung durchlaufenen Weg gefunden hatte, lieferte gerade den Zusammenhang zwischen y und dem Flächeninhalt

$$\int_0^x v\,dx,$$

der bei GALILEI leicht als Dreiecksinhalt zu bestimmen war, weil bei ihm $v = g\,t$, die Kurve $VGEG$ also eine Gerade war. In BARROWS Theorem stehen ferner die beiden Kurven in der Beziehung zueinander, dass die Ordinate y (bis auf den Faktor R) den Flächeninhalt

$$\int_0^x v\,dx$$

oder die Integralkurve von $VGEG$ darstellt und die Ordinate v umgekehrt die Derivierte von $VIFI$.



Figur 3

BARROW umschreibt dieses Umkehrprinzip mit einem geometrischen Satz, indem er den damals geläufigen Begriff der Subtangente benutzt. Dann kann er das Theorem mit den Worten umschreiben, dass in dem Fall, wo die Kurve $VIFI$ als $y = F(x)$ die Integralkurve von $VGEG$ als $v = \varphi(x)$ ist, die Subtangente DT stets gleich $R \cdot DF/DE$ ist. In der Tat ist nämlich allgemein die Subtangente (modern geschrieben) $S_T = y\,dx/dy$. Für $R \cdot DF/DE$ kann man aber $R\,y/v$ schreiben, so dass also aus $DT = Ry/v = y\,dx/dy$ sofort $R\,dy/dx = v$ folgt.

Es ist nun erstaunlich, zu welchen geometrischen Einzelresultaten BARROW mit seinem geometrisch verklausulierten Prinzip gelangt. Das gewöhnliche Debeaunesche Problem, welches in der Geschichte der Mathematik die erste Differentialgleichung repräsentiert und welches die Bestimmung der Kurve verlangt, für welche $y : S_T = 1 : (x - a)$ ist, verallgemeinert BARROW zu der Aufgabe, diejenige Kurve zu bestimmen, für welche $y/S_T = f(x)/(x - a)$ ist. Er diskutiert mehrere spezielle Fälle für $f(x)$ geometrisch und findet so zum Beispiel für den Fall, wo $f(x) = \sqrt{b\,x - x^2}$, also eine Kreisordinate ist, eine Zykloide als Lösung. Der Historiker muss allerdings notieren, dass auch GREGORY schon die Reziprozität der Differentiations- und Integrationsoperation – wenn auch nur implizit, ohne sich der Bedeutung, wie BARROW, bewusst zu sein, welcher dieselbe systematisch ausnutzt – gefunden hat: In seiner *Geometriae pars universalis* (Venedig 1667) beweist er einen Satz über Subtangenten geometrisch, welchen wir heute $\int S_T\,dy = \int y\,dx$ schreiben würden, für den er aber die Gleichheit von Flächeninhalten benutzt. Andererseits hat GREGORY auch in der Reihenlehre (Interpolation, gliedweise Integration von entwickelten Irrationalitäten u. a.) derartige Fortschritte in Einzelheiten erzielt, dass man statt von einem Prioritätsstreit zwischen NEWTON und LEIBNIZ auch von einem solchen zwischen GREGORY und LEIBNIZ sprechen könnte – vielleicht mit mehr Recht als von einem Prioritätsstreit zwischen BARROW und LEIBNIZ durch welchen manche modernen Historiker denjenigen zwischen NEWTON und LEIBNIZ, gerne ersetzt sehen möchten. NEWTON hat – aus heute kaum mehr zu eruierenden Gründen – der Einzelleistungen GREGORYS nicht gedacht, obwohl sie ihm bekannt sein mussten. Insbesondere hat COLLINS – als Zwischenträger zwischen NEWTON und GREGORY – in Unverständnis der Leistungen des letzteren viel zur Usurpation mancher Sätze durch NEWTON beigetragen.

Wir wissen heute, dass NEWTON an diesem Werke seines Lehrers mitgearbeitet hat. Die Fülle der letztgenannten Probleme hatte die Kräfte des jungen Genius gestählt, dem der nur wenig ältere Lehrer durch vorzeitigen Rücktritt von der Professur (1669) frühzeitig den Platz freigemacht hat. NEWTON hat den gleichmässig fliessenden Zeitparameter t von BARROW übernommen. Auch er betrachtet die Kurven als erzeugt durch die Bewegung eines Punktes, welche mit einer bestimmten Geschwindigkeit erfolgt. Die Koordinaten x, y der Kurvenpunkte fliessen, und ihre Geschwindigkeiten, welche wir heute dx/dt und dy/dt schreiben, sind die Fluxionen $\dot{x}$, $\dot{y}$ der fliessenden Grössen x, y, die NEWTON konsequent die Fluenten nennt. Diese Punktbezeichnung tritt in den Newtonschen Manuskripten schon 1665 auf! Die Fluxion der Bewegungskomponente x ist das Verhältnis der augenblicklichen Veränderung von x zur unendlichkleinen Zeit 0. Das heutige Differential ist also wegen $dx/dt = \dot{x}$ gerade $dx = \dot{x}\,0$. Diese etwas vagen Auffassungen versucht NEWTON strenger zu umschreiben: «Objectio est, quod quantitatum evanescentium nulla sit proportio; quippe quae antequam evanuerunt, non est ultima, ubi evanuerunt, nulla est. Sed eodem argumento contendi posset, nullam esse corporis ad certum locum pervenientis velocitatem ultimam, hanc enim antequam corpus attingit locum non esse ultimam, ubi attingit, nullam esse. Et responsio facilis est: Per velocitatem ultimam intelligo eam, quo corpus movetur, neque antequam attingit locum ultimam et motus cessat, neque postea sed tunc cum attingit» (*Principia*, Liber I, Lemma XI, Scholion). Die Existenz der «ultima ratio incrementorum evanescentium» wird durch die stillschweigende Berufung auf die Entstehung der Bewegung vorausgesetzt. Die Zeit wird als eine mathematische Grösse aufgefasst, welche unabhängig von allem Geschehen gleichmässig läuft. Der Kartesianismus hatte in seiner Physik auf die möglichste Eliminierung des Zeitparameters abgezielt; dies lieferte ihm deshalb nur ein geometrisch-kinematisches Modell für physikalische Zustandsänderungen. Eine Dynamik war nur in Fortsetzung der Ideenbildungen GALILEIS zu erreichen, indem man die verschiedenen Lagen der Massenpunkte in ihrer Abhängigkeit voneinander durch eine Kraftbeziehung, das heisst durch eine Funktion der Zeit bestimmt; die Beschränkung der Physik auf die geometrische Verteilung der Massen liefert nur eine Geometrie. Wird Physik derart auf Mathematik abgebildet, so gibt es in der Welt höchstens Stösse, welche das Bewegungsquantum übertragen, aber keine kontinuierlich wirkenden Kräfte, welche Ursachen von Zustandsänderungen repräsentieren. Immerhin konnte DESCARTES über die Statik der Antike mit seinem Impulsbegriff hinaustreten und das physikalische Geschehen aus der geometrischen Mannigfaltigkeit der Verteilung des Bewegungsquantums verstehen, aber erst NEWTON gelingt eine Dynamik, indem er den Zeitparameter unabhängig von den drei Raumkoordinaten x, y, z in die Physik einführt. Hat man allgemein ein System von n Grössen $x, y, z, w, \ldots$, die alle Funktionen des einen Zeitparameters t sind, so sichert die Elimination von t für ein System von $n-1$ Grössen die gleichzeitige Variation. Den Zeitparameter selbst fasst NEWTON als eine mathematische Grösse auf, welche man aus sukzessiven Einzelmomenten zusammensetzen oder aus dem kontinuierlichen Fluss eines einzigen Moments entstehen lassen kann «velut ex simplici supervenientium momentorum addicamento vel ex unius momenti quasi continuo fluxu» (*Methodus fluxionum* [1670/71]). Die Kontinua selber aber entstehen durch den kontinuierlichen Fluss «Lineae describuntur ac describendo generantur non per appositionem partium, sed

per motum continuum punctorum... Hae geneses in rerum natura locum vere habent et in motu corporum quotidie cernuntur» (*Introductio ad quadraturam curvarum* [1704]). Im Scholion zu Lemma XI des ersten Buches der *Principia* hat NEWTON dann den späteren Differentialquotienten vorweggenommen und bemerkt, dass nur das Verhältnis der hinschwindenden Grössen – und zwar im letzten Moment ihres Verschwindens – bestimmt wird, nicht aber die infinitesimale Grösse als solche. «... Ultimae rationes illae, quibuscum quantitates evanescunt, revera non sunt rationes quantitatum ultimarum sed *limites*, ad quos propius assequi possunt, quam pro data quavis differentia, numquam vero transgredi, neque prius attingere, quamquam quantitates diminuuntur in infinitum.»

NEWTON besitzt also auch eine arithmetische Vorstellung vom Grenzbegriff. In der Tat ist in NEWTONS Ideenbildungen neben der dynamischen Wurzel GALILEIS auch eine arithmetische Komponente numerischer Induktion vorhanden, welche auf den Empirismus von JOHN WALLIS (1616–1703) zurückgeht.

In der *Arithmetica infinitorum* (1656) hat WALLIS einige infinitesimale Kunststücke vollbracht, welche ihm die staunende Bewunderung der Zeitgenossen eingetragen hat. Die entscheidende Formel von FERMAT für die bestimmten Integrale

$$\lim_{m\to\infty} \frac{0^n+1^n+2^n+\cdots+m^n}{m^n+m^n+m^n+\cdots+m^n} = \frac{1}{n+1}$$

leitet er in typischer Induktion so ab, dass er beispielsweise für $n=3$ sukzessive zeigt, dass

$$\frac{0^3+1^3}{1+1} = \frac{1}{4}+\frac{1}{4},$$

$$\frac{0^3+1^3+2^3}{2^3+2^3+2^3} = \frac{0+1+8}{8+8+8} = \frac{1}{4}+\frac{1}{8},$$

$$\frac{0^3+1^3+2^3+3^3}{3^3+3^3+3^3+3^3} = \frac{0+1+8+27}{27+27+27+27} = \frac{1}{4}+\frac{1}{12}$$

gegen 1/4 konvergiert. Berühmt ist seine Bestimmung der Zahl π, welche er durch Berechnung des Integrals

$$\int_0^1 \sqrt{x-x^2}\,dx = \frac{\pi}{8}$$

gewinnt, wo das Integral nämlich gerade die Fläche eines Halbkreises mit dem Durchmesser 1 darstellt. Gemäss seiner bzw. FERMATS Regel für die Integrale der Form $\int x^n\,dx$ findet er

$$\int_0^1 (x-x^2)^0\,dx = 1,$$

$$\int_0^1 (x-x^2)^1\,dx = \frac{1}{2}-\frac{1}{3} = \frac{1}{6} = \frac{1}{2\cdot 3},$$

$$\int_0^1 (x-x^2)^2\,dx = \frac{1}{3}-\frac{2}{4}+\frac{1}{5} = \frac{1}{30} = \frac{1\cdot 2}{3\cdot 4\cdot 5} = \frac{1}{2\cdot 3}\cdot\frac{4}{4\cdot 5},$$

$$\int_0^1 (x-x^2)^3\,dx = \frac{1}{4}-\frac{3}{5}+\frac{3}{6}-\frac{1}{7} = \frac{1}{140} = \frac{1\cdot 2\cdot 3}{4\cdot 5\cdot 6\cdot 7} = \frac{1}{2\cdot 3}\cdot\frac{4}{4\cdot 5}\cdot\frac{9}{6\cdot 7}$$

und daraus durch gewöhnliche Induktion, dass

$$\int_0^1 (x - x^2)^n \, dx = \frac{1}{2n+1} \cdot \frac{(n!)^2}{(2n)!}$$

ist. Diese Formel wendet er nun schlankweg für $n = 1/2$ an und erhält

$$\int_0^1 (x - x^2)^n \, dx = \frac{\pi}{8} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\left(\frac{1}{2}!\right)^2}{\left(2 \cdot \frac{1}{2}\right)!}.$$

Die Schwierigkeit bestand nun für WALLIS darin, die Fakultät $1/2!$ zu bilden, da man damals einem solchen Symbol keinen mathematischen Sinn zulegen konnte. Zwar war WALLIS in Überlegungen, die einen unendlichen Prozess implizierten, keineswegs zimperlich. Beispielsweise hatte er seine Formel

$$\lim_{m \to \infty} \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\nu^n}{m^{n+1}} = \frac{1}{n+1}$$

ganz allgemein, nicht nur für alle rationalen $n = p/q$, sondern selbst für irrationale n postuliert. Unendliche algebraische Approximationen und Iterationen stützt er einfach auf das philosophische Kontinuitätsprinzip, welches ihn freilich manchmal auch in Irrtümer verstrickt. So glaubt er die Reihe

$$\cdots \frac{1}{5} < \frac{1}{4} < \frac{1}{3} < \frac{1}{2} < \frac{1}{1} < \frac{1}{0}$$

über den Nenner 0 hinaus fortsetzen und damit die negativen Zahlen

$$\cdots \frac{1}{1} < \frac{1}{0} < \frac{1}{-1} < \frac{1}{-2} < \frac{1}{-3} \cdots$$

als «Plusqu'infinis» deklarieren zu dürfen. Bei dem unendlichen Prozess, auf welchen die Entwicklung $(1/2)!$ führt, hilft er sich durch die Bemerkung, dass $(2n)!/(n!)^2$ der Binomialkoeffizient des mittleren Gliedes in der Entwicklung für $2n$ ist, und dass man nur die gewöhnliche Tafel der Binomialkoeffizienten für (p/q), welche ja schon im 16. Jahrhundert bekannt war (TARTAGLIA, STIFEL usw.), auf den Fall

$$\frac{(p+q)!}{p!\,q!} = \frac{(p+q)\,(p+q-1) \cdots (p+1)}{q\,(q-1)\,(q-2) \cdots 2 \cdot 1}$$

zu erweitern und dann p oder q durch gebrochene Zahlen zu ersetzen habe. Durch eine Art Interpolation kann man aber auch für die beiden gebrochenen Zahlen p und q das Tableau rechnen und findet, dass für $p = 1/2$, $q = 1/2$ gerade der gesuchte Wert resultiert, den man dann in der bekannten Form des Wallisschen Produktes

$$\frac{\pi}{4} = \frac{2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 10 \cdots}{3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 11 \cdots} = 2 \prod_{\nu=2}^{\infty} \frac{(2\nu)^2}{(2\nu-1)^2}$$

schreiben kann.

Die Beherrschung der numerischen Methoden der *Analysis* erlaubte es nun NEWTON, nicht nur die beiden Hauptaufgaben der Differential- und Integralrechnung, aus den Fluenten die Fluxionen (Tangentenproblem) und umgekehrt aus den Fluxionen die Fluenten zu bestimmen (Quadraturproblem), mit einer neuen Bezeichnungsweise zu formulieren, sondern auch den dazugehörenden Infinitesimalkalkül zu erfinden.