

Paul Finsler

Autor(en): **Burckhardt, J.J.**

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik (Beihefte zur Zeitschrift)**

Band (Jahr): **16 (1980)**

PDF erstellt am: **27.06.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Menschen wie Speiser wirken in die Tiefe. Wir dürfen feststellen, dass er die Saat aufgehen sah. Vieles aber harrt noch des Wachsens. Es liegt in der Natur des Geistigen, dass oft eine oder mehrere Generationen das Erbe nicht nützen können, spätere werden davon um so mehr zehren. Dies gilt auch für das Erbe von Speiser. Noch hatte sich die Erde über seinem Grabe nicht gesenkt, als aus seiner Vaterstadt zu vernehmen war: «Die Weissglut mathematischer Forschungsarbeit lag ihm nicht» (NZZ, 21. Oktober 1970, Mittagsausgabe).

3. Paul *Finsler* wurde am 11. April 1894 als Sohn des Kaufmanns Julius Finsler (1853–1905) und seiner Frau Elise-Luise, geborene Berrer (1872–1913), in Heilbronn geboren. Er wuchs im Kreise einer Schwester und des Bruders Hans auf, der als Photograph einen bedeutenden Namen erwarb. Die Familie Finsler, aus Stäfa stammend, wurde 1538 in Zürich eingebürgert. Ein Urgrossvater von Paul, Hans Jakob Finsler (1796–1863) verheiratete sich mit Louise Gessner, einer Enkelin von Pfarrer Hans Caspar Lavater. Der Grossvater Jakob Georg Finsler (1826–1887), verheiratet mit Susanne Amalie Ulrich, war Kaufmann im Meyershof.

Paul Finsler besuchte die Lateinschule in Urach und 1908–1912 das Realgymnasium in Cannstatt, das er mit dem Zeugnis der Reife verliess. Nach einem Studienjahr an der Technischen Hochschule in Stuttgart bezog er die Universität Göttingen zum Studium der Mathematik. Im Frühjahr 1918 erwarb er dort den Doktorgrad mit der Dissertation «Über Kurven und Flächen in allgemeinen Räumen», die er auf Anregung von C. Carathéodory schrieb. Unter seinen Lehrern finden wir die bedeutendsten Mathematiker jener Zeit, unter anderen E. Hecke, D. Hilbert, F. Klein, E. Landau, C. Runge. 1922 habilitierte sich Finsler an der Universität Köln und wurde im Dezember 1926 mit Amtsantritt im April 1927 zum ausserordentlichen Professor für angewandte Mathematik an der Universität seiner Vaterstadt gewählt. Der Lehrauftrag umfasste 6–8 Semesterstunden, und zwar: in jedem Semester eine vierstündige Vorlesung mit Übungen in darstellender Geometrie und Vorlesungen in zwanglosem Turnus aus den übrigen Gebieten der Geometrie und der angewandten Mathematik. Auf den Herbst 1944 wurde Finsler zum ordentlichen Professor ernannt, mit einer Lehrverpflichtung von 8 bis 12 Vorlesungs- und Übungsstunden, wovon jedes Semester eine vierstündige Vorlesung über Differential- und Integralrechnung mit je einer Stunde Proseminar. Später übernahm er statt dieser Vorlesung wieder diejenige in darstellender Geometrie. Im Frühjahr 1959 trat er altershalber zurück, unter gleichzeitiger Ernennung zum Honorarprofessor. Eine Reise nach dem Fernen Osten erfüllte hierauf seinen Wunsch, auch dort den Sternenhimmel betrachten zu können. Die Teilnahme am mathematischen Leben in Zürich, an Vorträgen und Seminarien zeigt sein fortdauerndes Interesse an der Wissenschaft. War Finsler lange Zeit ein rüstiger Wanderer, der auf keinem Seminaerausflug fehlte, so untersagten ihm dies in späteren Jahren auftretende Herzbeschwerden. Auf dem Gang zum Dies academicus am 29. April 1970, einem schwülen Tag, erlag er kurz vor Erreichen der Universität einem Herzversagen.

Ausgehend von Ideen von Bernhard Riemann stellte Carathéodory Finsler die Aufgabe, die Differentialgeometrie von Kurven und Flächen in Räumen R_n von beliebig vielen Dimensionen n unter Zugrundelegung einer verallgemeinerten Längenbestimmung, Metrik oder Massbestimmung zu untersuchen. Dabei wird

stets nur die Umgebung eines festen Punktes bzw. eines von P ausgehenden Linien-elementes betrachtet. Mit der Bearbeitung dieser Frage eröffnete Finsler der Forschung ein neues und überaus fruchtbares Gebiet.

Die Länge eines Kurvenstückes wird von Finsler als das Integral über eine im wesentlichen willkürliche reelle Funktion definiert, die von den Koordinaten des betrachteten Punktes P und ihren ersten Ableitungen nach der Bogenlänge abhängt. Hiermit lässt sich eindeutig eine Kurventheorie sowie eine Theorie der Kurven und Flächen in mehrdimensionalen Räumen aufbauen. Zum Teil erhält man dabei die aus der klassischen Theorie der Kurven und Flächen bekannten Sätze, zum Teil müssen diese modifiziert werden. Betrachten wir die Arbeit näher. Sie ist in drei Abschnitte eingeteilt: A. Grundbegriffe (S.10–51), B. Kurventheorie (S.52–84), C. Flächentheorie (S.85–120).

A. Ein Punkt $x=(x_1, \dots, x_n)$ wird durch seine n Koordinaten in einem beliebigen Koordinatensystem festgelegt, das man sich als cartesisches oder als krummliniges vorstellen kann. Diese Punkte bilden den R_n , in ihm ist durch $x_j=x_j(u_1, \dots, u_\nu)$ ein ν -dimensionaler Raum R_ν ($1 \leq \nu \leq n$) festgelegt, der für $\nu=n-1$ als Hyperfläche, für $\nu=2$ als Fläche und für $\nu=1$ als Kurve bezeichnet wird. Jedem Punkt der Kurve $x=x(t)$ ist der Vektor $x'=dx/dt$ zugeordnet. Alle von x ausgehenden Vektoren erfüllen den Raum T_n , diejenige Gerade von T_n , die x' enthält, heisst Linienelement (von P ausgehend). Die Linienelemente zu P in einem R heissen Tangentialraum. Wenn eine Kurve C einen R im Punkt P trifft, so kann sie auf eine Kurve Γ in R projiziert werden. Dazu verbindet man die Punkte von C mit denjenigen von R durch eine einparametrische Schar von Kurven $C=\Gamma+\rho l$.

Wichtig ist der Begriff der Berührung zweier Kurven C und Γ . Sie ist im Punkt P von μ -ter Ordnung, wenn in diesem Punkt genau die μ ersten Ableitungen der beiden Kurven nach dem Kurvenparameter übereinstimmen. Für dieses Berühren werden sechs wichtige Sätze bewiesen, z.B.: «Wenn eine Kurve C auf R_ν projiziert wird, so berührt sie alle ihre Projektionen $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots$ von derselben Ordnung.»

Nach dieser Vorbereitung kann die Bogenlänge einer Kurve $x=x(t)$ definiert werden. Man bestimmt einen Parameter s , der die Bogenlänge genannt wird, so, dass $x'=(dx/ds) \cdot (ds/dt)$ wird.

Damit wird $\sum (dx_i/ds)^2 = \varphi^2(x, x')$ eine Funktion von x und x' , und Finsler definiert

$$F(x, x') = \sqrt{\sum x_i'^2} \cdot \frac{1}{\varphi(x, x')}.$$

Hiermit wird die Bogenlänge $s(t) = \int_{t_0}^t F(x, x') dt$, wobei aus der Definition von Finsler folgt: $F(x, kx') = k F(x, x')$, und die Gleichung der Indikatrix lautet $F(x, X) = 1$.

Hiermit kann der Begriff der zu p transversalen Richtung q erklärt werden, dies ist eine Verallgemeinerung des Senkrechtstehens. Die Extremalen des Variationsproblems $\delta s = 0$ sind die Integrale der Lagrangeschen Differentialgleichung und treten an die Stelle der Geraden der gewöhnlichen Differentialgeometrie. An dieser Stelle wird besonders deutlich, wie Finsler an die Dissertation seines Lehrers

Carathéodory anknüpft (Über die diskontinuierlichen Lösungen in der Variationsrechnung, 1904, und Math. Ann. 62, 449–503, 1906) und auf deren Ergebnissen aufbaut.

Wird die Kurve C auf die Kurve Γ transversal projiziert, so wird der Winkel φ zwischen C und Γ im Punkt P folgendermassen erklärt: Man trage von P aus auf C ein Stück a ab, seine Projektion auf Γ habe die Länge b . Dann sei $\cos\varphi = \lim_{a \rightarrow 0} b/a$.

Ist $C = C(t)$ und $\Gamma = \Gamma(\tau)$, so wird daraus

$$\cos\varphi = \lim_{t \rightarrow 0} \left[\int_0^{\tau(t)} F(\Gamma, \Gamma') d\tau / \int_0^t F(C, C') dt \right]$$

Im allgemeinen ist hierdurch der Winkel zwischen zwei Richtungen p und q von der Reihenfolge der Schenkel abhängig. Finsler gibt die Bedingungen an, in welchen Symmetrie besteht: Es muss $F^2 = Q(x')$ eine quadratische Form sein. Mittels des Winkels zwischen Vektoren kann in der üblichen Art derjenige zwischen Ebenen definiert werden, ebenso das Senkrechtstehen von Vektoren auf Ebenen. Hierbei ergibt sich der schöne Satz: Eine Normale l eines Raumes R_ν ist transversal zu ν unabhängigen, unendlich benachbarten Richtungen in diesem Raum.

B. Mit obigen Begriffen lässt sich in der Umgebung eines Linienelementes eindeutig eine Kurventheorie entwickeln. Man geht von einer regulären Kurve C aus, sie besitze im Punkt P die Richtung p . Berührt sie ihre Tangente in P nur in erster Ordnung, so ist durch Kurve und Tangente die Schmiegungeebene T_2 bestimmt. Die Extremalen, welche T_2 in P berühren, bilden die Schmiegefläche S_2 . So fortfahrend, erhält man Schmiegungräume T_ν und Schmiegeflächen S_ν . Besonders reizvoll ist die Einführung der Krümmung: Sei b die Länge eines Kurvenstückes zwischen den Punkten 1 und 2 auf der Kurve C , s die Länge der Sehne von 1 nach 2. Finsler definiert die Krümmung k von C in P , indem er die Punkte 1 und 2 in den Punkt P zusammenrücken lässt und dort den Grenzwert nimmt:

$$k = \sqrt{\lim_{b \rightarrow 0} 24 \frac{b-s}{b^3}}$$

Diese Definition geht für die klassische Kurventheorie in den üblichen Ausdruck über, indem Finsler zeigt, dass sie mit dem Grenzwert

$$k = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \vartheta}{\Delta s}$$

übereinstimmt, wo $\Delta \vartheta$ der Winkel zwischen benachbarten Tangenten ist. Dies wird für den zweidimensionalen Fall näher ausgeführt. Anschliessend werden auf zwei Wegen die höheren Krümmungen einer Kurve eingeführt und diskutiert und die natürliche Gleichung einer Kurve aufgestellt. Im Mittelpunkt der Kurventheorie steht der Satz von der Eindeutigkeit: Bei geeigneten Anfangsbedingungen ist eine

Kurve (in der Umgebung des Anfangspunktes) eindeutig bestimmt, wenn ihre sämtlichen Krümmungen als Funktion der Bogenlänge vorgeschrieben sind.

C. Ebenso, wie in einem regulären n -dimensionalen Raum R_n auf jedem Linien-element ein Vektor liegt und die Längenmessung bestimmt, ist dies auch in jedem R_v der Fall ($2 \leq v \leq n$). Ist die Fläche R_v durch $n-v$ Gleichungen $G_\beta(x)=0$, $\beta=1,2,\dots,n-v$ bestimmt, so ist die Länge einer auf ihr liegenden Kurve wie früher bestimmt durch $s = \int_{t_0}^t F(x, x') dt$, während die Extremalen in R_v als Lösungen des Variationsproblems $\delta \int F(x, x') dt = 0$ mit der Nebenbedingung $G_\beta(x)=0$ auftreten; sie heissen geodätische Linien, die zugehörigen Krümmungen die geodätischen Krümmungen. Jede Kurve, deren geodätische Krümmung identisch verschwindet, ist geodätische Linie. Wie in der klassischen Flächentheorie gilt, dass die geodätischen Linien mit denjenigen Flächenkurven identisch sind, deren Schmiegeebenen sämtlich die Fläche senkrecht schneiden. Ist C eine Flächenkurve und Γ ihre geodätische Tangente, κ die absolute und k die erste Krümmung im Berührungspunkt, ferner ψ der Winkel zwischen den Schmiegeebenen von C und von Γ , dann gilt der Satz von Meusnier $\kappa^2 = k^2 \cos \psi$, und für die geodätische Krümmung γ gilt $\gamma^2 + \kappa^2 = k^2$.

Hierauf ist Finsler 1940 in der Arbeit Nr.19 zurückgekommen. Definiert man ferner als Asymptotenlinien einer Fläche diejenigen Kurven, deren Schmiegeebenen sämtlich die Fläche berühren, so ergibt sich aus dem Satz von Meusnier, dass ihre Normalkrümmung verschwindet und dass ihre geodätische Krümmung gleich ihrer absoluten Krümmung ist.

Ein folgender Abschnitt gilt den höheren Krümmungen. Sodann wird eine Hyperfläche $G(x)=0$ (Dimension $n-1=v$) betrachtet, ihre Extremalen im Punkt P bilden die Tangentenfläche T_{n-1} . Durch Betrachtung der Parallelfäche $G(x)=h$ und ihres Schnittes mit T_{n-1} gelingt es, darauf einen $(n-2)$ -dimensionalen Raum zu definieren, welcher die Dupinsche Indikatrix der gegebenen Fläche heisst. Ist speziell F^2 eine quadratische Form, so ist jene ein algebraisches Gebilde zweiter Ordnung. Ihre Achsen liefern dabei die Hauptkrümmungsrichtungen. Für den zweidimensionalen Fall werden die Krümmung von Gauss, die in der klassischen Theorie das Produkt der Hauptkrümmungen ist, und die mittlere Krümmung M eingeführt.

In der allgemeinen Geometrie muss man zwischen der äusseren Krümmung K , die Finsler die Krümmung nach Gauss nennt, und der inneren Krümmung K_i unterscheiden. Ist F^2 eine quadratische Form, so wird $K=1/r_1 r_2$ und $M=(1/r_1 + 1/r_2)/2$, wo $1/r_1$ und $1/r_2$ die Hauptkrümmungen sind.

Um die innere Krümmung K_i im Punkt P zu erhalten, betrachtet man eine Extremale durch P und ihre Parallelkurven. Eine zweite Extremale durch P schneide diese unter dem Winkel ψ . K_i wird als der negative Grenzwert $\lim_{\psi \rightarrow 0} (1/\psi) (d^2 \psi / ds^2)$ definiert und stimmt mit einer Invarianten bei einem Extremalproblem überein. Die Torsion oder die zweite Krümmung κ_2 einer Kurve ist der Grenzwert $\lim_{\Delta s \rightarrow 0} (\Delta \Theta_2 / \Delta s)$, wobei Θ_2 der Winkel zwischen benachbarten Schmiegeebenen ist. Die Torsion der geodätischen Linien wird sowohl durch die Ableitung der Normalkrümmung ausgedrückt als auch durch die Flächenkrümmungen κ , M und K . Ist F^2 eine quadratische Form, so verschwindet die Torsion

der geodätischen Linien für die Hauptkrümmungsrichtungen oder, anders ausgedrückt: Die Torsion der geodätischen Tangente einer Krümmungslinie verschwindet im Berührungspunkt.

Jede geodätische Krümmungslinie ist eben, und jede ebene geodätische Linie ist Krümmungslinie oder Extremale. Für die Asymptotenlinien gilt, dass das Quadrat ihrer Torsion gleich der negativen Gaußschen Krümmung der Fläche ist. Zum Abschluss der Arbeit werden die abwickelbaren Flächen betrachtet. Diese definiert Finsler als solche, die eine Schar von Asymptotenlinien tragen, deren Gaußsche Krümmung K identisch verschwindet, sie heissen naturgemäss die Erzeugenden der Fläche. Allerdings verliert die Bezeichnung «abwickelbar» ihre ursprüngliche Bedeutung. In der euklidischen Geometrie sind die abwickelbaren Flächen zugleich Regelflächen. In der Finslerschen Geometrie sind dagegen die abwickelbaren Flächen keine Regelflächen. Ihre Erzeugenden sind ebene Kurven, deren Krümmung angegeben wird. Die Tangenten der Erzeugenden berühren die Fläche in mindestens dritter Ordnung.

Die Dissertation ist ausserordentlich klar geschrieben, Finsler ist 1940 in zwei Abhandlungen darauf zurückgekommen. In Nr. 19 «Über eine Verallgemeinerung des Satzes von Meusnier» verallgemeinert er ein in der Dissertation aufgestelltes Ergebnis. Er lässt die dortige Bedingung, wonach der ν -dimensionale Schmiegraum zur Fläche normal steht, fallen und erhält ein entsprechendes Resultat. Die Arbeit Nr. 20 vermittelt einen kurzen Überblick über die Dissertation und ist als eine erste Lektüre zu empfehlen. Die Einleitung und Problemstellung erinnert an die Betrachtungen von Grassmann und von Riemann. Als Ziel seiner eigenen Untersuchungen wird angegeben, die Begriffe von Windung und Torsion einer Kurve auf Räume beliebiger Dimension und Massbestimmung auszudehnen. Entsprechend wäre die Flächentheorie zu behandeln. Im zweiten Paragraphen wird in solchen Räumen die Krümmung definiert wie in der Dissertation auf Seite 59 und die Länge eines Bogenstückes als Integral über $F(x, x')$ eingeführt (Dissertation S. 33). Die Differenz zwischen Sehne und Bogen wird dann das Integral über die Weierstraßsche E -Funktion (Dissertation S. 61). Im dritten Paragraphen wird die Winkelmessung zwischen Kurven und zwischen Flächenelementen ausgeführt.

Paragraph 4 behandelt die erste und die höheren Krümmungen k_1, \dots, k_ν einer Kurve, wobei deren Produkt $k_1 k_2 \cdots k_\nu$ gleich der ν -ten Ableitung des Winkels ist, den die Projektion der Kurve auf die ν -dimensionale Schmiegeebene mit der sie treffenden Feldlinien bildet.

In Paragraph 5 wird die erste Krümmung einer Fläche und insbesondere der Satz von Meusnier behandelt, während Paragraph 6 die höheren Krümmungen einführt.

In Paragraph 7 wird, neu gegenüber der Dissertation, die Frage aufgeworfen, ob es natürliche Gleichungen einer Fläche gibt, analog zu den natürlichen Gleichungen einer Kurve. Man stellt sich also die Frage, ob ein Flächenstück bestimmt ist durch die Normalkrümmungen, die etwa längs einer Schar von geodätischen Linien als Funktion der Bogenlänge gegeben sind. Finsler weist darauf hin, dass die Frage in Sonderfällen von seinem Schüler S. Grünbaum in dessen Dissertation bejahend beantwortet ist.

Im abschliessenden Paragraphen bespricht Finsler das Verhältnis seiner geometri-

schen mit den inzwischen sehr erfolgreich eingesetzten analytischen Methoden des Differentialkalküls. Es stellt sich dabei die Frage, was unter geometrischer Methode zu verstehen ist. Finsler denkt dabei etwa an ähnliche Unterschiede, die zwischen analytischer und synthetischer Geometrie bestehen.

Finsler eröffnete mit seiner Dissertation der Geometrie ein neues Forschungsgebiet. Zunächst verbreiteten sich seine Gedanken nur langsam, dies ist wohl dem Umstand zuzuschreiben, dass die Dissertation als Privatdruck nur eine beschränkte Verbreitung fand. Erstmals sehe ich die Bezeichnung «general (Finsler) space» im Jahre 1927. Durch das Buch «Les espaces de Finsler» von Elie Cartan bürgerte sich ab 1934 die Bezeichnung ein, und die Ideen fanden weltweite Anerkennung. 1951 gab sodann der Birkhäuser Verlag einen anastatischen Nachdruck heraus. Wie weltberühmt Finsler war, zeigt eine kleine Anekdote: Ich hatte einst zwei japanische Mathematiker durch das Institut zu begleiten. Wir kamen zur Türe des Dozentenzimmers im dritten Stock der Universität. Bevor ich öffnete, bemerkte ich zu den Besuchern, dass ich sie Paul Finsler vorstellen werde. Die beiden erstarrten und sagten: «Finsler lebt?!» Es war, als hätte ich ihnen gesagt, sie würden Euklid sehen.

Finsler beschäftigte sich ausführlich mit Fragen der algebraischen Geometrie und legte seine Ergebnisse in den Arbeiten Nrn. 5, 6, 9, 11, 12, 16, 17, 18 und 21 dar. 1927 erschien die erste Ankündigung, 1929 in Nr. 9 ein erster Teil. Darin geht Finsler von einer aus der Variationsrechnung entspringenden Frage aus: Unter welchen Bedingungen enthält eine mehrparametrische lineare Schar von quadratischen Formen eine definite Form? Diese Frage führt zur Untersuchung einer bestimmten Klasse von algebraischen Gebilden, insbesondere der später untersuchten Freigeilde. Ein algebraisches Gebilde ist eine Menge von Punkten im n -dimensionalen projektiven Raum R_n , deren Koordinaten $x_0 : x_1 : \dots : x_n$ einem System von homogenen algebraischen Gleichungen genügen. Es werden die Begriffe der Vereinigung $G+H$ und des Durchschnittes GH zweier Gebilde definiert. Wichtig ist, wie Finsler die Reduzibilität definiert: G heisst reduzibel, wenn es als Vereinigung zweier algebraischer Gebilde A und B dargestellt werden kann, von denen keines mit G identisch ist: $G=A+B$. Anderenfalls heisst G irreduzibel. Nach der Einführung der linearen Gebilde wird mittels Betrachtung der Schnittpunktzahlen, das heisst auf geometrischem Weg, die Ordnung eines Gebildes eingeführt. Abschliessend beweist Finsler den Satz, dass ein algebraisches Gebilde G reduzibel ist, wenn ein anderes Gebilde A derselben Dimension in ihm enthalten ist. Dabei wird die Dimension folgendermassen eingeführt: Ein linearer Raum L_ν wird von linearen homogenen Gleichungen dargestellt, seine Dimension ν ist um eins geringer als die grösste Anzahl linear unabhängiger Punkte, die man beliebig in ihm wählen kann. $G=G_\nu$ heisst ν -dimensional, wenn es einen $L_{n-\nu-1}$, aber keinen $L_{n-\nu}$ gibt, der G_ν nicht trifft. Die Dimension eines Gebildes ist von der Dimension des umgebenden Raumes unabhängig.

Die Arbeiten Nrn. 11, 12, 16, 17, 18 und 21 handeln insbesondere von den Freigeilden und Freisystemen. B.L. van der Waerden hat sie im Zentralblatt für Mathematik (Zbl.) referiert und mir freundlichst erlaubt, seine Besprechungen im folgenden wiederzugeben, wofür ich ihm auch hier bestens danke.

Nr. 11 (Zbl. 16, S. 221): «Ein algebraisches Gebilde im komplexen projektiven

Raum heisst Freigeilde, wenn es von jedem linearen Raum entweder in unendlich vielen Punkten (d.h. in ganzen Kurven oder Flächen) oder in endlich vielen linear unabhängigen Punkten geschnitten wird. Aufgrund einiger allgemeiner Sätze über Freigeilde werden alle Freigeilde des dreidimensionalen Raumes L_3 aufgezählt. Es sind quadratische Flächen und kubische Raumkurven sowie einige aus Punkten, Geraden, Kegelschnitten und Ebenen zusammengesetzte Gebilde. Ist eine Fläche 2. Grades Q_a mit reeller Gleichung in L_3 gegeben und ganz auf der einen Seite von Q_a ein reelles Freigeilde F , das nicht mit dem ganzen Raum zusammenfällt, so gibt es eine Fläche 2. Grades Q_b , die F enthält und Q_a im Reellen nicht trifft. Hat F Punkte mit Q_a gemeinsam, aber im übrigen nur Punkte auf der einen Seite von Q_a , so gibt es auch eine Fläche 2. Grades Q_b , die F enthält und Q_a nicht durchsetzt. Ist ein algebraisches Gebilde G in L_3 im Reellen nicht Freigeilde, so gibt es eine Fläche 2. Grades Q_a derart, dass G auf der einen Seite von Q_a liegt, aber dass jede Fläche 2. Grades Q_b , welche G enthält, Q_a trifft.»

Nr. 12 (Zbl. 16, S. 199): «In einer zweigliedrigen Schar von reellen quadratischen Formen $Q_a + \lambda Q_b$ in $n+1$ Veränderlichen gibt es dann und nur dann eine definite Form, wenn die Form Q_a für die reellen Nullstellen von Q_b stets positiv oder stets negativ ist. Eine semidefinite Form gibt es in der Schar, wenn Q_a für die reellen Nullstellen von Q_b stets ≥ 0 oder stets ≤ 0 ist. Sind $\sum \lambda_j Q_j$ sämtliche quadratische Formen in $n+1 \leq 4$ Veränderlichen, die auf einem festen reellen Freigeilde G (siehe Nr. 11) Null werden, und ist Q_a eine reelle Form, welche für die reellen Punkte von G nur positive Werte (bzw. nur Werte ≥ 0) annimmt, so enthält die Schar $Q_a + \sum \lambda_j Q_j$ eine positiv definite (bzw. halbdefinite) Form. Wenn dagegen die gemeinsamen Punkte der Nullstellen der Formen Q_j ein Gebilde G ergeben, das im Reellen nicht Freigeilde ist, so kann man eine Form Q_a finden, die auf G nur positive Werte annimmt, jedoch so, dass die Schar $Q_a + \sum \lambda_j Q_j$ nur definite Formen enthält.»

Nr. 16 (Zbl. 19, S. 325): «In dieser Arbeit werden alle Freigeilde des n -dimensionalen Raumes, die aus endlich vielen linearen Räumen zusammengesetzt sind, aufgestellt.»

Nr. 17 (Zbl. 22, S. 78): «Ein aus linearen Räumen bestehendes Freigeilde heisst Freisystem. Es werden nun alle Freisysteme im sechsdimensionalen Raum S_6 vollständig aufgezählt, ebenso die eindimensionalen und die irreduziblen Freigeilde im S_6 .»

Nr. 18 (Zbl. 23, S. 160): «Es wird eine Konstruktionsvorschrift gegeben, durch die man alle eindimensionalen Freigeilde erhält. Ein irreduzibles eindimensionales Freigeilde ist eine rationale Normalkurve C^μ des Raumes L_μ . Ein zusammenhängendes eindimensionales Freigeilde besteht aus r solchen Kurven $C^{\mu_1}, \dots, C^{\mu_r}$, die sich in höchstens $r-1$ Punkten treffen und so liegen, dass der zugehörige Raum die Dimension $\sum \mu_i$ hat. Durch Zusammensetzung solcher zusammenhängender Gebilde in Räumen freier Lage erhält man alle eindimensionalen Freigeilde.»

Nr. 21 (Zbl. 28, S. 303): «Die wichtigsten Sätze aus der Arbeit des Verfassers über eindimensionale Freigeilde (Nr. 18) werden auf reelle Freigeilde übertragen. Dabei heisst ein Freigeilde reell, wenn es mit dem konjugiert komplexen zusam-

menfällt und seine reellen Punkte nicht in einem Raum geringerer Dimension enthalten sind als die komplexen. Sodann wird bewiesen: Wird ein zum Raum L_p gehöriges Freigeilde G von einer Hyperfläche 2. Grades in $p+1$ linear unabhängigen reellen Punkten getroffen und nicht durchsetzt, so ist es ganz in ihr enthalten. Der wichtigste Hilfssatz heisst: Jeder nichtreelle Punkt eines reellen Freigeildes G gehört einer in G enthaltenen reellen Freikurve an.»

Finslers Lehrauftrag umfasste die angewandte Mathematik und die Geometrie. Zur Belebung der darstellenden Geometrie liess er verschiedene Modelle anfertigen. Für die angewandte Mathematik schaffte er eine Rechenmaschine an sowie ausgedehnte Primzahltabellen. Er hatte Freude am Experimentieren mit Zahlen und der Beschäftigung mit Figuren. Davon zeugen die Arbeiten Nrn. 13, 14, 23, 24, 25, 26, 33 und 34. In Nr.13 untersucht er teils ältere Näherungskonstruktionen, teils neue und eigene. Er behandelt a) die Würfelverdoppelung, b) die Konstruktion der Seite des regulären 7-, 9-, 11- und 13-Ecks, c) die Näherungskonstruktion von Umfang und Fläche des Kreises, d) die Dreiteilung eines Winkels und verallgemeinert dies auf die Teilung in n Teile. Besondere Sorgfalt widmet Finsler dabei der Bestimmung des auftretenden Fehlers. Im Anhang gibt er eine reizvolle Konstruktion einer bestimmten Ellipsentangente. Diese ist so gelegen, dass sie sich zwischen den beiden Krümmungskreisen in den Scheiteln befindet. Zusammen mit diesen erlaubt sie, die Ellipse mit guter Genauigkeit zu zeichnen, und hat sich in den Übungen zur darstellenden Geometrie stets bewährt. In der späteren Arbeit Nr.33 wird 2π durch $3 + \sqrt{97}/3$ angenähert. Ferner schlägt der Autor eine Approximation von π vor, mit einem Fehler von etwa $2,3 \cdot 10^{-9}$. Verschiedene bekannte Approximationen werden diskutiert und eine bereits in Nr.13 vorgeschlagene neue Konstruktion für den Kreisumfang vereinfacht. Ein Zusatz zu ihr liefert eine relative Genauigkeit, die kleiner als ein Milliardstel ist. Finsler zeigt insbesondere, wie sich seine Konstruktion zum Zeichnen in einer Gitterebene eignet, ausserdem stellt er Vergleiche mit den Näherungen anderer Geometer an.

Finsler hat sich eingehend mit der Wahrscheinlichkeitsrechnung befasst. Seine klare und tief durchdachte Vorlesung hierüber hat viele Studierende in dieses Gebiet eingeführt. In der Arbeit Nr.26 geht er von den Schwierigkeiten aus, die der klassischen sowie der Limesdefinition der Wahrscheinlichkeit anhaften. Sodann stellt er eine einfache axiomatische Begründung auf. Die Arbeit verdient auch heute noch Beachtung, obschon Finsler bereits vorhandene Darstellungen in derselben Richtung nicht berücksichtigt hat. Einen weiteren Beitrag zur Wahrscheinlichkeitsrechnung liefern die Nrn.24 und 34. In einer Poisson-Verteilung mit dem Parameter δ wird die Wahrscheinlichkeit $w(\delta, t, T)$ dafür berechnet, dass das Zeitintervall T mindestens ein Intervall t mit $0 < t < T$ enthält, in welches kein Ereignis fällt.

In Nr.23 gibt Finsler einen einfachen Beweis für das Postulat von Bertrand, wonach zwischen n und $2n$ stets wenigstens eine Primzahl liegt. Der Beweis beruht darauf, dass der Quotient von $(2n)!$ und $(n!n!)$ vollständig in Primfaktoren zerlegt wird. Dieses Verfahren ermöglichte ihm gleichzeitig, für die Anzahl

der Primzahlen zwischen n und $2n$ eine obere und eine untere Grenze anzugeben.

In Nr.25 zeigt sich einmal mehr Finslers Liebe zur elementaren Zahlentheorie. In einem ersten Abschnitt werden mit der ihm eigenen Gründlichkeit die Teilbarkeitsregeln durch die Zahlen 7, 11 und 13 behandelt. Sodann wird erläutert, wie man mit Hilfe des Rechenschiebers das Produkt $1 \cdot n = p \cdot q$ zerlegen kann. Die Zunge des Schiebers wird herausgezogen und umgekehrt eingefügt, so dass die Skalen entgegengesetzt laufen. Gegenüberliegende Zahlen haben dann ein konstantes Produkt; steht 1 der Zahl n gegenüber, so p der Zahl q . Hiermit und mit einigen Hilfstafeln wird unter anderem $10\,000\,007 = 941 \cdot 10\,627$ zerlegt, während $100\,000\,007$ sich als Primzahl erweist.

In einer kurzen Notiz in *«Courrier du Sphinx»* 7 (1937) berichtet Finsler, dass er Anno 1934 durch eine direkte Methode, ohne die Bestimmung der quadratischen Reste, fünf Primzahlen gefunden habe, z. B. $1\,308\,636\,140\,501$.

In der Arbeit Nr.14 werden einem Dreieck D über seinen Seiten nach aussen bzw. nach innen gleichseitige Aufsatzdreiecke angelegt, man erhält eine nach Torricelli benannte Figur. Die Schwerpunkte der angelegten Dreiecke bilden gleichseitige Dreiecke D_1 bzw. D_2 . Die zwischen deren Flächen F , F_1 und F_2 und deren quadratischen Umfängen bestehenden Gleichungen und Ungleichungen werden bewiesen. Anschliessend wird eine Verallgemeinerung betrachtet, in welcher die aufgesetzten Dreiecke zueinander ähnlich sind. Auch hier gilt $F_1 - F_2 = F$. D_1 und D_2 sind dann zu den Aufsatzdreiecken ähnlich. Der Schwerpunkt von D liegt in der Mitte zwischen demjenigen von D_1 und D_2 ; sind diese gleichseitig, so fallen die drei Schwerpunkte zusammen. Ferner haben D_1 und D_2 denselben Höhenschnittpunkt. Mittels des Begriffes des Spiegelpunktes eines Dreiecks werden Sätze über die elf Spiegelpunkte eines solchen hergeleitet. Die Arbeit zeigt einmal mehr, wie reich an neuen Beziehungen die elementare Dreiecksgeometrie ist.

Mit der Arbeit Nr.27 betritt Finsler ein schwieriges Gebiet der Arithmetik. Es handelt sich um Forschungen, welche die Zahlen der höheren Zahlenklassen und ihre Operationen betreffen. Ist ω die erste auf die Reihe der natürlichen Zahlen folgende Ordnungszahl, so kann man für sie die Addition $\omega + \omega$, die Multiplikation $\omega \cdot \omega$ und das Potenzieren einführen. Finsler beschäftigt sich mit dem Problem, die auf das Potenzieren ω^ω nächstfolgende Operation zu definieren. Dadurch betritt er das Gebiet der Limeszahlen der zweiten Zahlklasse. Ein Ergebnis seiner Untersuchungen besteht darin, dass er jeder Zahl der ersten und der zweiten Zahlklasse eine *«Hauptdarstellung»* zuordnen kann. Sein Schüler H. Bachmann hat die Ansätze weiter verfolgt und mit den Methoden von O. Veblen verglichen (*Comment. Math. Helv.* 26, 55–67, 1952).

In der seinem Kollegen B.L. van der Waerden gewidmeten Arbeit Nr.35 führt Finsler den Begriff der totalendlichen Menge ein. Er betrachtet zu diesem Zweck nur reine Mengen, d. h. solche Mengen, deren Elemente stets wieder reine Mengen sind. Zum Beispiel können die natürlichen Zahlen als solch reine Mengen aufgefasst werden; wir haben es daher mit einer sinngemässen Verallgemeinerung dieser zu tun. Über den Begriff der Stufenzahl gelangt man zu den totalendlichen Mengen, das sind solche mit endlicher Stufenzahl. Wie die natürlichen Zahlen auf eine

Punktreihe abgebildet werden können, vermag man den verallgemeinerten Zahlen Figuren zuzuordnen, die aus Punkten und Strecken bestehen. Bedeutsam ist, dass sie eine jeweiligen assoziative Addition und Multiplikation besitzen, die jedoch nicht kommutativ zu sein braucht. Es gelingt ferner, den Begriff der Primzahl einzuführen. Das schwierige, von Finsler aufgeworfene Problem nach der Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung wurde von G. Mazzola gelöst (Der Satz von der Zerlegung Finslerscher Zahlen in Primfaktoren. *Math. Ann.* 195, 227–244, 1972). In der folgenden Arbeit Nr.37 zeigt Finsler, dass für seine verallgemeinerten Zahlen die Vermutung von Goldbach falsch ist.

Paul Finsler widmete einen beträchtlichen Teil seiner Arbeitskraft der Frage nach den Grundlagen der Mathematik. Anfang unseres Jahrhunderts erlangten solche Überlegungen deshalb eine besondere Beachtung, weil gewisse Antinomien der Mengenlehre Zweifel daran aufkommen liessen, ob mathematisches Schliessen stets zu eindeutigen Ergebnissen führe. Durch die Schriften bedeutender Forscher jener Zeit, unter anderen D. Hilbert, L.J. Brouwer, H. Weyl, wurden die Fragen in den Mittelpunkt der Auseinandersetzungen von Mathematikern und Philosophen gestellt, Diskussionen, die oft mit Härte und Verbissenheit geführt wurden. Finsler griff in diese Auseinandersetzungen ein mit seiner Antrittsrede Nr.2 «Gibt es Widersprüche in der Mathematik?», gehalten 1923 in Köln. In dieser Rede umriss er ein Programm, das er in den Arbeiten Nrn.3, 4, 7, 8, 10, 15, 22, 30, 31 und 36 ausführte und vervollständigte. Ich möchte mich kurz an die Ausführungen der Antrittsrede halten, um eine Skizze von Finslers Gedanken darzulegen. Die Frage: «Gibt es unlösbare Widersprüche im exakten Denken?», oder anders ausgedrückt: «Ist jeder Satz entweder richtig oder falsch?», oder nochmals anders gewendet: «Kann man einen Satz zugleich mit seinem Gegenteil beweisen?» bildet den Ausgangspunkt. Diese Fragen sind in gewissen Antinomien begründet, von denen Finsler insbesondere zwei anführt:

1. Welches ist die kleinste natürliche Zahl, die nicht mit weniger als 100 Silben in deutscher Sprache definiert werden kann? Vor allem: Gibt es eine solche Zahl?
2. Man bilde die Menge aller sich nicht selbst enthaltenden Mengen. Enthält sich diese selbst oder enthält sie sich nicht selbst?

Lösungsversuche dieser Fragen von D. Hilbert, H. Poincaré, B. Russell, J. König, L.J. Brouwer werden von Finsler nicht anerkannt. Er stellt sich die Aufgabe, die entstehenden Widersprüche aufzuklären und daraufhin zu lösen.

Um zu diesem Ziel zu gelangen, gibt er ein neues Problem:

Schreibe auf die Tafel die Zahlen 1, 2, 3 und den Satz: «Die kleinste natürliche Zahl, die nicht auf der Tafel angegeben ist.»

Frage: Gibt es eine solche Zahl?

Mit dieser Antinomie zeigte uns Finsler den prinzipiellen Unterschied zwischen Schreiben und Sprechen, formalisierten Aussagen und Denken. Er ist damit, wie B.L. van der Waerden in seinem Nachruf betont, ein Vorläufer von Kurt Gödel geworden. Sprache, als Medium des Denkens und zugleich Gegenstand des Denkens; Denken nur zu vermitteln, soweit gesprochen werden kann, diese Antinomie in aller menschlichen Erkenntnis und ihrer Mitteilung liegt der fruchtbaren, bis heute nicht beendigten Auseinandersetzung jener Zeit zugrunde. Auch die berühm-

ten «Entretiens de Zürich» von 1938 zeigten nur Trennung, konnten keine Lösung oder Verständigung bringen; die Zeit liess die Auseinandersetzungen zur Vergangenheit werden. Eine ausführliche Rechtfertigung seines Standpunktes, die Finsler 1964 veröffentlichte, fand kaum Beachtung. War alles vergeblich? Ich glaube nicht. Vor allem waren es die folgenden Gedanken Finslers, die Beachtung fanden: 1. Finsler betrachtet nicht irgendwelche Zusammenfassungen als Mengen, sondern nur solche, deren Elemente stets wieder Mengen sind. Dies hat sich als fruchtbar erwiesen. 2. Es ist nicht selbstverständlich, ob ein System von Mengen wieder eine Menge bildet. Man muss zwischen den beiden Begriffen unterscheiden. 3. Finslers Begriff der zirkelhaften Definitionen stellt einen fruchtbaren Ansatz zur Untersuchung logischer Beziehungen dar. Ich hatte versucht, Finslers Gedanken in zwei Arbeiten verständlich darzustellen (Zur Neubegründung der Mengenlehre. Jber. Deutsch. Math.-Verein. 48, 146–165, 1938, und 49, 146–155, 1939). Der Erfolg blieb aus.

Für Finsler waren obige Auseinandersetzungen ein zentrales Problem. Widersprüche in seiner Wissenschaft wären für ihn unerträglich gewesen. Und wie könnten solche entstehen? Seine Antwort war: «Widersprüche entstehen, indem man sich selbst widerspricht.» Auf meine Frage, ob er dies begründen könne, blieb er mir die Antwort schuldig. Finsler glaubte an die Richtigkeit menschlichen Denkens und die Möglichkeit der sprachlichen Verständigung; die Problematik, die hierin liegt, sah er nicht, sie lag ausserhalb seines Daseins. Ich komme unten nochmals auf sein Weltbild zu sprechen.

Finsler war, obwohl eher sensibler Natur, ein zäher Denker, wie die Auseinandersetzung mit den Grundlagen der Mathematik zeigte, die sich über sein ganzes Leben hin erstreckte. Er war sensibel, indem der Widerstand gegen seine Ansichten seine geistige und physische Gesundheit stark angegriffen haben. Ich erinnere mich gut: Er trug etwa 1927 seine Ansichten im mathematischen Kolloquium in Zürich vor. Sie wurden von H. Weyl in der anschliessenden Diskussion nach Strich und Faden zerzaust. Finsler musste daraufhin wegen Krankheit für zwei Jahre beurlaubt werden.

Nach Abschluss obiger Ausführungen erhalte ich das Buch «Inhaltliches Denken und formale Systeme» von Bernardo J. Gut (Verlag Rolf Kugler, Oberwil bei Zug, 1979) zugestellt. Darin wird, nach langer Pause, das Problem «Denken – Sprechen» neu in ganzer Breite aufgerollt. Ausführlich werden Finslers Ansichten in ihren verschiedenen Fassungen sowie seine Auseinandersetzungen mit den Kritikern dargelegt. Durch das gründliche Studium der Originalabhandlungen liefert uns B. Gut einen wertvollen Beitrag zur angemessenen Beurteilung von Finslers Gedankengut und dessen Bedeutung für die Grundlagenforschung.

Paul Finsler war ein ausgezeichneter Kenner des Sternenhimmels, den er bei jeder Gelegenheit mit dem Feldstecher beobachtete. Wenn nötig begab er sich, oft mitten in der Nacht, auf die Sternwarte der Eidgenössischen Technischen Hochschule, um seine Beobachtungen an grösseren Instrumenten fortzusetzen. Dabei gelang es ihm, zwei neue Kometen zu entdecken. Bereits in Köln fand er am 15. September kurz nach 8 h MEZ den Kometen 1924c und am frühen Morgen des 4. Juli 1937 den Kometen 1937f im Sternbild des Perseus (Astronomische Nachrichten, Bd. 222, Kiel 1924, Nr. 5324, S. 335, bzw. Bd. 263, Kiel 1937, Nr. 6301, S. 250). Für diese Entdek-

kungen erhielt er 1924 und 1937 die Medaillen der Astronomical Society of the Pacific. Ferner beobachtete er die Sternschnuppen vom 9. Oktober 1933 in der Bahn des Kometen Giacobini-Zinner (ebenda, Bd. 250, Kiel 1933, Nr. 5986, S. 173f.). Er ist Mitentdecker der sehr hellen Nova im Sternbild Puppis, die er in den frühen Morgenstunden des 11. November 1942 als erster in Europa beobachtete (Bericht von M. Waldmeier in «Die Sterne», 23. Jahrgang 1943, Heft 11/12, und Beob. Zirkular der Astronomischen Nachrichten 24, 1942, Nr. 25, S. 115).

Wenn ich richtig sehe, so finden wir in der Gestalt des Hans Gisler im Roman von Jakob Humm «Ein Jahr im Leben des Daniel Seul» (Tages-Anzeiger, Zürich, 3. Oktober 1977) ein treffendes Bild des jungen Finsler. Ich erlaube mir, daraus folgendes wiederzugeben:

«Wir trafen uns gewöhnlich im Odeon und wanderten den See hinauf. Auf jener Bank beim Hafen Riesbach fand ich fast regelmässig meinen Freund Hans Gisler vor, einen Mathematiker, den ich von Göttingen her kannte; er war ein Semester vor mir nach Zürich zurückgekehrt und wohnte im Seefeld bei zwei Tanten.

Gisler war ein schwächlicher Mensch, dem ein gefrorenes Lächeln die Lippen umspielte und der nur Hochdeutsch sprach, aber schwäbelnd, weil er in Stuttgart aufgewachsen war. Er war aber Zürcher aus alter Familie. Er lud mich einmal zum Tee bei seinen Tanten ein; beide Damen sassen still und schüchtern auf ihren Stühlen, hinter ihnen hingen an den Wänden grosse Brustbilder von Lavater, Gessner, Bodmer; unser Gespräch bestand aus Hüsteln, Lächeln, Schweigen. ...

So war Freund Gisler, ein verträumter Mathematiker. Und er war nicht nur im Leben ungeschickt, er war es auch in seinem Fach; mit seiner Dissertation, von der es hiess, sie sei genial, trieb er es so verzagt, dass man sie ihm zusammenschreiben musste. Er kam mit der Reihenfolge der Beweise nicht zu Rande!

In Zürich machte er abends seinen Erholungsspaziergang am See, er kam vom Zürichhorn daher, und bei unserer Bank in der kleinen Riesbachanlage las er den Barometerstand ab. Er trug ständig einen Taschenbarometer bei sich und dazu einen Schrittmesser. Auch diesen konsultierte er bei der Bank, und es freute ihn, dass er vom Zürichhorn bis zu dieser Bank immer die gleiche Anzahl Schritte machte, die Abweichung betrug kein Promille. Das hatte er schon in Göttingen so gehalten; auf kleinen Wanderungen in der hügeligen Umgebung zeigte er mir stolz, dass er schon Höhendifferenzen von zehn Metern ablesen konnte.»

Das Bild von Finsler bliebe unvollständig, wenn ich nicht seine Schrift Nr. 32 «Vom Leben nach dem Tode» erwähnen würde. Er verfasste sie als Mitglied der «Gelehrten Gesellschaft» als 121. Neujahrsblatt auf das Jahr 1958. Sie fand viele Leser und ist vergriffen. Im Mittelpunkt steht in Abschnitt 9 eine Erkrankung des Verfassers, während der er in tiefe Bewusstlosigkeit verfiel. Wieder erwacht, überdeckt sich das Erleben des Jenseits mit dem Bisherigen, insbesondere mit seiner Wissenschaft. Wir treffen daher auf eine faszinierende Schilderung der unendlichen Sternenwelt und des Kosmos mit der Frage nach dem Leben auf anderen Sternen, wir begegnen natürlich auch den Auseinandersetzungen mit den Antinomien und der Frage nach der Wahrheit. So sehen wir in Finsler einen Menschen, bei welchem sich zwei verschiedene Ebenen der Wirklichkeit in einem Bildrahmen vereinigen: vorn die äussere, hinten die innere Wirklichkeit. Und dies ist, nach Georg Schmidt (Edvard

Munch), vielleicht die knappste Definition dessen, was wir Surrealismus nennen: Die Verbindung verschiedener Wirklichkeitsebenen im gleichen Bildraum.

Und noch eine andere Charakterisierung trifft auf Finsler zu: Die Abgeschlossenheit und die Ichbezogenheit seines Daseins. Wie er sagt: Ich bin jeder und jeder ist ich. Er war ein elliptischer Mensch. Sein Lebensraum erfüllte das Innere einer Ellipse, im einen Brennpunkt stand er, im Gegenpunkt der andere, aber dieser war derselbe. Einen Aussenraum gab es sowenig, wie es einen Zugang zu diesem Innenraum gab.