

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 1 (1899)  
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** REMARQUES SUR LES COORDONNÉES POLAIRES  
**Autor:** Loria, Gino  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-1243>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 08.01.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

mois de novembre prochain, un cours de nomographie générale, peut-être le premier en date. Puisse cet exemple trouver bientôt de nombreux imitateurs !

ERN. PASQUIER.

Louvain, le 31 juillet 1899.

---

## REMARQUES SUR LES COORDONNÉES POLAIRES

---

On considère d'ordinaire les coordonnées polaires d'un point  $M$  du plan comme deux nombres  $\rho$  et  $\omega$  — appelés l'un *rayon vecteur*, l'autre *anomalie* ou *azimuth* — dont le premier est le nombre positif qui mesure la distance entre  $M$  et un point fixe  $O$  (le *pôle*) tandis que le second représente l'angle, compté dans un sens déterminé, formé par la demi-droite  $OM$  avec une demi-droite fixe  $a$  (l'*axe polaire*) issue du point  $O$ . On ajoute que dans ce système chaque point est l'intersection de deux lignes coordonnées analogues ou correspondantes aux axes dans le système cartésien ; ces lignes sont un cercle dont  $O$  est le centre, et une droite qui passe par le point  $O$ .

Cette définition est parfaitement légitime et ne présente aucune imperfection si on l'applique à des points isolés ; c'est bien celle qu'adoptent tous les traités de Géométrie analytique. On a l'habitude de la légitimer davantage en établissant les relations entre les coordonnées polaires qu'on vient de définir et les coordonnées rectangulaires dont  $O$  est l'origine et  $a$  l'axe des abscisses. On ajoute encore que, si l'on a recours à la représentation des nombres complexes sur les points du plan, la première coordonnée polaire du point  $M$  n'est que le *module* ou *valeur absolue* du nombre complexe représenté par le point  $M$ , tandis que la seconde en est l'*amplitude* ou l'argument.

En se servant de la définition citée, il est aisé de résoudre les problèmes fondamentaux qu'offre l'analyse infinitésimale des courbes planes, tels que le tracé de la tangente, le calcul de

l'aire et la détermination du cercle osculateur, en un mot toutes les questions où il suffit de considérer un petit arc de la courbe. Mais lorsqu'on veut considérer et étudier toute une courbe on est arrêté par une difficulté extrêmement grave. En effet, comme en coordonnées cartésiennes on représente une courbe par une équation telle que

$$\varphi(x, y) = 0,$$

dans le système polaire on devra employer dans le même but une équation de la forme

$$f(\rho, \omega) = 0. \quad (1)$$

Or il est bien clair que si l'on fait varier  $\omega$  depuis  $-\infty$  jusqu'à  $+\infty$ , il arrivera en général que dans certains intervalles  $\rho$  sera positif, comme il doit, mais dans certains autres il acquerra des valeurs négatives, ce qui est une contradiction patente avec la définition d'où nous sommes partis. Cette circonstance n'a pas échappé aux meilleurs auteurs qui ont exposé la méthode des coordonnées; mais ils n'ont pas approfondi la question, ils se sont bornés à conseiller, pour vaincre cet obstacle, de passer à un système cartésien. C'est une véritable fuite, qui fait croire aux commençants que le système polaire est bien moins puissant que le système cartésien, dont il semble être l'esclave; c'est, d'un autre côté, une faute méthodologique, car la logique me semble imposer que, lorsqu'on a commencé à traiter un certain sujet à l'aide d'un certain système de coordonnées, on doit conserver ce système jusqu'à la fin. Mais il y a pire encore: l'empressement de revenir aux coordonnées cartésiennes empêche bien souvent de tirer tout le parti possible de la simplicité et de l'élégance des équations polaires, il ne permet pas d'étudier en même temps toutes les courbes d'une même famille, lorsque pour certaines valeurs du paramètre la courbe correspondante est algébrique, tandis que pour d'autres elle est transcendante <sup>(1)</sup>.

On peut éviter tous ces inconvénients en appliquant le fécond principe des signes en Géométrie, par une simple modification

---

(1) Je cite comme exemples les spirales sinusoïdes  $\rho^n = a^n \cos n\omega$ ,  $n$  étant le paramètre.

de la définition que nous avons rappelée au début de cet article : c'est ce que nous allons montrer.

Considérons dans un plan un point fixe  $O$  et une demi-droite  $a$  issue du point  $O$  ; imaginons qu'une demi-droite  $r$  tourne autour de  $O$  en partant de la position  $a$  dans le sens considéré comme positif ou dans le sens opposé. Pour chacune de ses positions on trouvera sur la demi-droite  $r$  une infinité de points (nous les indiquerons par la lettre  $M$ ) et un nombre égal se trouvera sur le prolongement de  $r$ , ou, comme nous préférons dire, sur la demi-droite complémentaire  $\bar{r}$  (nous les représenterons par  $\bar{M}$ ). Cela posé, pour fixer la position d'un point  $M$  on prendra deux nombres  $\varphi$ ,  $\omega$ , le premier toujours positif, assez définis par les égalités :

$$\varphi = + \text{longueur } \overline{OM}, \quad \omega = \text{angle } (ar);$$

au contraire la position d'un point  $\bar{M}$  est déterminée par deux nombres analogues, dont le premier est toujours négatif ; ils sont caractérisés par les relations :

$$\varphi = - \text{longueur } \overline{OM}, \quad \omega = \text{angle } (ar).$$

Par conséquent, tous les points d'une demi-droite auront la coordonnée  $\varphi$  positive, tandis que tous ceux de la demi-droite complémentaire l'auront négative ; et *vice versa* un point appartiendra à une demi-droite ou à sa complémentaire suivant que sa coordonnée  $\varphi$  sera positive ou négative. Quant à la coordonnée  $\omega$ , elle sera la même pour tous les points d'une demi-droite ; elle sera positive ou négative suivant que la demi-droite mobile, pour arriver à la position considérée, aura tourné dans le sens positif ou dans le sens négatif.

Ces définitions et conventions font voir que : 1° si une demi-droite  $r_0$  fait avec  $a$ , dans un sens déterminé, l'angle  $\omega_0$ , la demi-droite complémentaire  $\bar{r}_0$  fera avec le même axe et dans le même sens un angle égal à  $\omega_0 \pm \pi$  ; 2° la demi-droite  $r$  pour atteindre la position  $r_0$  peut être censée avoir tourné toujours dans le sens positif. Il s'ensuit que pour déterminer la position d'un point par nos coordonnées polaires, on pourrait toujours employer deux nombres positifs, au lieu de ceux auxquels mènent

directement les remarques précédentes. Mais cette substitution artificieuse est contraire à la nature même des choses, comme l'est, par exemple, la considération du logarithme principal, que Cauchy proposa et que personne n'emploie plus aujourd'hui.

Elle pourra *peut-être* réussir utilement, lorsqu'il s'agira de points isolés ou bien si l'on veut abandonner les coordonnées polaires pour s'adonner aux coordonnées cartésiennes ; mais, en général, elle rend plus compliquée la résolution des questions relatives aux courbes. Cela arrive particulièrement lorsqu'il s'agit d'un problème, qui pour le géomètre a une importance hors ligne, quoique ceux qui les premiers ont cultivé de la Géométrie analytique en aient méconnu la valeur, c'est-à-dire le problème de découvrir quelle forme a une courbe déterminée par une équation du type (1). Pour résoudre ce problème, c'est-à-dire pour construire la courbe donnée, la méthode qui découle de ce qui précède (et dont Archimède a fait — *mutatis mutandis* — la première application dans ses recherches sur la spirale qui porte son nom) est la suivante : Imaginons que la demi-droite  $r$  tourne autour du pôle  $O$ , en partant *par exemple* de la position  $a$ , dans un sens déterminé et après dans le sens opposé ; soit  $\omega_0$  l'angle que forme  $a$  avec une de ses positions  $r$  tout à fait arbitraire ; l'équation  $f(\rho, \omega_0) = 0$  donnera pour  $\rho$  un certain nombre de valeurs positives  $\rho_1, \rho_2, \dots$  et un certain nombre de négatives  $-\bar{\rho}_1, -\bar{\rho}_2, \dots$  ; aux premières correspondent les points  $M_1, M_2, \dots$  de la demi-droite  $r_0$  tels que

$$\overline{OM_1} = \rho_1, \overline{OM_2} = \rho_2, \dots$$

aux secondes les points  $\bar{M}_1, \bar{M}_2, \dots$  de la demi-droite complémentaire tels que

$$\overline{O\bar{M}_1} = \bar{\rho}_1, \overline{O\bar{M}_2} = \bar{\rho}_2, \dots$$

Tous ces points  $M_1, M_2, \dots, \bar{M}_1, \bar{M}_2, \dots$  appartiennent à la courbe (1).

En considérant toutes les positions possibles de la demi-droite  $r$ , on obtiendra tous les points de la courbe (1). On peut remarquer que la rotation de la droite  $r$  doit en général être effectuée sans fin *dans les deux sens*, lorsqu'il s'agit d'une courbe transcendante, mais lorsque la courbe (1) est algébrique, le mouvement pourra être arrêté après un certain nombre de tours,

car, en le continuant, on retomberait sur des points de la courbe déjà tracés.

Pour donner à ce que nous venons d'exposer, toute la clarté désirable, il est bon d'en faire application à quelques exemples.

Commençons par un cas très simple. Soit donnée l'équation

$$\rho = 2R \sin \omega; \quad (2)$$

elle montre que si  $0 < \omega < \pi$  on a  $\rho > 0$ ,

tandis que si  $\pi < \omega < 2\pi$  on a  $\rho < 0$ :

elle montre aussi qu'aux valeurs  $\omega = \omega_0$  et  $\omega = \omega_0 + 2\pi$  correspond la même valeur de  $\rho$ . Cela prouve que pour obtenir la courbe représentée par l'équation (2) il suffit de faire accomplir à la demi-droite  $r$  un tour complet; pour chaque position de la demi-droite génératrice appartenant aux premiers demi-tours, on a un point de la courbe, mais pour chaque position de la demi-droite relative au second demi-tour on a un point sur la demi-droite complémentaire <sup>(1)</sup>. On peut ajouter la remarque que les valeurs  $\omega = \omega_0$  et  $\omega = \pi - \omega_0$  donnent pour  $\rho$  des valeurs égales. Par conséquent la courbe est composée d'un seul arc appartenant au demi-plan qui se trouve au-dessus de l'axe polaire, arc qui est symétrique par rapport à la droite menée par le pôle perpendiculairement à l'axe polaire. C'est ce qu'il est très aisé de vérifier en remarquant que la courbe (2) n'est que le cercle de rayon  $R$  tangent au pôle à l'axe polaire et dont le centre est au-dessus de cet axe.

La courbe représentée par l'équation (2) appartient à la classe des « rhodonées » de G. Grandi ou « rosaces », dont  $\rho = 2R \sin n\omega$  est l'équation générale. Or cette classe (qui comprend des courbes algébriques et des courbes transcendentes et dont l'étude générale au moyen des coordonnées cartésiennes est malaisée) peut très bien servir à prouver l'utilité des nouvelles coordonnées polaires; en particulier elle nous fournira le second exemple des considérations précédentes.

---

(<sup>1</sup>) C'est du reste un point déjà trouvé pendant le premier demi-tour.

Supposons  $n = \frac{1}{2}$ ; nous avons alors la courbe

$$\rho = 2R \sin \frac{\omega}{2} \quad (3)$$

Aux valeurs  $\omega = \omega_0$  et  $\omega = \omega_0 + 4\pi$  correspond la même valeur de  $\rho$ : donc deux tours de la droite génératrice sont suffisants pour décrire complètement la courbe. En outre l'équation (3) fait voir que

si  $0 < \omega < 2\pi$  on a  $\rho < 0$

si  $2\pi < \omega < 4\pi$  on a  $\rho < 0$ .

Cela prouve que sur chaque demi-droite du premier tour il existe un point de la ligne dont il s'agit; le lieu géométrique de

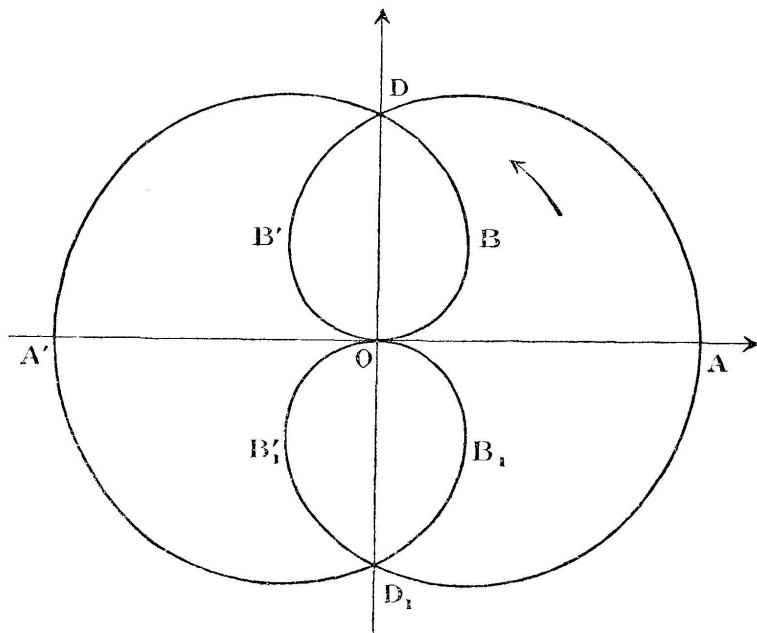


Fig. 1.

tous ces points est un arc fermé  $OBDA'D_1B_1O$  tangent à l'axe polaire (fig. 1). Au contraire sur aucune demi-droite du second tour on ne trouve un point de la courbe, mais il en existe un sur le complémentaire de chacune de ces demi-droites; tous ces nouveaux points engendrent un autre arc fermé  $OB'_1D_1ADB'O$  (symétrique par rapport à  $O$  du précédent) qui complète la courbe. Cette courbe a deux points doubles  $D$  et  $D_1$  et au pôle un point de contact de deux branches; elle a deux axes de symétrie orthogonaux entre eux, car à ses valeurs de  $\omega$ , telles que  $\omega_0$ ,  $2\pi - \omega_0$ ,  $2\pi + \omega_0$  correspondent pour les rayons vecteurs des valeurs arithmétiquement égales. Comme contrôle de ces

conclusions, remarquons que, si on passe aux coordonnées cartésiennes, l'équation (2) devient

$$(x^2 + y^2)^3 - 4R^2(x^2 + y^2)^2 + 4R^4y^2 = 0,$$

dont la discussion mène aux mêmes conséquences relatives à la forme de la courbe que nous avons obtenues plus haut.

Ces exemples pourraient être multipliés à l'infini. Nous nous bornerons à ces deux qui nous semblent suffisants pour notre but. Mais, avant de finir, nous croyons nécessaire d'ajouter une remarque sur certaines spirales bien connues; de cette remarque il s'ensuivra que l'idée ordinaire qu'on a de leur forme est, du point de vue où nous sommes placés, incomplète sinon fautive.

La définition ordinaire de la spirale d'Archimède se traduit par l'équation

$$\rho = a\omega. \quad (4)$$

On peut toujours supposer  $a > 0$ , car, dans le cas contraire on écrira  $\rho = -a(-\omega)$  et, en changeant le sens positif des angles on retombera sur l'hypothèse  $a > 0$ .

En faisant varier  $\omega$  depuis 0 jusqu'à  $+\infty$ , on voit que la courbe part du pôle, autour duquel elle fait un nombre infini de tours en s'en éloignant sans borne; on arrive de cette manière à l'arc tracé en ligne pleine dans la figure 2: on le considère d'ordinaire comme composant toute la courbe représentée par l'équation (4). Mais si après, on fait varier  $\omega$  depuis 0

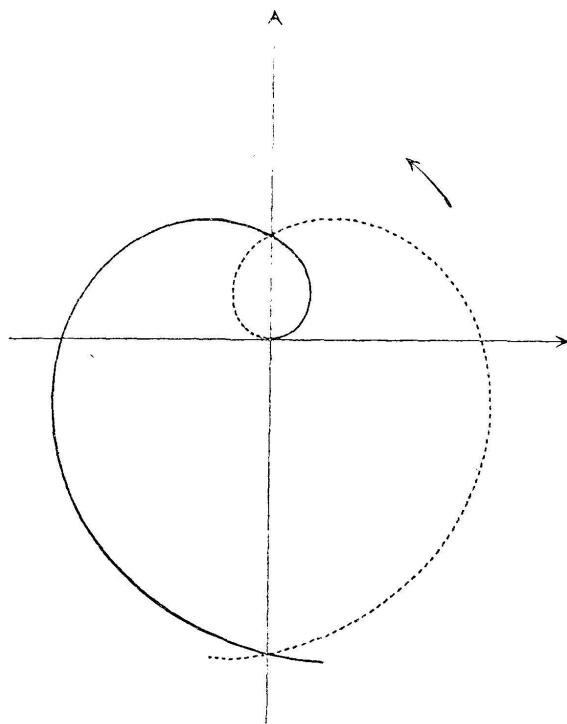


Fig. 2.

jusqu'à  $-\infty$ , on obtient sur le prolongement de chaque demi-droite un point de la courbe, et tous ces nouveaux points forment une nouvelle branche, symétrique de la précédente par rapport à l'axe polaire *secondaire* <sup>(1)</sup>: c'est la branche pointillée de la figure 2.

(<sup>1</sup>) Qu'il me soit permis pour abrégé de donner ce nom à la demi-droite qui fait avec l'axe polaire dans le sens positif un angle droit.



Or il est évident qu'en voulant laisser à l'angle variable  $\omega$  toute la liberté à laquelle il a droit, on devra le faire varier entre  $-\infty$  et  $+\infty$ ; en conséquence (contrairement à ce qu'on continue de faire) comme *représentation géométrique* COMPLÈTE de l'équation (4) nous considérons l'ensemble des deux branches qu'on voit tracées dans la figure 2. Nous voyons donc que *la spirale d'Archimède est douée d'une infinité de points doubles placés sur l'axe polaire secondaire*; ils correspondent aux valeurs de  $\rho$  exprimées par  $(2k + 1) \frac{\pi}{2} a$ ,  $k$  étant un nombre entier nul ou positif.

On prouve d'une manière analogue que parmi les spirales représentées par l'équation

$$\rho = a\omega^n, \quad (5)$$

où  $n$  est un nombre entier positif, celles qui correspondent à  $n$  pair sont symétriques par rapport à l'axe polaire, tandis que les autres le sont par rapport à l'axe secondaire; les premières ont au pôle un point de rebroussement et sur l'axe polaire  $\infty^1$  points doubles, les autres ont  $\infty^1$  points doubles sur l'axe secondaire.

Nous laissons aux jeunes lecteurs le soin d'énoncer les propriétés analogues des courbes comprises dans l'équation.

$$\rho^m = a^m \omega^n, \quad (6)$$

$m$  et  $n$  étant des nombres entiers positifs ou négatifs; et aussi de vérifier que la spirale logarithmique

$$\rho = ae^{b\omega} \quad (7)$$

est formée, en dehors de la branche continue que l'on considère d'ordinaire, d'une autre pointillée analogue à celle bien connue qui fait partie de la courbe logarithmique.

Les considérations précédentes, quoique très simples et élémentaires, m'ont semblé dignes d'être exposées ici, car elles se rapportent à un point de doctrine fondamentale dans l'étude de la Géométrie analytique appliquée aux courbes planes. Il est à peine nécessaire d'avertir qu'on pourrait les étendre à l'espace.