

§2. — Description des modèles

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **2 (1900)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **10.08.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

et éliminons les grandeurs $\frac{\omega}{\Omega}$ et C à l'aide des équations (IV) et (VII).

$$(XI a) \quad \begin{aligned} x &= (a + b) \cos \lambda + c \cos \frac{a + b}{b} \lambda, \\ y &= (a + b) \sin \lambda + c \sin \frac{a + b}{b} \lambda. \end{aligned}$$

Nous aurons de même pour une épitrochoïde à centre couvert

$$(XI b) \quad \begin{aligned} x &= C \cos \frac{B - A}{B} \Lambda + (B - A) \cos \Lambda, \\ y &= C \sin \frac{B - A}{B} \Lambda + (B - A) \sin \Lambda, \end{aligned}$$

où

$$\Lambda = \Omega t.$$

Enfin pour l'hypotrochoïde, nous aurons l'un des deux groupes

$$(XI c) \quad \begin{aligned} x &= (a - b) \cos \lambda + c \cos \frac{b - a}{b} \lambda, \\ y &= (a - b) \sin \lambda + c \sin \frac{b - a}{b} \lambda, \end{aligned}$$

dans lequel

$$\lambda = \omega t,$$

ou

$$\begin{aligned} x &= C \cos \frac{B - A}{B} \Lambda + (A - B) \cos \Lambda, \\ y &= C \sin \frac{B - A}{B} \Lambda + (A - B) \sin \Lambda, \end{aligned}$$

dans lequel

$$\Lambda = \Omega t.$$

Ces équations peuvent être utilisées pour l'étude de courbes particulières; mais elles sont évidemment moins simples et moins générales que les équations (I) et (XI).

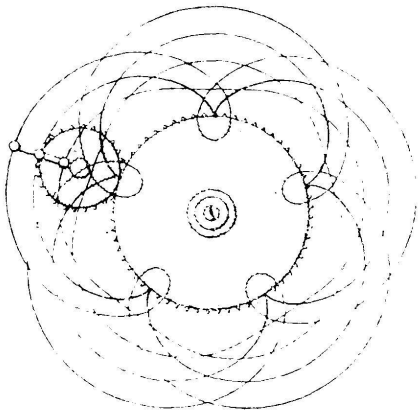
§ 2. — DESCRIPTION DES MODÈLES

Ces modèles se partagent en quatre groupes que nous allons successivement examiner.

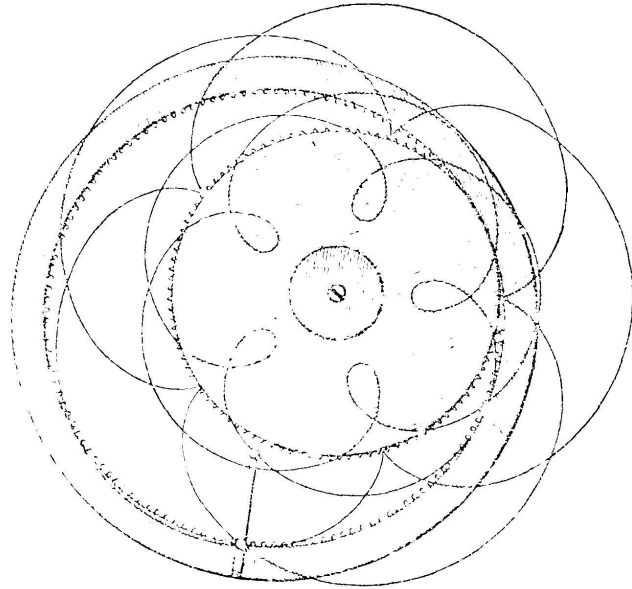
Les quatre modèles du premier groupe montrent les doubles générations des épitrochoïdes et hypotrochoïdes (mod. 1-4).

Le premier modèle donne les trois sortes d'épistrochoïdes : allongée, raccourcie et ordinaire, à centre libre ; le deuxième la même épistrochoïde allongée comme au premier mais à centre couvert, et une épistrochoïde ordinaire complètement différente. On

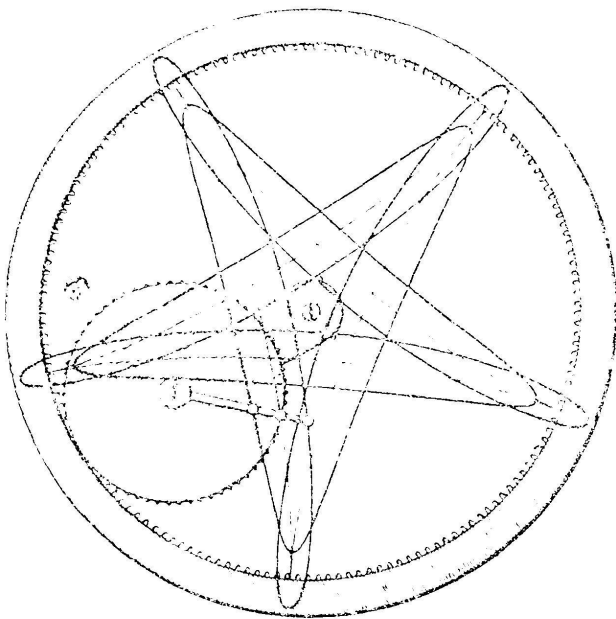
PREMIER GROUPE



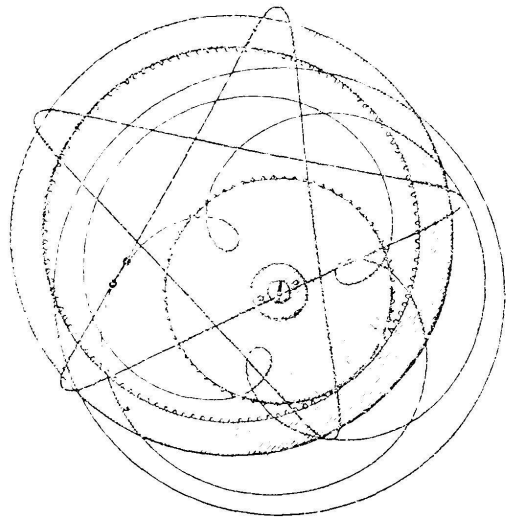
Modèle 1.



Modèle 2.



Modèle 3.



Modèle 4.

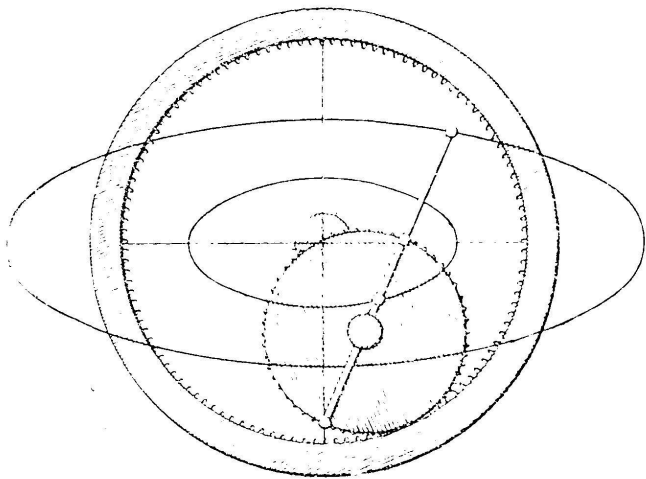
remarquera, dans les deux modèles, les positions relatives de la trochoïde ordinaire et de la trochoïde allongée.

Les deux modèles suivants nous montrent de la même façon, les trois sortes d'hypotrochoïdes : allongée, raccourcie et ordinaire, à centre libre (mod. 3) et à centre couvert (mod. 4). Tandis qu'un point du système mobile décrit une trochoïde dans

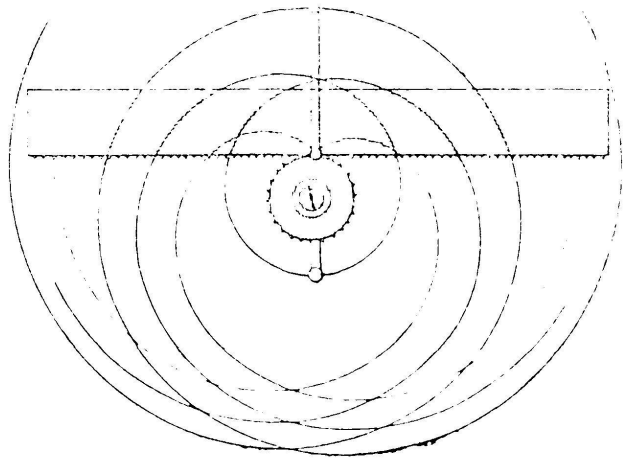
le système solide, réciproquement un point du système solide décrit également une trochoïde dans le système mobile. C'est ainsi que dans le modèle 4, un point du système fixe décrit une épitrochoïde à centre couvert, tandis qu'un point du système mobile, décrit une hypotrochoïde qui est d'ailleurs la même que l'hypotrochoïde raccourcie représentée sur le modèle 3 : d'autre part les positions initiales des deux points décrivants coïncident.

Comme on peut s'en rendre compte d'après les figures ces modèles consistent en deux cercles représentés par des disques

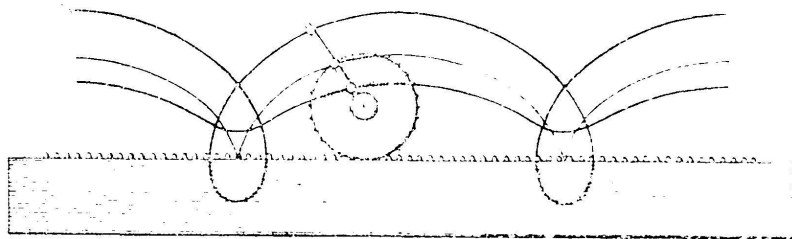
DEUXIÈME GROUPE



Modèle 5.



Modèle 6.



Modèle 7.

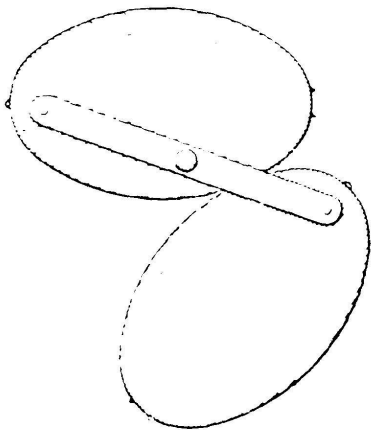
ou des anneaux de métal (feuilles de zinc) qui sont assujettis à rouler l'un sur l'autre au moyen d'un système d'engrenages. On dirige le cercle mobile sur le cercle fixe à l'aide d'une manivelle fixée sur le côté postérieur. Les courbes sont marquées sur un disque de verre ; les points décrivants sont représentés par des petites boules.

Le *deuxième groupe* donne avec ses trois modèles les cas spéciaux des courbes cycloïdales (mod. 5, 6 et 7). Le premier modèle

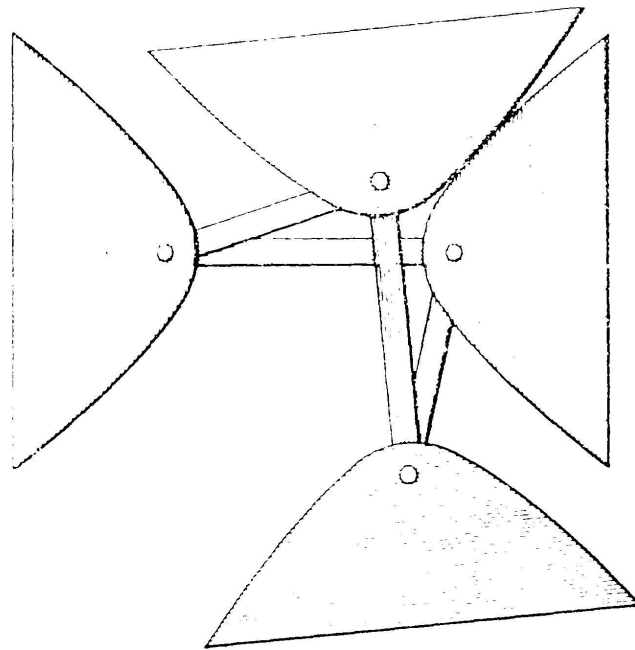
montre les générations d'ellipses et de droites, par roulement d'un cercle à l'intérieur d'un cercle de rayon double (Th. 7), en même temps il permet de vérifier le fait que si une droite se meut, de telle sorte que ses extrémités glissent sur deux droites qui se coupent, tout point lié invariablement à cette droite décrit une ellipse ou une double droite.

Les deux autres modèles représentent les générations des développantes de cercles et des cycloïdes allongées, ordinaires

TROISIÈME GROUPE.



Modèle 8.



Modèle 9.

et raccourcies par roulement d'une droite sur un cercle et d'un cercle sur une droite⁽¹⁾.

La construction de ces modèles est absolument analogue à celle des précédents. Pour rendre possible le roulement de la droite sur le disque circulaire dans le modèle 6, l'extrémité de la manivelle aboutit à un curseur qui glisse sur le côté infé-

(¹) Par analogie, nous appellerons développante de cercle allongée, raccourcie, ou ordinaire, la courbe décrite par un point invariablement lié à une droite qui roule sur un cercle suivant que ce point sera du même côté de la droite que le centre du cercle mobile, de l'autre côté ou sur la droite même.

De même la cycloïde sera dite allongée, raccourcie ou ordinaire selon que le point décrivant, sera à l'extérieur, à l'intérieur, ou sur la circonférence du cercle mobile.

(Il faut pourtant remarquer que la courbe décrite par un point de la droite est seule une véritable développante de cercle; les deux autres courbes ne répondant nullement à la définition de la développante.) — Note du trad.

rieur de la droite ; dans le modèle de la cycloïde on remplace généralement la manivelle par un dispositif, qui peut passer sous la droite.

Les deux modèles du *troisième groupe* concernent les manivelles antiparallèles à rotations de même sens et à rotations contraires, avec leurs trajectoires polaires (mod. 8 et 9).

Elles consistent en un contre-parallélogramme articulé KLMN (fig. 8) dont les côtés sont égaux deux à deux. Suivant que l'on

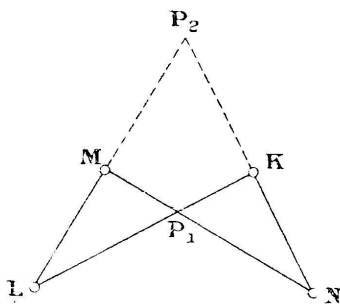


Fig. 8.

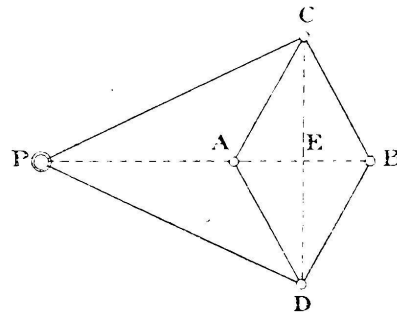


Fig. 9.

fixe, un des petits côtés ou un des grands, les deux côtés adjacents au côté fixe, « les manivelles » peuvent tourner dans le même sens ou en sens contraire. Les trajectoires polaires roulant l'une sur l'autre pendant le mouvement sont deux ellipses congruentes (ou deux hyperboles), lieux des points d'intersection P_1 (ou P_2) des manivelles dans le système fixe et dans la figure liée au côté opposé, qu'on nomme le « lien »⁽¹⁾.

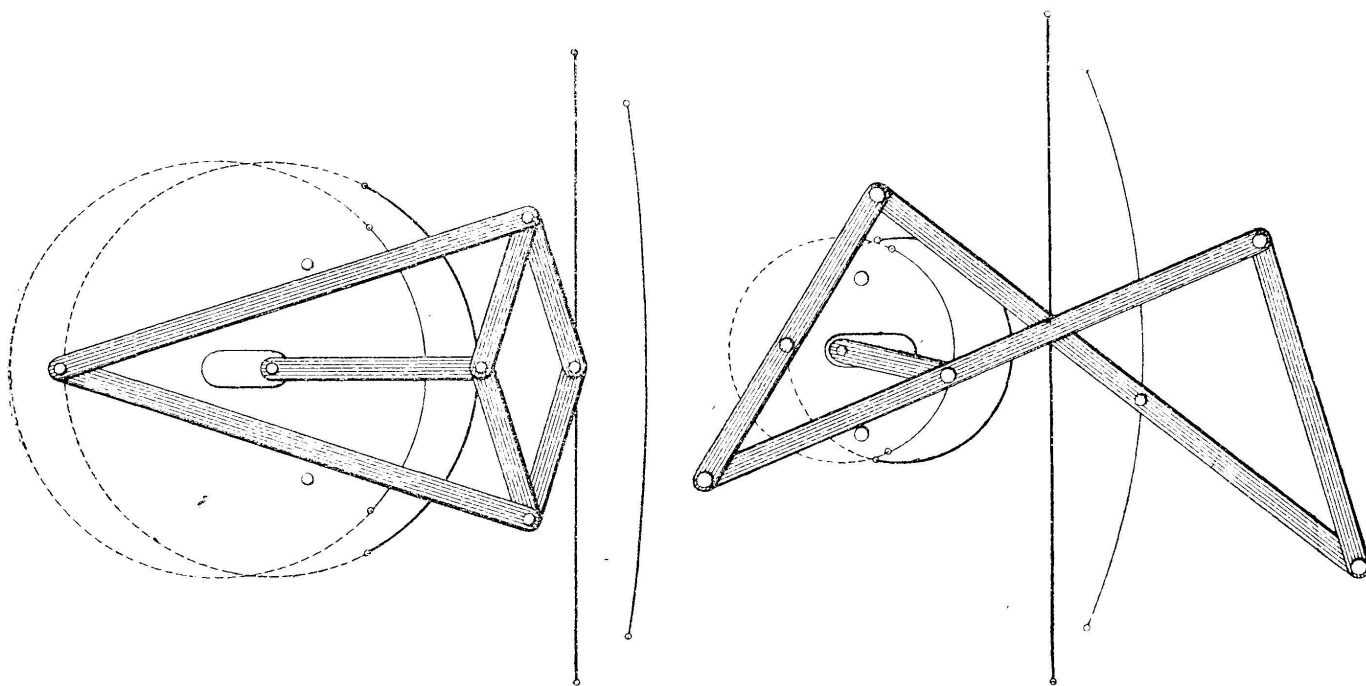
La disposition générale des modèles est suffisamment visible dans les figures. On produit le roulement dans le premier modèle en agissant sur un petit bouton que l'on voit sur une des manivelles, dans le second au moyen d'une manivelle placée à l'envers du modèle. On a d'ailleurs ajouté des dents d'engrenage, pour faciliter le passage des points d'inversion au moment où le contre-parallélogramme se changerait en parallélogramme (les quatre côtés tombent alors en ligne droite).

Enfin le *quatrième groupe* contient les inverseurs de Peaucellier, de Hart et de Sylvester-Kempe, appareils pour effectuer les transformations par rayons réciproques (mod. 10, 11 et 12).

⁽¹⁾ Voir : BURMESTER, *Lehrbuch der Kinematik*, p. 302 et suiv. et REULEAUX, *Theoretische Kinematik* (Braunschweig, 1875), p. 187 et suiv., traduction française par A. Debitze. Paris, 1877, p. 308 et suiv.

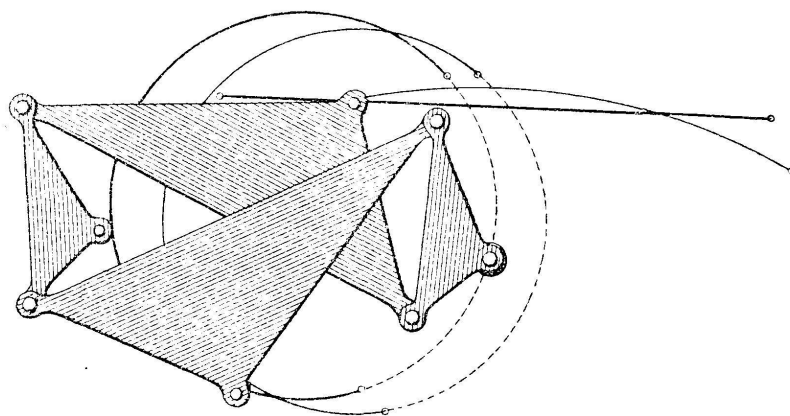
Ces trois inverseurs ont entre eux des rapports étroits, qui ne sont pas assez connus; je voudrais les indiquer en quelques mots et rappeler en même temps sur quelle base mathématique reposent ces appareils.

QUATRIÈME GROUPE



Modèle 10.

Modèle 11.



Modèle 12.

Commençons par l'inverseur Peaucellier, découvert le premier (1864). Ce système articulé se compose d'un rhombe $ABCD$, et de deux tiges égales PC et PD , qui se joignent en P et aboutissent à deux sommets opposés du rhombe (fig. 9).

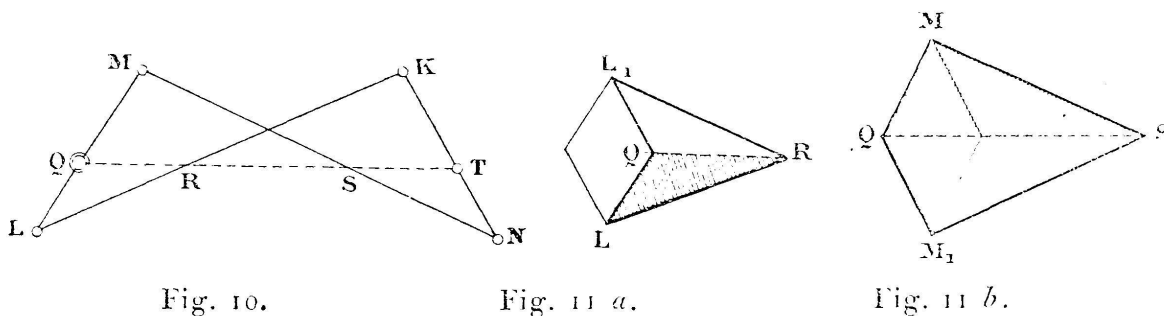
(¹) Voir : BURMESTER, *Lehrbuch der Kinematik*, p. 564 et suiv.; KEMPE, *How to draw a straight line*. London, 1877; NEUBERG, *Systèmes de tiges articulées*. Liège, 1886.

Quelle que soit la déformation on a :

$$\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PE}^2 - \overline{AE}^2 = \overline{PC}^2 - \overline{AC}^2,$$

Les points A et B sont deux points correspondants d'une transformation par rayons réciproques, de centre P et de puissance $\overline{PC}^2 - \overline{AC}^2$.

L'inverseur de Hart (1874) consiste en un contre-parallélogramme articulé KLMN ($KL = MN$, $KN = LM$) (fig. 10). La droite idéale QT, menée parallèlement à KM, coupe les tiges



en des points Q, R, S, T. Si l'on construit les symétriques des triangles LQR et MQS par rapport à la droite QT, on a les figures LQRL₁ et MQSM₁ (fig. 11 a et 11 b) qui représentent les parties CAPD et CBPD de l'inverseur Peaucellier.

Comme dans ce dernier $\overline{QR} \cdot \overline{QS}$ est constant, il est égal ici à

$$(\overline{MN}^2 - \overline{ML}^2) \frac{\overline{MS} \cdot \overline{SN}}{\overline{MN}^2}.$$

Les points R et S correspondent dans une transformation par rayons réciproques dont le centre est Q et dont la puissance est la constante indiquée.

L'inverseur de Sylvester-Kempe (1875) n'est qu'une généralisation du précédent; il se compose de quatre triangles semblables dont quatre côtés analogues forment le parallélogramme KLMN (fig. 12).

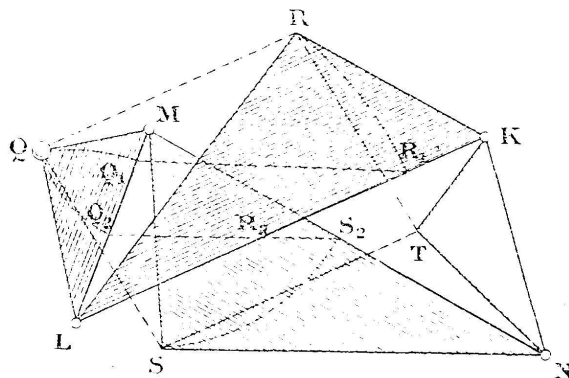


Fig. 12.

On peut amener la droite idéale QR, dans la position Q₁R₁ || MK, en faisant tourner les points Q et R d'angles

égaux \widehat{QLM} , \widehat{RLK} , autour de L; de même on amènera la droite QS en $Q_2S_2 \parallel MK$ en faisant tourner Q et S d'angles égaux \widehat{QML} , \widehat{SMN} autour de M. Il s'ensuit que non seulement l'angle \widehat{RQS} reste constant, mais que l'on a aussi $QR \cdot QS = Q_1R_1 \cdot Q_2S_2$, de même que $Q_2R_2 \cdot Q_2S_2$ est constant et encore égal à

$$(\overline{MN}^2 - \overline{ML}^2) \frac{MS \cdot SN}{\overline{MN}^2}. \quad (1)$$

Pendant la déformation du système articulé, les quatre points Q, R, S, T forment donc un parallélogramme dont les angles sont constants, et dont l'aire est constante.

Si l'on fixe le point Q, les points R et S donnent deux points correspondants d'une transformation ordinaire par rayons réciproques dont le centre est Q et dont la puissance est égale à la constante indiquée plus haut, qui suppose que l'un des points R ou S, a tourné d'un angle \widehat{RQS} , autour de Q dans un sens convenablement choisi.

Ces trois modèles sont construits comme les précédents, complètement en métal. A l'un des points choisis pour la transformation, on a fixé un bras de manivelle dont la rotation est assurée, même dans les deux positions limites par un dispositif spécial placé sur la face inférieure du modèle. Quand on fera tourner la manivelle, le premier point suivra soit un arc de cercle dont le centre est le centre fixe de la transformation, soit un autre arc de cercle coupant le premier, le point correspondant décrira alors soit une droite, soit un arc de cercle. Ces diverses courbes se dessinent sur la planche qui porte l'appareil.

FR. SCHILLING (Gœttingue).

Traduit de l'allemand par H. DUAIME.

(¹) Comparer à l'inverseur de Hart.