

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **2 (1900)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **17.09.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

CORRESPONDANCE

Paris, mai 1900.

Mon cher Laisant,

L'article de M. Redl dans le dernier numéro de *l'Enseignement mathématique*, m'a remis en mémoire les analogies de Néper et de Delambre. Il y a quelque quarante ans, je faisais de la Cristallographie et en usais souvent; mais il me fallait toujours les rechercher dans les traités, faute d'une démonstration simple me permettant de les retrouver rapidement; j'y arrivai enfin comme suit.

Inscrivons une circonférence dans un triangle sphérique. Soit p le demi-périmètre; on a de suite, si r est le rayon du cercle inscrit :

$$(1) \quad \operatorname{tg} r = \operatorname{tg} \frac{A}{2} \sin (p-a) = \operatorname{tg} \frac{B}{2} \sin (p-b) = \operatorname{tg} \frac{C}{2} \sin (p-c);$$

un cercle ex-inscrit de rayon r_a donne

$$(2) \quad \operatorname{tg} r_a = \operatorname{tg} \frac{A}{2} \sin p = \operatorname{cotg} \frac{B}{2} \sin (p-c) = \operatorname{cotg} \frac{c}{2} \sin (p-b),$$

d'où

$$\operatorname{tg} r \operatorname{tg} r_a = \operatorname{tg}^2 \frac{A}{2} \sin p \sin (p-a) = \sin (p-b) \sin (p-c).$$

Considérons maintenant le petit cercle circonscrit : si O est son centre,

$$\begin{aligned} OAB = OBA = \gamma, \quad OAC = OCA = \beta, \quad OBC = OCB = \alpha, \\ \alpha + \beta = C \quad \alpha + \gamma = B \quad \beta + \gamma = A. \end{aligned}$$

Si on pose

$$2(\alpha + \beta + \gamma) = P = A + B + C,$$

on a

$$(3) \quad \operatorname{tg} R = \frac{\operatorname{tg} \frac{a}{2}}{\cos (P-A)} = \frac{\operatorname{tg} \frac{b}{2}}{\cos (P-B)} = \frac{\operatorname{tg} \frac{c}{2}}{\cos (P-C)},$$

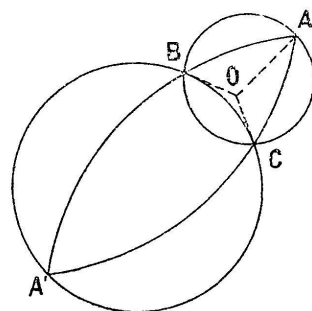


Fig. 1.

et le triangle $A' B C$ donnerait

$$(i) \quad \operatorname{tg} R_A = \frac{\operatorname{tg} \frac{a}{2}}{\cos P} = \frac{\operatorname{cotg} \frac{b}{2}}{\cos (P-C)} = \frac{\operatorname{cotg} \frac{c}{2}}{\cos (P-B)},$$

et

$$\operatorname{tg} R \operatorname{tg} R_A = \frac{\operatorname{tg}^2 \frac{a}{2}}{\cos P \cos (P-A)} = \frac{1}{\cos (P-B) \cos (P-C)}.$$

On trouve ainsi les formules que M. Redl appelle du demi-angle.

J'arrive aux analogues.

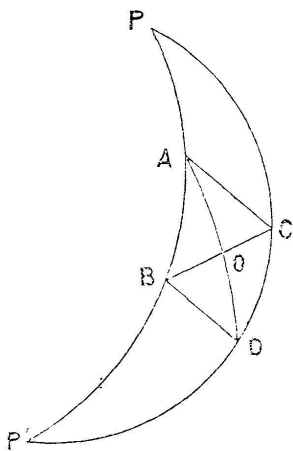


Fig. 2.

1. Soit un triangle ABC ; je construis le parallélogramme $ABDC$, en joignant A au milieu de BC , et prolongeant de $OD = OA$. $ABDC$ est la projection sur la sphère d'un parallélogramme construit dans le plan tangent en O , et dont le centre serait en O . $OP = OP' = \frac{\pi}{2}$, $PA = P'D$, $PC = P'B$. Les quatre côtés sont égaux deux à deux, ainsi que les angles opposés; mais la somme des dièdres BAC , DCA n'est pas 2 droits, comme dans le plan: quelle relation y a-t-il entre ces angles? Egalons les valeurs du rayon du cercle ex-inscrit à PAC , et tangent à PC ,

$$\operatorname{tg} \frac{CAP}{2} \sin \left(\frac{AP + PC + AC}{2} \right) = \operatorname{cotg} \frac{PCA}{2} \sin \left(\frac{AP + PC - AC}{2} \right);$$

mais

$$CAP = \pi - A, \quad PCA = \pi - (B + C), \quad AP + PC = \pi - CD = \pi - C;$$

d'où

$$\operatorname{cotg} \frac{A}{2} \cos \frac{b-c}{2} = \operatorname{tg} \left(\frac{B+C}{2} \right) \cos \frac{c+b}{2},$$

et par application au triangle $\pi - a, b, \pi - c, \pi - A, B, \pi - C$,

$$\operatorname{tg} \frac{A}{2} \sin \frac{c+b}{2} = \operatorname{cotg} \frac{B-C}{2} \sin \frac{b-c}{2},$$

d'où

$$\operatorname{tg} \frac{b+c}{2} \operatorname{cotg} \frac{b-c}{2} = \operatorname{tg} \frac{B+C}{2} \operatorname{cotg} \frac{B-C}{2}.$$

II. ABC étant toujours le triangle, on prolonge AB, et l'on prend $AC' = \pi - AC$; les angles $AC'C$, ACC' sont supplémentaires et l'on a

$$BC'C + BCC' + CBC' = \pi - C + \pi - B,$$

$$BC'C + BCC' - CBC' = B - C,$$

d'où, par la formule (4) appliquée à $BC'C$,

$$\operatorname{tg} \frac{BC}{2} \cos \frac{B-C}{2} = -\operatorname{cotg} \frac{BC'}{2} \cos \frac{B+C}{2},$$

ou

$$\operatorname{tg} \frac{a}{2} \cos \frac{B-C}{2} = \operatorname{tg} \frac{b+c}{2} \cos \frac{B+C}{2},$$

et, par application au triangle $\pi - a, b, \pi - c, \pi - A, B, \pi - C$

$$\operatorname{cotg} \frac{a}{2} \sin \frac{B+C}{2} = \operatorname{cotg} \frac{b-c}{2} \sin \frac{B-C}{2}.$$

On peut donc établir toutes ces formules en partant du triangle rectangle.

S'il existe un triangle a, b, c, A, B, C , il existe :

1° 1 triangle $\pi - A, \pi - B, \pi - C, \pi - a,$
 $\pi - b, \pi - c$;

2° 3 triangles $a, \pi - b, \pi - c, A, \pi - B,$
 $\pi - C$;

3° 3 triangles $a, x, \pi - a - b, X, \pi - C, \pi - (A + B)$;

4° 3 triangles, $a, x, \pi - (b - c), X, \pi - B, \pi - (X - C)$.

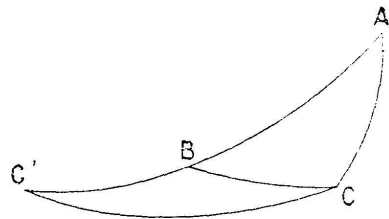


Fig. 3.

A une relation quelconque entre les éléments du premier correspond par 1° et 2° une relation entre le même nombre d'éléments, qui peut être identique à la première; par 3°, 4°, il n'en est plus de même; une relation du triangle primitif ne se transforme en une autre relation de ses éléments, que si elle ne contient que $a, b + c, B$ et C pour 3°, et a, c, B et $C + A$ pour 4°.

Pratiquement, je ne me servais que de 3 relations (1), qui par les transformations 2° donnent les relations (2); de (1) et (2) par la transformation 1° on déduit (3) et (4); et par les transformations 3° et 4° on déduit les analogies de (2) et (4).

Bien à vous,

A. POTIER.