

# PROBLÈMES MATHÉMATIQUES

Autor(en): **Hilbert, D.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **2 (1900)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **15.09.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-3575>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

# PROBLÈMES MATHÉMATIQUES <sup>(1)</sup>

---

## GÉNÉRALITÉS

Lorsque une science progresse d'une manière continue, on peut juger de son développement ultérieur par l'examen des problèmes qui l'occupent actuellement.

L'existence de problèmes précis a une importance capitale et pour le progrès des mathématiques et pour le travail de chaque chercheur.

*A quels signes pourrons-nous reconnaître quels sont parmi ces problèmes les plus proches à faire avancer notre science ?*

Un problème doit être bien défini ; son sens et sa portée faciles à saisir ; il doit être difficile, mais non pas inabordable.

Nous pouvons citer comme exemples, d'une part le problème de Fermat, par lequel Kummer a été amené à introduire les idéaux dans la théorie des nombres algébriques, et d'autre part le problème des trois corps.

*D'où nous viennent les problèmes mathématiques ?*

C'est l'expérience qui, dans chaque domaine, pose devant nous les problèmes primaires. (Duplication du cube, quadrature du cercle, les premiers problèmes de l'analyse infinitésimale et de la théorie du potentiel.)

Dans le développement ultérieur de la science, c'est notre esprit qui, par des raisonnements logiques (combinaison, généralisation, spécialisation), crée lui-même des problèmes nouveaux et féconds. (Problème des nombres premiers, problèmes provenant de la théorie de Galois, de la théorie des fonctions elliptiques et de celle des fonctions automorphes.)

---

(<sup>1</sup>) Résumé de la conférence tenue par M. HILBERT à la sixième section (*Enseignement et méthodes*) du Congrès international des mathématiciens, le 8 août 1900.

*A quelles exigences la solution d'un problème mathématique doit-elle répondre ?*

Nous disons qu'une question est résolue, lorsque, en nous appuyant sur un nombre fini d'hypothèses fournies par le problème lui-même, nous pouvons démontrer la justesse de la solution à l'aide d'un nombre fini de syllogismes.

La *rigueur mathématique* que nous exigeons ainsi n'entraîne pas nécessairement des démonstrations compliquées ; la méthode la plus rigoureuse est souvent la plus simple et la plus facile à comprendre. (Introduction des intégrales abéliennes dans la théorie des courbes algébriques, emploi des séries de puissances dans la théorie des fonctions.)

Les conceptions de l'Arithmétique ou celles de l'Analyse ne sont pas les seules qui soient susceptibles d'un traitement rigoureux. Celles de la Géométrie et des sciences physiques le sont également, pourvu qu'au moyen d'un système complet d'axiomes, elles soient aussi bien fixées que les conceptions de l'arithmétique.

Chaque système de conceptions nous conduit à créer un système de symboles destinés à servir d'instruments de démonstration.

Une démonstration faite au moyen des symboles géométriques sera donc parfaitement légitime, dès que l'on se rendra un compte exact des axiomes qui leur servent de base. (Minkowski, *Geometrie der Zahlen*.)

Lorsqu'un problème présente des difficultés sérieuses, *par quelles méthodes pouvons-nous l'attaquer ?*

D'abord par *généralisation*, en rattachant le problème considéré à un groupe de questions du même ordre. (Introduction des nombres idéaux dans la théorie des nombres algébriques, emploi des chemins complexes dans la théorie des intégrales définies.)

Ou bien par *spécialisation*, en approfondissant l'étude de problèmes analogues plus simples déjà résolus.

L'échec des tentatives faites pour résoudre un problème provient souvent de ce que la question est impossible à résoudre sous la forme donnée. Nous exigeons alors une *démonstration rigoureuse de l'impossibilité*. (Axiome des parallèles, quadrature du cercle, résolution algébrique des équations du 5<sup>e</sup> degré.)

Mais nous avons la conviction qu'en mathématique, il sera tou-

jours possible ou bien de résoudre le problème, ou bien de démontrer qu'il ne comporte aucune solution.

Jamais mathématicien ne sera réduit à dire : *Ignorabimus*.

## ÉNONCÉ DE QUELQUES PROBLÈMES

Nous voulons illustrer ce que nous venons de dire par quelques problèmes empruntés aux divers domaines des mathématiques, et qui nous semblent particulièrement propres à contribuer à l'avancement de notre science.

### I. PROBLÈMES RELATIFS AUX NOTIONS FONDAMENTALES

#### 1. *Problème de Cantor sur la puissance du continu.*

*Chaque ensemble de nombre est équivalent ou bien à l'ensemble des nombres entiers rationnels, ou bien au continu.*

Le premier pas à faire pour trouver la démonstration de ce théorème serait peut-être de résoudre le problème suivant :

*Mettre le continu sous la forme d'un ensemble bien ordonné (wohlgeordnete Menge).*

#### 2. *Axiomes de l'Arithmétique.*

*Trouver un système d'axiomes régissant et définissant les conceptions arithmétiques ;*

*Examiner si ces axiomes sont indépendants les uns des autres, et, dans le cas contraire, mettre en évidence les parties communes, de façon à obtenir un système d'axiomes complètement indépendants ;*

*Enfin prouver que ces axiomes sont compatibles, c'est-à-dire qu'une suite finie de déductions logiques partant de ces axiomes, ne peut jamais conduire à une contradiction.*

Nous disons qu'une conception existe au point de vue mathématique, lorsque les axiomes qui la définissent sont compatibles. D'après cette définition, la solution du problème précédent ne serait autre chose que la démonstration de l'existence mathématique du continu. De là, nous serions peut-être conduits à établir de la même manière l'existence des ensembles de puissance transfinie supérieure.

3. *Axiomes de la Physique.*

*Établir les systèmes d'axiomes du Calcul des probabilités, de la Mécanique rationnelle et des différentes branches de la Physique, puis fonder sur ces axiomes l'étude rigoureuse de ces sciences.*

## II. PROBLÈMES EMPRUNTÉS A L'ARITHMÉTIQUE ET A L'ALGÈBRE

4. *Problème de Riemann sur les nombres premiers.*

Démontrer dans toute leur étendue les propositions formulées par Riemann sur la fonction  $\zeta(s)$ , en particulier la suivante :

*La différence entre le nombre des nombres premiers inférieurs à une quantité  $x$  et le logarithme intégral de cette quantité devient infinie avec  $x$  d'un ordre égal ou inférieur à  $\sqrt{x}$ .*

*Étendre les propositions de Riemann à la fonction analogue  $\zeta_k(s)$  correspondant à un corps algébrique  $k$  :*

$$\zeta_k(s) = \sum \frac{1}{\{n(j)\}}$$

( $n(j)$  désigne la norme de l'idéal  $j$ ; la somme s'étend à tous les idéaux  $j$  du corps).

5. *Certains nombres sont-ils transcendants ou du moins irrationnels?*

*Démontrer que la fonction  $e^{i\pi z}$  a une valeur transcendante, lorsque la variable  $z$  est algébrique irrationnelle.*

*Examiner si les puissances  $a^z$  ont toujours des valeurs transcendants ou du moins irrationnelles, lorsque la base est un nombre algébrique et l'exposant un nombre algébrique irrationnel. (Exemples :  $2\sqrt{2}$ ,  $e^\pi = i^{-2i}$ ).*

6. *Les solutions de l'équation du 7<sup>e</sup> degré ne peuvent pas s'obtenir par la Nomographie.*

La Nomographie permet de résoudre une équation lorsque les racines peuvent être obtenues par une suite finie d'opérations ne portant que sur deux paramètres. Il s'agit de démontrer que l'équation générale du 7<sup>e</sup> degré ne rentre pas dans cette catégorie.

7. *Géométrie de situation des courbes et des surfaces algébriques.*

Harnack a déterminé le nombre maximum de traits de courbe fermés et séparés les uns des autres dont peut se composer une courbe algébrique d'ordre  $m$ . On demande *d'étudier la situation réciproque de ces traits ; d'établir un théorème analogue à celui de Harnack pour les surfaces algébriques et d'examiner ensuite la situation réciproque des diverses nappes.*

## III. PROBLÈMES EMPRUNTÉS A LA THÉORIE DES FONCTIONS

La notion de fonction est tellement générale, que, dans une étude approfondie, il faut se borner à n'en considérer que certaines classes particulièrement importantes.

Si l'on choisissait la classe des fonctions définies par des équations différentielles algébriques, un certain nombre de fonctions intéressantes échapperaient à nos recherches (ainsi la fonction  $\zeta(s)$  de Riemann).

Si, d'autre part, nous considérons toutes les fonctions continues ayant des dérivées de tous les ordres, nous ne pourrions pas employer la méthode si souple des séries de puissances.

Il paraît donc légitime de vouer une attention toute spéciale aux fonctions analytiques ; les fonctions importantes étudiées jusqu'à présent rentrent du reste toutes dans cette catégorie.

8. *Caractère analytique de certaines fonctions rencontrées dans le calcul des variations.*

Un problème du calcul des variations

$$\int \int F(z, p, q; x, y) dx dy = \min. \quad \left[ \frac{\partial z}{\partial x} = p, \frac{\partial z}{\partial y} = q \right]$$

sera dit *régulier*, lorsque la fonction  $F$  est analytique et lorsqu'elle satisfait à l'inégalité

$$\frac{\partial^2 F}{\partial p^2} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial q^2} - \left( \frac{\partial^2 F}{\partial p \partial q} \right)^2 > 0.$$

*Démontrer que la solution  $z$  d'un problème régulier est nécessairement une fonction analytique des variables  $x$  et  $y$ .*

Voici encore un problème analogue plus spécial :

*Examiner si les surfaces à courbure de Gauss constante et positive ne seraient pas toutes des surfaces analytiques.*

9. *Existence d'équations différentielles linéaires ayant un groupe donné.*

Prenons dans le plan de la variable un nombre fini de points et fixons pour chacun d'eux un système de substitutions linéaires. *Démontrer qu'il existe une équation différentielle linéaire de la classe régulière admettant ces points comme points singuliers et ayant comme groupe le groupe de substitutions défini par les systèmes donnés.*

10. *Deux variables liées par une relation analytique quelconque peuvent être exprimées en fonction uniforme d'un paramètre  $z$ .*

Le beau théorème de M. Poincaré sur ce sujet, publié dans le Bulletin de la Société mathématique de France (t. XI, 1883), est encore astreint à quelques restrictions. Il serait important *d'établir le théorème dans toute sa généralité et surtout d'examiner si les variables sont toujours des fonctions automorphes du paramètre  $z$ .*

Il s'agirait en outre *d'étendre ce théorème au cas de plusieurs variables indépendantes.*

Pour un plus grand choix de problèmes, nous renvoyons le lecteur à l'article que nous allons publier dans le Bulletin de la Société des Sciences de Goettingue. (Nachrichten der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, 1900.)

#### CONCLUSION

Les problèmes précédents nous montrent la variété croissante des mathématiques. N'est-il donc pas à redouter que notre science ne se scinde en plusieurs branches n'ayant plus guère de rapports entre elles ?

Nous ne le croyons ni ne voulons l'espérer.

Nous voyons du reste que la mathématique, en se développant, bien loin de perdre son caractère de science unique, le manifeste de jour en jour plus clairement.

De plus, chaque progrès réel entraîne nécessairement la découverte de méthodes plus incisives et plus simples, permettant à chaque géomètre un accès relativement facile à toutes les parties de notre science.

D. HILBERT (Göttingue).

---

## SUR LA TRANSCENDANCE DES NOMBRES $e$ ET $\pi$ <sup>(1)</sup>

---

1. Depuis 1873, époque où M. Hermite, dans son *Mémoire sur la fonction exponentielle*, a démontré la transcendance du nombre  $e$ , de nombreux géomètres, parmi lesquels il faut citer en première ligne M. Hurwitz (*Math. Annalen*, 1893), ont cherché à donner à sa démonstration une forme plus élémentaire. D'autre part, le travail analogue de M. Lindemann, au sujet du nombre  $\pi$ , (*Math. Annalen*, 1882), a provoqué, depuis son apparition, de nombreuses recherches entreprises dans le même sens. Parmi les géomètres qui se sont signalés dans cet ordre d'idées, il en est, comme M. Hilbert, à qui l'on doit d'importantes simplifications; mais M. Gordan a eu le mérite de ramener à des considérations d'ordre purement élémentaire la démonstration d'un théorème de M. Lindemann, entraînant, comme conséquences, la transcendance du nombre  $e$ , et la transcendance du nombre  $\pi$ . Les travaux de M. Gordan ont été magistralement exposés par M. Klein, dans son opuscule intitulé : *Sur certaines questions de Géométrie*

---

(<sup>1</sup>) Ainsi qu'on peut le voir dès les premières lignes de l'article de M. Jamet, son étude a un caractère nettement pédagogique, et elle nous semble constituer à ce point de vue un progrès fort important. Il s'agit de l'un des problèmes les plus fameux dans l'histoire des sciences mathématiques, celui de la quadrature du cercle; et, en somme, l'impossibilité n'en a été rigoureusement démontrée qu'à partir des travaux de MM. Hermite et Lindemann. Apporter à cette démonstration des perfectionnements qui aient pour résultat de lui donner un caractère de plus en plus élémentaire est à notre avis tout à fait intéressant au point de vue qui nous préoccupe surtout ici. Aussi remercions-nous bien sincèrement M. V. Jamet de son importante contribution à la transcendance des nombres  $e$  et  $\pi$ .