Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Band: 2 (1900)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR LES POLYGONES DE PONCELET

Kapitel: I

Autor: Lelieuvre, M.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-3580

les systèmes de logique algorithmique ; les uns et les autres sont d'ailleurs parfaitement compatibles, attendu qu'ils sont radicalement différents en principe et ne sauraient en aucune manière se remplacer. L. C.

SUR LES POLYGONES DE PONCELET

La recherche des conditions que doivent remplir deux coniques pour qu'on puisse inscrire dans l'une un polygone circonscrit à l'autre, est une question bien connue : elle se résume dans le théorème suivant. énoncé par Poncelet : *s'il existe un polygone de* m *côtés inscrit dans une conique O et circonscrit à une autre* Γ, *il en existe une infinité d'autres du même nombre de côtés*. Beaucoup de problèmes qui se rattachent à cette proposition ont été résolus par des méthodes variées et il est par conséquent utile, et d'un incontestable intérêt, au point de vue de l'enseignement surtout, d'envisager la question dans son ensemble : c'est ce que je me suis proposé de faire, en suivant un beau chapitre d'Halphen sur le sujet [1]. Je diviserai cet exposé en deux parties : l'une, toute élémentaire qui ramène en somme le problème à ses éléments les plus simples, la seconde qui le rattache à la théorie des fonctions elliptiques, et qui suppose la connaisssnce des fondements de cette théorie.

I

Relation biquadratique symétrique entre deux variables. — Les deux sommets situés sur un côté d'un polygone inscrit dans une conique C et circonscrit à une autre conique Γ sont deux points M et M′ de la conique C qui se correspondent sur cette ligne par la condition que la droite qui les joint soit tangente à Γ. On peut de cette manière faire correspondre à tout point M de C, deux

[1] Halphen. *Traité des fonctions elliptiques*, t. II, ch. x.

autres points M′ et M″ de cette conique situés sur les tangentes à Γ qui sont issues de M ; d'ailleurs, au point M′ de C, correspondront de cette manière deux points de C dont l'un sera M. Supposons alors que les points de C, qui est unicursale, soient déterminés individuellement en fonction rationnelle d'un paramètre, de sorte que les coordonnées homogènes de chacun d'eux sont proportionnelles à des polynômes quadratiques par rapport à ce paramètre : les paramètres x et y de deux points correspondants M et M′ seront liés par une relation *biquadratique symétrique* qui pourra s'écrire :

$$(I) \qquad Ax^2y^2 + Bxy(x+y) + C(x^2+y^2) + Dxy + E(x+y) + F = 0$$

ou encore :

$$y^2(Ax^2 + Bx + C) + y(Bx^2 + Dx + E) + Cx^2 + Ex + F \equiv Py^2 + Qy + R = 0.$$

(Les coefficients des termes semblables des polynômes entiers en x, P, Q et R, forment un déterminant symétrique.)

Réciproquement, toute relation de la forme (I) peut être interprétée comme établissant entre deux points M et M′ de C, de paramètres x et y, une correspondance telle que la droite qui les joint soit tangente à une conique fixe Γ : car cette relation revient à une relation quadratique entre $x+y$ et xy, et par conséquent équivaut à une relation quadratique homogène entre les coordonnées homogènes u, v, w de la droite MM′, qui sont, comme on sait, proportionnelles à des fonctions linéaires de $x+y$ et xy. (La conique Γ peut, bien entendu, dégénérer en une variété tangentielle formée de deux points, distincts ou confondus.)

Observons d'ailleurs que cette correspondance entre M et M revient à la suivante : les deux points M et M′ sont conjugués par rapport à la conique C_1, telle que Γ soit la conique *covariante* de C et de C_1, enveloppe des cordes que ces deux coniques divisent harmoniquement : il est bien facile de déduire de la relation (I) l'équation de C_1. De là résulte la corrélation entre le problème des polygones de Poncelet et celui des polygones inscrits dans une conique C et *conjugués* par rapport à une autre C_1 : l'étude du premier problème équivaut à celle du second.

Remarquons enfin que la correspondance que nous établissons entre deux points M et M′ de C peut être remplacée par celle des deux tangentes à Γ issues d'un même point de C : dans la suite nous emploierons seulement la première.

Généralisation. — Plus généralement, la relation fondamentale (I) établit entre deux points M et M′ d'une courbe *unicursale quelconque* U, définis individuellement, l'un par le paramètre x, l'autre par y, une correspondance telle qu'au point M en correspond deux autres M′ et M″, et qu'à M′ en correspondent deux *dont l'un est* M. Il s'en suit que la relation (I) peut être regardée comme définissant une famille de lignes polygonales inscrites dans U : car partons d'un point M_0 quelconque de U comme sommet initial de la ligne brisée ; le sommet suivant sera un des points que lui fait correspondre la relation (I), soit M_1 ; alors le troisième sommet sera déterminé sans ambiguïté : ce sera le correspondant de M_1 *autre que* M_0, et ainsi de suite. Nous allons maintenant adopter cette interprétation de la relation (I).

Correspondance entre les extrémités des lignes brisées de m *côtés.* — Au sommet initial M_0 choisi pour une ligne brisée inscrite de m côtés, correspondront sur U deux extrémités possibles E′ et E″ pour cette ligne, suivant le choix du second sommet. Réciproquement, à l'extrémité E′ correspondront les deux sommets initiaux possibles dont l'un sera M_0. Donc le paramètre x de M_0 et le paramètre z de l'extrémité doivent être liés par une relation de la forme (I), soit $F(x, z) = 0$, biquadratique et symétrique en x et z.

Il est clair qu'on pourrait former cette relation de proche en proche, car la relation (I) permet évidemment d'exprimer rationnellement par rapport aux paramètres x et y des deux premiers sommets, ceux de tous les sommets suivants.

Lignes brisées repliées. — La relation (I) fait correspondre à x deux valeurs y' et y'' de y, *généralement* distinctes de x et distinctes entre elles. Il y a exception pour les valeurs de x telles que $y' = y''$; elles sont les racines (finies ou infinies) de l'équation (du quatrième degré en général) : $Q^2 - 4PR = 0$. Il y a également exception pour les valeurs de x telles qu'une valeur correspondante y' de y soit égale à x ; ces valeurs de x sont les racines de l'équation du quatrième degré obtenue en faisant dans (I) $y = x$. Appelons S_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ les quatre points de U qui correspondent aux valeurs de x telles que $y' = y''$ et T_i ceux qui correspondent aux paramètres x tels que $y' = x$. Si dans le tracé d'une ligne brisée inscrite, nous arrivons en un point S_i comme sommet, la ligne ne pourra se continuer au delà de ce point qu'en se *repliant* sur elle-même et le sommet qui suivra S_i se confondra avec le précédent. Si nous arrivons en un point, T_i, en supposant que le sommet précédent corresponde à la valeur de y qui diffère du paramètre x du point T_i, le sommet suivant sera confondu avec T_i et le côté correspondant sera la tangente à U au point T_i considéré ; puis la ligne ne pourra se continuer qu'en se *repliant* sur elle-même.

Polygones inscrits de m *côtés.* — La relation (I) peut-elle déterminer des lignes brisées *fermées* d'un nombre donné m de côtés, inscrites dans U ? Pour cela, il faut que le $(m+1)^{\text{ème}}$ sommet obtenu par la construction indiqué coïncide avec le premier. Or le paramètre x du premier sommet et celui z du $(m+1)^{\text{ème}}$ sont liés par une relation biquadratique symétrique $F(x, z) = 0$. Le paramètre x devra donc être une des quatre racines (finies ou non) de l'équation de *fermeture :* $F(x, x) = 0$; d'où *généralement quatre* solutions. Elles sont faciles à prévoir : supposons d'abord m pair, soit $m = 2n$; partons d'un point S_i comme sommet initial et construisons le $(n+1)^{\text{ème}}$ sommet P_i qui en résulte sans ambiguïté ; une des lignes brisées inscrites de sommet initial P_i sera formée d'abord de celle qu'on vient de construire pour obtenir P_i : S_i sera son $(n+1)^{\text{ème}}$ sommet et elle ne pourra se continuer au delà qu'en se repliant sur elle-même pour revenir à P_i comme $(m+1)^{\text{ème}}$ sommet : on aura alors construit une ligne brisée fermée répondant à la question. Soit au contraire m impair, égal à $2n+1$: partons d'un point T_i, prenons un premier côté non tangent à U et allons jusqu'au $n^{\text{ème}}$ sommet Q_i : une ligne brisée d'origine Q_i, formée d'abord de celle qu'on vient de parcourir, arrivée en T_i comme $n^{\text{ème}}$ sommet s'y repliera, en se continuant par la tangente en T_i et en revenant à Q_i comme $(m+1)^{\text{ème}}$ sommet.

Comme il y a quatre points S_i et quatre points T_i, on a donc ainsi les seules solutions de la question dans le cas général, et ce ne sont pas des polygones proprement dits.

Théorème de Poncelet. — Il résulte de là que *si la relation* (I) *détermine un polygone proprement dit de* m *côtés inscrit dans* V, *elle en détermine une infinité de ce même nombre de côtés, et l'on peut prendre un sommet de l'un d'entre eux en un point quelconque de la courbe.* En effet l'équation F $(x, x) = 0$ doit être vérifiée *identiquement.*

Application aux coniques. — Supposons que la courbe unicursale U soit une conique C : les lignes brisées correspondantes à (I) et inscrites dans C seront, comme on l'a vu, circonscrites à une conique fixe Γ . Les points S_i seront les points de C d'où les tangentes menées à Γ seront confondues : ce sont donc les *points communs* aux deux coniques C et Γ. Les points T_i seront les points de C d'où une des tangentes menées à Γ sera aussi tangente à C : ce seront donc les *points de contact avec* C *des tangentes communes à* C *et à* Γ. S'il existe *un* polygone de *m* côtés inscrit dans C, circonscrit à Γ, et *autre que les quatre solutions repliées du cas général,* il y en aura une *infinité.* Lorsque *m* ne dépasse pas 5, on peut toujours construire une conique Γ inscrite dans un polygone quelconque de *m* côtés inscrit dans C ; d'une manière générale, quel que soit *m*, pour que le théorème de Poncelet soit applicable aux coniques C et Γ, il faut et il suffit qu'on puisse inscrire dans C et circonscrire à Γ une ligne brisée fermée de *m* côtés commençant en un point de C *autre* que les points P_i ou Q_i trouvés ci-dessus, par exemple en l'un des points S_i ou T_i. *Exemple :* je joins deux points A et B de C et je mène la tangente BT à C au point B. Si je construis une conique Γ tangente à AB en A et à BT en un point arbitraire, il y aura une infinité de triangles inscrits dans C et circonscrits à Γ, à cause de l'existence du triangle particulier dont les côtés sont AB, BT, BA, suivis successivement en *partant de* A.

II

Équation d'Euler (1). — Les variables x et y liées par la relation (I) satisfont à l'équation différentielle obtenue de la façon suivante :

---

(1) Voir Lacour, *N. A. de Mathématiques*, 1899, p. 293.