

II. — Détermination analytique des foyers

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **2 (1900)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **13.07.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

la théorie des coniques la démonstration des propriétés métriques des foyers. Sans les rattacher à ces théorèmes généraux, et sans l'emploi des points associés, on peut établir très simplement ces propriétés métriques en notant que l'équation des tangentes menées d'un point (α, β, γ) , où $\gamma = 1$, à une conique $f(x, y, z) = 0$ est

$$(xf'_\alpha + yf'_\beta + zf'_\gamma)^2 - 4f(\alpha\beta\gamma) f(xyz) = 0.$$

Si le point (α, β, γ) est un foyer, les tangentes passant par ce point ont pour coefficients angulaires $+i$ et $-i$, les axes coordonnés étant rectangulaires. On voit donc qu'on doit avoir

$$4f(\alpha, \beta, \gamma) f(x, y, z) = (xf'_\alpha + yf'_\beta + zf'_\gamma)^2 - c [(x - \alpha)^2 (y - \beta)^2],$$

c étant une constante.

Cette équation montre que *le rapport des distances d'un point de la conique au foyer et à la directrice correspondante est constant*, pourvu que le foyer n'appartienne pas à la courbe. Ce dernier cas ne se présente que lorsque la conique dégénère en un système de deux droites. Le théorème énoncé permet d'établir les autres propriétés métriques focales.

On voit donc combien la définition des foyers proposée par Plücker et la nôtre sont parfaites au point de vue de la méthode : c'est l'une de celles-ci qui, nous semble-t-il, doit être utilisée dans l'enseignement supérieur.

II. — DÉTERMINATION ANALYTIQUE DES FOYERS

6. Partant de la définition : (ou si l'on veut de la propriété) un foyer d'une conique est un point tel que deux droites perpendiculaires quelconques qui s'y rencontrent constitue un système de deux droites conjuguées par rapport à la courbe, nous allons indiquer un procédé de détermination *sans changement d'axes coordonnés* des foyers, d'une conique dans les cas où celle-ci est définie par une équation soit en coordonnées cartésiennes ordinaires, soit en coordonnées cartésiennes tangentielles.

7. *Coordonnées cartésiennes ordinaires.* — Considérons une

conique représentée par une équation homogène du second degré

$$f(x, y, z) = 0,$$

x et y étant les coordonnées courantes d'un point par rapport à des axes rectangulaires, et z étant égal à l'unité.

Soient α et β les coordonnées d'un point F, et

$$\begin{aligned} y - \lambda x - (\beta - \alpha\lambda) &= 0, \\ x + \lambda y - (\alpha - \beta\lambda) &= 0, \end{aligned}$$

les équations des deux droites perpendiculaires qui s'y rencontrent.

Ce système de deux droites varie en même temps que λ . La condition nécessaire et suffisante pour que ce système soit constamment constitué de deux droites conjuguées par rapport à la conique est que l'expression

$$\begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} & f''_{xz} & 1 \\ f''_{xy} & f''_{yy} & f''_{yz} & \lambda \\ f''_{xz} & f''_{yz} & f''_{zz} & -(\alpha + \beta\lambda) \\ \lambda & -1 & \beta - \alpha\lambda & 0 \end{vmatrix}$$

s'annule, quelle que soit la valeur de λ . Cette condition est aussi celle pour que le point F soit au foyer de la conique.

Le développement de ce déterminant peut s'écrire, en posant

$$\begin{aligned} Q &= \begin{vmatrix} f''_{xy} & f''_{yz} \\ f''_{xz} & f''_{zz} \end{vmatrix} + \beta \begin{vmatrix} f''_{xy} & f''_{yy} \\ f''_{xz} & f''_{yz} \end{vmatrix} - \alpha \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xz} \\ f''_{xy} & f''_{yz} \end{vmatrix} - \alpha\beta \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{xy} & f''_{yy} \end{vmatrix}, \\ 2P &= \begin{vmatrix} f''_{yy} & f''_{yz} \\ f''_{yz} & f''_{zz} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xz} \\ f''_{xz} & f''_{zz} \end{vmatrix} - 2\alpha \begin{vmatrix} f''_{xy} & f''_{yy} \\ f''_{xz} & f''_{yz} \end{vmatrix} - 2\beta \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{xz} & f''_{yz} \end{vmatrix} + (\alpha^2 - \beta^2) \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{xy} & f''_{yy} \end{vmatrix}, \\ & Q(1 - \lambda^2) + 2P\lambda. \end{aligned}$$

Donc la condition nécessaire et suffisante pour que le point F soit un foyer est que ses coordonnées satisfassent simultanément aux deux équations

$$(1) \quad P = 0, \quad Q = 0.$$

La détermination des foyers et la solution de ce système sont donc deux problèmes identiques.

8. Pour simplifier l'écriture, nous poserons :

$$\left. \begin{aligned} a &= \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{xy} & f''_{yy} \end{vmatrix} & b &= \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xz} \\ f''_{xy} & f''_{yz} \end{vmatrix} & c &= \begin{vmatrix} f''_{yy} & f''_{xy} \\ f''_{yz} & f''_{xz} \end{vmatrix} \\ d &= \begin{vmatrix} f''_{yz} & f''_{xy} \\ f''_{xz} & f''_{xz} \end{vmatrix} & f &= \begin{vmatrix} f''_{yy} & f''_{yz} \\ f''_{yz} & f''_{zz} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xz} \\ f''_{xz} & f''_{zz} \end{vmatrix} \end{aligned} \right\} (\omega_2).$$

Représentant les coordonnées α et β par x et y et utilisant les relations précédentes, le système des équations (1) prend la forme

$$(I) \quad \begin{cases} Q = axy + bx + cy + d = 0, \\ 2P = a(x^2 - y^2) + 2cx - 2by + f = 0. \end{cases}$$

Les racines de ces deux équations satisfont à l'équation

$$2P + 2\mu Q = a(x^2 - y^2 + 2\mu xy) + 2x(c + b\mu) - 2y(b - c\mu) + f + 2\mu d = 0,$$

μ étant une constante arbitraire.

Donnons à cette constante une valeur telle que le premier membre de l'équation précédente se décompose en deux facteurs linéaires. Il convient à cet effet de donner à μ une valeur racine de l'équation

$$\begin{vmatrix} a & \mu a & c + b\mu \\ \mu a & -a & -(b - c\mu) \\ c + b\mu & -(b - c\mu) & f + 2d\mu \end{vmatrix} = 0.$$

Cette équation est du troisième degré ; mais ses racines se calculent très facilement : cette équation peut s'écrire, en développant le déterminant précédent et en laissant de côté les déterminants qui sont identiquement nuls :

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ b & c & 2d \end{vmatrix} \mu^3 + \begin{vmatrix} 0 & a & c \\ a & 0 & -b \\ b & c & f \end{vmatrix} \mu^2 + \begin{vmatrix} a & 0 & b \\ 0 & -a & c \\ c & -b & 2d \end{vmatrix} \mu + \begin{vmatrix} a & 0 & c \\ 0 & -a & -b \\ c & -b & f \end{vmatrix} = 0,$$

ou bien

$$\left[\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ b & c & 2d \end{vmatrix} \mu + \begin{vmatrix} a & 0 & c \\ 0 & -a & -b \\ c & -b & f \end{vmatrix} \right] [1 + \mu^2] = 0. \quad (II)$$

9. Cette équation mise sous cette forme est très remarquable. Elle permet d'abord de mettre facilement en évidence une pro-

priété que nous avons déjà établie très simplement dans la première partie. Cette propriété s'énonce en disant que *les foyers sont les intersections des tangentes menées à la conique par les deux points singuliers (ou circulaires) situés à l'infini dans le plan.*

Pour montrer la vérité de cette proposition, il suffit évidemment de montrer que les équations

$$(2) \quad \begin{cases} 2P + 2iQ = a(x + yi)^2 + 2(c + bi)(x + yi) + f + 2di = 0 \\ 2P - 2iQ = a(x - yi)^2 + 2(c - bi)(x - yi) + f - 2di = 0 \end{cases}$$

représentent chacune deux tangentes de direction $+i$ et $-i$. Voici comment on peut établir facilement ces dernières propriétés :

Considérons, par exemple, un point M situé sur l'une des deux droites $P + iQ = 0$ ou $P = -iQ$. En supposant que ce point M ne soit pas un foyer (ce qui revient à dire que la valeur correspondante de $P(x, y)$ est différente de zéro), on sait que les bissectrices de l'angle formé par les deux tangentes menées par ce point à la conique (le point étant supposé ne pas se trouver sur la conique) ont des coefficients angulaires racines de l'équation

$$Q(1 + \lambda^2) + 2P\lambda = 0$$

Cela a lieu en vertu de ce qui est dit au n° 4.

Dans le cas qui nous occupe, cette équation prend la forme

$$P(1 + \lambda^2 - 2\lambda i) = 0,$$

ou

$$\bullet \quad P(1 - \lambda i)^2 = 0.$$

D'ailleurs, P étant différent de zéro, on a une racine double $\lambda = +i$.

Les deux bissectrices de l'angle en question se confondent donc et ont pour direction commune $\lambda = +i$.

On doit en conclure que la droite passant par M et faisant partie du système $P + iQ = 0$ est une tangente à la courbe.

10. Il est utile de faire remarquer que les deux équations (2) précédentes ramènent la détermination des foyers à la résolution de deux équations du second degré, qui malheureusement sont compliquées de coefficients imaginaires. Aussi, dans le cas où l'équa-

tion $f(x, y, z) = 0$ de la conique ne renferme pas de coefficients imaginaires, il est préférable, nous semble-t-il, de procéder autrement.

II. On considérera la troisième racine de l'équation (II). Elle est donnée par la relation

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ b & c & 2d \end{vmatrix} \mu + \begin{vmatrix} a & 0 & c \\ 0 & -a & -b \\ c & -b & f \end{vmatrix} = 0, \quad (\text{III})$$

équation que l'on transformera en ayant égard aux relations (ω_2) .

Il vient ainsi

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ b & c & 2d \end{vmatrix} = -2a(ad - bc) = +2f_{xy} \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{xy} & f''_{yy} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} & f''_{xz} \\ f''_{xy} & f''_{yy} & f''_{yz} \\ f''_{xz} & f''_{yz} & f''_{zz} \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} a & 0 & c \\ 0 & -a & -b \\ c & -b & f \end{vmatrix} = a(c^2 - b^2 - af)(f''_{xx} - f''_{yy}) \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{xy} & f''_{yy} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{yx} & f''_{xz} \\ f''_{xy} & f''_{yy} & f''_{yz} \\ f''_{xz} & f''_{yz} & f''_{zz} \end{vmatrix}.$$

Si

$$\begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{xy} & f''_{yy} \end{vmatrix} = 0,$$

la courbe est une parabole ; elle n'a qu'un foyer qui se détermine par la solution du système (1) constitué alors de deux équations linéaires.

Si

$$\begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} & f''_{xz} \\ f''_{xy} & f''_{yy} & f''_{yz} \\ f''_{xz} & f''_{yz} & f''_{zz} \end{vmatrix} = 0;$$

la courbe se compose de deux droites, de même que toutes les coniques $P + \mu Q = 0$. Mais ces coniques ont toutes le même centre que la courbe $f(x, y, z) = 0$.

On en déduit que les droites $P + \mu_1 Q = 0$ sur lesquelles sont situés les foyers ne peuvent rencontrer les droites $P + \mu_2 Q = 0$, auxquelles appartiennent également les foyers qu'en un point : le point d'intersection des deux droites $f(x, y, z) = 0$.

Par suite, une conique se réduisant à deux droites n'a qu'un

foyer ; sont point double unique. Si les droites sont parallèles, le foyer est à l'infini.

Enfin, si aucun de ces cas ne se présente, la relation (III) prend la forme

$$\mu = - \frac{f''_{xx} - f''_{yy}}{f''_{xy}}.$$

Pour cette valeur de μ , l'équation

$$P + \mu Q = 0$$

représente deux droites passant par le centre de la conique $f = 0$ et parallèles aux deux droites

$$x^2 - y^2 - \frac{f''_{xx} - f''_{yy}}{2f''_{xy}} xy = 0.$$

Ces deux droites sont donc les axes de la conique.

Donc, *les foyers d'une conique sont situés sur ses axes.*

Pour déterminer les foyers d'une conique, on commencera donc par voir si la courbe ne se réduit pas à une parabole ou à deux droites. S'il en est ainsi, on procède comme il a été dit plus haut concernant ces cas spéciaux. S'il n'en est pas ainsi, la courbe admet deux axes dont on déterminera chacune des équations. On combinera ensuite chacune de celles-ci avec l'une des équations (I).

La détermination se fait ainsi par la résolution de deux systèmes de deux équations dont l'une est du premier degré et l'autre du second par rapport aux inconnues.

On emploie cette méthode sans aucune modification dans le cas général ; mais dans certains cas particuliers, on peut pour la rapidité des calculs utiliser les relations (I) mises sous la forme (4)

$$\begin{aligned} Q &= f'_x f'_y - 2ff''_{xy} = 0 \\ 2P &= f'^2_x - f'^2_y - 2f(f''_{xx} - f''_{yy}) = 0. \end{aligned}$$

(4) Pour vérifier ces résultats il suffit de remplacer dans ces équations $2f$, f'_x et f'_y respectivement pour chacune des expressions

$$\begin{aligned} x^2 f''_{xx} + y^2 f''_{yy} + z^2 f''_{zz} + 2xy f''_{xy} + 2xy z f''_{xz} + 2y z f''_{yz}, \\ x f''_{xx} + y f''_{yy} + z f''_{zz}, \\ x f''_{xy} + y f''_{yy} + z f''_{zy} \end{aligned}$$

d'effectuer les opérations indiquées et de réduire à leur forme la plus simple les expressions ainsi obtenues de $f'_x f'_y - 2ff''_{xy}$ et de $f'^2_x - f'^2_y - 2f(f''_{xx} - f''_{yy})$.

D'après ces équations, on voit que si $f''_{xy} = 0$ et si $f''_{xx} = f''_{yy}$, il n'existe qu'un foyer qui est le centre du cercle représenté par $f(x, y, \zeta) = 0$.

Si $f''_{xy} = 0$, on obtient les foyers par la solution de chacun des deux systèmes

$$\begin{aligned} f'_x &= 0 & \text{et} & & f'_y &= 0 \\ f_y'^2 - 2f(f''_{yy} - f''_{xx}) &= 0 & & & f_x'^2 - 2f(f''_{xx} - f''_{yy}) &= 0. \end{aligned}$$

Si $f''_{xx} = f''_{yy}$; les coordonnées des foyers sont les racines des deux systèmes.

$$\begin{aligned} f'_x f'_y - 2ff''_{xy} &= 0 & \text{et} & & f'_x f'_y - 2ff''_{xy} &= 0 \\ f'_x + f'_y &= 0 & & & f'_x - f'_y &= 0. \end{aligned}$$

12. *Coordonnées cartésiennes tangentielles.* — Afin de résoudre le même problème en coordonnées tangentielles, considérons deux droites perpendiculaires $d_1(u_1, v_1)$ et $d_2(u_2, v_2)$, se rencontrant en un point fixe F représenté par l'équation

$$au + bv + 1 = 0.$$

On a donc, les axes coordonnés étant supposés rectangulaires,

$$\begin{aligned} u_1 u_2 + v_1 v_2 &= 0, \\ au_2 + bv_2 + 1 &= 0, \\ au_1 + bv_1 + 1 &= 0. \end{aligned}$$

Les deux premières équations donnent

$$\frac{u_2}{-v_1} = \frac{v_2}{u_1} = \frac{1}{av_1 - bu_1}.$$

Cherchons la condition pour que les droites d_1 et d_2 soient deux droites conjuguées. Le pôle de d_2 est

$$u_2 f'_u + v_2 f'_v + f'_w = 0,$$

ou

$$-v_1 f'_u + u_1 f'_v + (av_1 - bu_1) f'_w = 0.$$

Ce pôle se trouvant sur d_1 , on doit avoir

$$-v_1 f'_{u_1} + u_1 f'_{v_1} + (av_1 - bu_1) f'_{w_1} = 0,$$

ou, en tenant compte des relations,

$$\begin{aligned} f'_{u_1} &= u_1 f''_{uu} + v_1 f''_{uv} + f''_{uv}, \\ f'_{v_1} &= u_1 f''_{uv} + v_1 f''_{vv} + f''_{vv}, \\ f'_{w_1} &= u_1 f''_{uw} + v_1 f''_{vw} + f''_{ww}, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} au_1 + bv_1 &= -1, \\ -v_1 (u_1 f''_{uu} + v_1 f''_{uv}) + u_1 (u_1 f''_{uv} + v_1 f''_{vv}) + (av_1 + bu_1) (u_1 f''_{uw} + v_1 f''_{vw}) \\ &\quad - [-v_1 f''_{uw} + u_1 f''_{vw} + (av_1 - bu_1) f''_{ww}] (au_1 + bv_1) = 0. \end{aligned}$$

Les diverses propriétés énoncées devant avoir lieu, quelle que soit la position de la droite d_1 , pourvu que cette droite passe constamment par F, il faut et il suffit que la relation précédente ait lieu quelles que soient les valeurs de u_1 et de v_1 .

On trouve ainsi, en égalant à zéro les coefficients de u_1^2 , $u_1 v_1$ et v_1^2 , les trois équations de condition

$$\begin{aligned} f''_{uv} - bf''_{uv} - af''_{vv} + abf''_{ww} &= 0, \\ -f''_{uu} + f''_{vv} + af''_{uv} - bf''_{vv} + af''_{uv} - bf''_{vv} - a^2 f''_{ww} + b^2 f''_{ww} &= 0, \\ -f''_{uv} + af''_{vv} + bf''_{uv} - abf''_{ww} &= 0. \end{aligned}$$

Les coordonnées (a, b) des foyers de la conique $f(u, v, w) = 0$ sont donc les racines du système

$$(1') \quad \begin{cases} abf''_{ww} - af''_{vv} - bf''_{uv} + f''_{uv} = 0, \\ (a^2 - b^2) f''_{ww} - 2af''_{uv} + 2bf''_{vv} + f''_{uu} - f''_{vv} = 0 \quad (1). \end{cases}$$

On voit d'abord que si $f''_{ww} = 0$, il n'y a qu'un foyer qui s'obtient par la solution de deux équations (1') qui sont linéaires ; on sait que la courbe se réduit alors à une parabole.

Si la courbe n'est pas une parabole, on procédera, pour résoudre (1'), de la même façon que dans le cas de coordonnées cartésiennes ordinaires.

A cet effet, on notera que les équations (1') sont de la forme (I).

Si donc on représente par Q et par 2P respectivement les premiers membres des équations (1'), les équations

$$P + iQ = 0 \quad \text{et} \quad P - iQ = 0$$

(1) Les relations (1) et (1') peuvent aussi se déduire immédiatement les unes des autres d'après une transformation connue.

se décomposent chacune en deux facteurs linéaires. Cela a lieu, ainsi que ce que nous avons encore à dire en vertu de ce qui a été établi au n° 10.

Au moyen de ces deux dernières équations, la détermination de a et celle de b se font par la résolution séparée de deux équations du second degré, dont les coefficients sont malheureusement compliqués d'imaginaires.

Aussi, si les coefficients des variables dans l'équation de la conique $f(u, v, w) = 0$ sont tous réels, il est préférable de considérer la valeur du μ , racine de l'équation linéaire

$$\begin{vmatrix} 0 & f''_{vw} & -f''_{vw} \\ f''_{vw} & 0 & -f''_{vw} \\ -f''_{vw} & -f''_{vw} & 2f''_{vw} \end{vmatrix} \mu + \begin{vmatrix} f''_{vw} & 0 & -f''_{vw} \\ 0 & -f''_{vw} & f''_{vw} \\ -f''_{vw} & f''_{vw} & f''_{uu} - f''_{vv} \end{vmatrix} = 0,$$

ou, en divisant le premier membre par f''_{vw} .

$$2 \begin{vmatrix} f''_{uv} & f''_{vw} \\ f''_{uv} & f''_{vw} \end{vmatrix} \mu - [f''_{uv} - f''_{vw} - (f''_{uu} - f''_{vv}) f''_{vw}] = 0.$$

Pour cette valeur de μ l'équation $P + \mu Q = 0$ se décompose en deux facteurs linéaires.

Pour obtenir les coordonnées (a, b) des points foyers, on combinera chacun de ces facteurs égalés à zéro avec l'une des équations (1'). La solution du problème se fait ainsi au moyen de deux systèmes d'équations, dont l'une est du premier, l'autre du second degré par rapport aux inconnues.

Notons encore que, d'après l'équation linéaire qui donne la valeur de μ et d'après ce qui est dit au n° 11, la condition nécessaire et suffisante pour que la conique $f(u, v, w) = 0$ rapportée à des axes coordonnés rectangulaires se réduise à un cercle est que l'on ait simultanément

$$\begin{vmatrix} f''_{uv} & f''_{vw} \\ f''_{uv} & f''_{vw} \end{vmatrix} = 0, \text{ et } f''_{uv} - f''_{vw} - (f''_{uu} - f''_{vv}) f''_{vw} = 0.$$

L. VAN EMELÉN (Louvain).