LES FONCTIONS HYPERBOLIQUES DANS L'ENSEIGNEMENT MOYEN

LES FONCTIONS HYPERBOLIQUES

DANS L'ENSEIGNEMENT MOYEN

Comme appendice à la leçon sur les propriétés de la fonction e^x, bien des professeurs proposent en exercice à leurs élèves de démontrer les principales formules relatives aux transcen dantes

$$\text{sh}x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \text{ch}x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \text{th}x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

appelées communément *sinus*, *cosinus*, et *tangente hyperboliques* de l'argument réel x ; ils signalent les analogies et différences que ces fonctions présentent avec les fonctions circulaires du même nom, et expliquent leur qualificatif d'hyperboliques en remarquant que $X = \text{ch}\,x$, $Y = \text{sh}\,x$ sont les coordonnées d'un point de l'hyperbole équilatère

$$X^2 - Y^2 = 1.$$

Mais là se bornent la plupart du temps les indications qu'ils donnent, et dans aucune partie du cours, les élèves ne sont appelés à en tirer profit. Nous croyons que c'est là une regrettable lacune, et nous sommes persuadé que si les étudiants de nos cours de mathématiques spéciales et de facultés étaient familiarisés avec le maniement des sinus et cosinus hyperboliques comme ils le sont avec celui des sinus et cosinus circulaires, ils sauraient apporter à bien des calculs de notables simplifications ; il est aisé de le prouver par des exemples simples empruntés à des questions élémentaires.

I. — Théorie de l'hyperbole

On peut écrire ainsi les coordonnées d'un point M de l'hyperbole :

$$x = a \text{ ch}\,\varphi, \quad y = b \text{ ch}\,\varphi.$$

et les propriétés de la courbe donnent lieu à des développements identiques à ceux qui servent pour l'ellipse ;

$$x' = a \operatorname{sh} \varphi, \ y' = b \operatorname{ch} \varphi$$

représentent l'extrémité M' du rayon oM' conjugué à oM.

II. — Calcul d'une dérivée

Soit la fonction $y = \mathrm{L}\,(x + \sqrt{1 + x^2})$. En posant $x = \operatorname{sh}\varphi$, on a immédiatement

$$x + \sqrt{1 + x^2} = \operatorname{sh}\varphi + \operatorname{ch}\varphi = e^\varphi$$

donc $y = \varphi$, ou $x = \operatorname{sh} y$; par suite

$$y' = \frac{1}{\operatorname{ch} y} = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$$

III. — Résolution de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$.

Quand les racines sont réelles et de même signe, on définit un argument circulaire φ par l'égalité

$$\frac{4ac}{b^2} = \sin^2 \varphi$$

et les formules

$$x' = -\frac{b}{a} \cos^2 \frac{\varphi}{2}, \quad x'' = -\frac{b}{a} \sin^2 \frac{\varphi}{2}$$

font connaître les deux racines ; on peut suivre une marche en tout semblable si le produit ac est négatif, à condition de définir cette fois un argument hyperbolique φ par l'égalité

$$-\frac{4ac}{b^2} = \operatorname{sh}^2 \varphi$$

les racines, réelles et de signes contraires, sont

$$x' = -\frac{b}{a} \operatorname{ch}^2 \frac{\varphi}{2}, \quad x'' = \frac{b}{a} \operatorname{sh}^2 \frac{\varphi}{2}.$$

IV. — Résolution de l'équation $x^3 + px + q = 0$.

Quand l'équation n'a qu'une seule racine réelle, la formule de Cardan qui la fait connaître par une somme de deux radicaux cubiques, est très désavantageuse dans la pratique ; or, si l'emploi des fonctions circulaires est tout indiqué quand les trois racines sont réelles, nous allons voir que celui des fonctions hyperboliques est aussi absolument naturel dans le cas contraire. Qu'on nous permette d'entrer à cet égard dans quelques détails ; nous résoudrons d'abord la question que voici : *Étant donné* $\text{sh}\,a$ *ou* $\text{ch}\,a$, *calculer* $\text{sh}\,\frac{a}{3}$ *ou* $\text{ch}\,\frac{a}{3}$. Les formules de multiplication sont

$$\text{sh}\,3x = 3\,\text{sh}\,x + 4\,\text{sh}^3 x$$
$$\text{ch}\,3x = 4\,\text{ch}^3 x - 3\,\text{ch}\,x$$

donc, étant donné $\text{sh}\,a$, $\text{sh}\,\frac{a}{3} = z$ est racine de l'équation

(1) $$z^3 + \frac{3}{4}z - \frac{\text{sh}\,a}{4} = 0$$

qui a pour résolvante

(1') $$U^2 - \frac{\text{sh}\,a}{4}U - \frac{1}{64} = 0\,.$$

On tire de cette dernière

$$U_1 = \frac{1}{8}e^{a}\,,\quad U_2 = -\frac{1}{8}e^{-a}$$

dans les trois racines de (1) sont

$$z_1 = \text{sh}\,\frac{a}{3}$$
$$z_2 = -\frac{1}{2}\left[\text{sh}\,\frac{a}{3} + i\sqrt{3}\,\text{ch}\,\frac{a}{3}\right]$$
$$z_3 = -\frac{1}{2}\left[\text{sh}\,\frac{a}{3} - i\sqrt{3}\,\text{ch}\,\frac{a}{3}\right]$$

De même, $\text{ch}\,a$ étant donné, les trois racines de l'équation

(2) $$z^3 - \frac{3}{4}z - \frac{\text{ch}\,a}{4} = 0$$

sont

$$z_1 = \mathrm{ch}\,\frac{a}{3}$$

$$z_2 = -\frac{1}{2}\left[\mathrm{ch}\,\frac{a}{3} + i\sqrt{3}\,\mathrm{sh}\,\frac{a}{3}\right]$$

$$z_3 = -\frac{1}{2}\left[\mathrm{ch}\,\frac{a}{3} - i\sqrt{3}\,\mathrm{sh}\,\frac{a}{3}\right]$$

Ceci posé, dans l'équation du troisième degré générale, admettons que $4p^3 + 27q^2$ soit positif; deux cas se présentent suivant le signe de p.

1° p positif. En déterminant un coefficient λ et un argument hyperbolique a par les relations

$$\lambda = 2\sqrt{\frac{p}{3}}, \quad \mathrm{sh}a = -\frac{3q}{p\lambda},$$

si on fait $x = \lambda z$, on est ramené à l'équation (1); donc les trois racines demandées sont

$$x_1 = \lambda\,\mathrm{sh}\,\frac{a}{3}$$

$$x_2 = -\frac{\lambda}{2}\left[\mathrm{sh}\,\frac{a}{3} + i\sqrt{3}\,\mathrm{ch}\,\frac{a}{3}\right]$$

$$x_3 = -\frac{\lambda}{2}\left[\mathrm{sh}\,\frac{a}{3} - i\sqrt{3}\,\mathrm{ch}\,\frac{a}{3}\right]$$

2° p négatif. Cette fois on fait

$$\lambda = \pm 2\sqrt{-\frac{p}{3}}, \qquad \mathrm{ch}a = \frac{3q}{p\lambda},$$

en choisissant pour λ le signe contraire à celui de q, en sorte que ch$a$ soit positif; par $x = \lambda z$, on est ramené à l'équation (2), et les racines en x sont

$$x_1 = \lambda\,\mathrm{ch}\,\frac{a}{3}$$

$$x_2 = -\frac{\lambda}{2}\left[\mathrm{ch}\,\frac{a}{3} + i\sqrt{3}\,\mathrm{sh}\,\frac{a}{3}\right]$$

$$x_3 = -\frac{\lambda}{2}\left[\mathrm{ch}\,\frac{a}{3} - i\sqrt{3}\,\mathrm{sh}\,\frac{a}{3}\right]$$

Pour appliquer la méthode à un calcul numérique, il suffit d'avoir à sa disposition une table de logarithmes des fonctions hyperboliques suffisamment étendue, et d'un maniement commode ; le calcul ci-dessous est fait à l'aide d'une table à 5 décimales, de disposition très pratique, mais qui n'est point encore publiée.

Résoudre l'équation $x^3 + 7x + 7 = 0$.

$$\lambda = 2\sqrt{\frac{7}{3}}, \ \log\lambda = 0,48502$$

$$\text{sh}\,a = -\frac{3}{\lambda}, \ \log(-\text{sh}\,a) = \overline{1},99210, \ a = -0,86857$$

$$\frac{a}{3} = -0,28952, \ \log \text{sh}\left(-\frac{a}{3}\right) = \overline{1},46772, \ \log \text{ch}\left(-\frac{a}{3}\right) = 0,01796$$

$$\log(-x_1) = \overline{1},95274$$

$$\log\frac{x_3 - x_2}{i} = \log\lambda + \log\sqrt{3} + \log \text{ch}\left(\frac{-a}{3}\right) = 0,74153$$

$$-x_1 = 0,8969$$

$$x_2 + x_3 = 0,8969$$

$$\frac{x_3 - x_2}{i} = 5,5148$$

$$x_1 = -0,8969$$

$$x_2 = 0,44845 - 2,7574\,i$$

$$x_3 = 0,44845 + 2,7574\,i.$$

P. Barbarin (Bordeaux).

DÉMONSTRATION SIMPLIFIÉE

DE LA FORMULE DE TAYLOR

1. Parmi les différentes démonstrations de cette formule qui s'appuient sur le théorème de Rolle, la suivante est peut-être la plus facile, puisqu'elle n'exige que des différentiations extrêmement simples. Elle n'est pas, à ce que nous croyons, connue jusqu'à présent.