# IV. — Résolution de l'équation $x^3 + px + q = 0$.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **2 (1900)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **13.07.2024**

## IV. — Résolution de l'équation $x^3 + px + q = 0$.

Quand l'équation n'a qu'une seule racine réelle, la formule de Cardan qui la fait connaître par une somme de deux radicaux cubiques, est très désavantageuse dans la pratique ; or, si l'emploi des fonctions circulaires est tout indiqué quand les trois racines sont réelles, nous allons voir que celui des fonctions hyperboliques est aussi absolument naturel dans le cas contraire. Qu'on nous permette d'entrer à cet égard dans quelques détails ; nous résoudrons d'abord la question que voici : *Étant donné* sh$a$ *ou* ch$a$, *calculer sh* $\frac{a}{3}$ *ou ch* $\frac{a}{3}$. Les formules de multiplication sont

$$\operatorname{sh} 3x = 3 \operatorname{sh} x + 4 \operatorname{sh}^3 x$$
$$\operatorname{ch} 3x = 4 \operatorname{ch}^3 x - 3 \operatorname{ch} x$$

donc, étant donné sh$a$, sh $\frac{a}{3} = z$ est racine de l'équation

$$(1) \qquad z^3 + \frac{3}{4} z - \frac{\operatorname{sh} a}{4} = 0$$

qui a pour résolvante

$$(1') \qquad U^2 - \frac{\operatorname{sh} a}{4} U - \frac{1}{64} = 0 .$$

On tire de cette dernière

$$U_1 = \frac{1}{8} e^a , \quad U_2 = -\frac{1}{8} e^{-a}$$

dans les trois racines de (1) sont

$$z_1 = \operatorname{sh} \frac{a}{3}$$
$$z_2 = -\frac{1}{2}\left[\operatorname{sh} \frac{a}{3} + i\sqrt{3} \operatorname{ch} \frac{a}{3}\right]$$
$$z_3 = -\frac{1}{2}\left[\operatorname{sh} \frac{a}{3} - i\sqrt{3} \operatorname{ch} \frac{a}{3}\right]$$

De même, ch$a$ étant donné, les trois racines de l'équation

$$(2) \qquad z^3 - \frac{3}{4} z - \frac{\operatorname{ch} a}{4} = 0$$

sont

$$z_1 = \text{ch}\,\frac{a}{3}$$

$$z_2 = -\frac{1}{2}\left[\text{ch}\,\frac{a}{3} + i\sqrt{3}\,\text{sh}\,\frac{a}{3}\right]$$

$$z_3 = -\frac{1}{2}\left[\text{ch}\,\frac{a}{3} - i\sqrt{3}\,\text{sh}\,\frac{a}{3}\right]$$

Ceci posé, dans l'équation du troisième degré générale, admettons que $4p^3 + 27q^2$ soit positif ; deux cas se présentent suivant le signe de $p$.

1° $p$ positif. En déterminant un coefficient $\lambda$ et un argument hyperbolique $a$ par les relations

$$\lambda = 2\sqrt{\frac{p}{3}}, \quad \text{sh}a = -\frac{3q}{p\lambda},$$

si on fait $x = \lambda z$, on est ramené à l'équation (1) ; donc les trois racines demandées sont

$$x_1 = \lambda\text{sh}\,\frac{a}{3}$$

$$x_2 = -\frac{\lambda}{2}\left[\text{sh}\,\frac{a}{3} + i\sqrt{3}\,\text{ch}\,\frac{a}{3}\right]$$

$$x_3 = -\frac{\lambda}{2}\left[\text{sh}\,\frac{a}{3} - i\sqrt{3}\,\text{ch}\,\frac{a}{3}\right]$$

2° $p$ négatif. Cette fois on fait

$$\lambda = \pm 2\sqrt{-\frac{p}{3}}, \qquad \text{ch}a = \frac{3q}{p\lambda},$$

en choisissant pour $\lambda$ le signe contraire à celui de $q$, en sorte que ch$a$ soit positif ; par $x = \lambda z$, on est ramené à l'équation (2), et les racines en $x$ sont

$$x_1 = \lambda\,\text{ch}\,\frac{a}{3}$$

$$x_2 = -\frac{\lambda}{2}\left[\text{ch}\,\frac{a}{3} + i\sqrt{3}\,\text{sh}\,\frac{a}{3}\right]$$

$$x_3 = -\frac{\lambda}{2}\left[\text{ch}\,\frac{a}{3} - i\sqrt{3}\,\text{sh}\,\frac{a}{3}\right]$$

Pour appliquer la méthode à un calcul numérique, il suffit d'avoir à sa disposition une table de logarithmes des fonctions hyperboliques suffisamment étendue, et d'un maniement commode ; le calcul ci-dessous est fait à l'aide d'une table à 5 décimales, de disposition très pratique, mais qui n'est point encore publiée.

*Résoudre l'équation* $x^3 + 7x + 7 = 0$.

$$\lambda = 2\sqrt{\frac{7}{3}}, \ \log \lambda = 0{,}48502$$

$$\mathrm{sh}\, a = -\frac{3}{\lambda}, \ \log(-\mathrm{sh}\, a) = \underline{1}{,}99210, \quad a = -0{,}86857$$

$$\frac{a}{3} = -0{,}28952, \ \log \mathrm{sh}\left(-\frac{a}{3}\right) = \bar{1}{,}46772, \ \log \mathrm{ch}\left(-\frac{a}{3}\right) = 0{,}01796$$

$$\log(-x_1) = \bar{1}{,}95274$$

$$\log \frac{x_3 - x_2}{i} = \log \lambda + \log \sqrt{3} + \log \mathrm{ch}\left(\frac{-a}{3}\right) = 0{,}74153$$

$$-x_1 = 0{,}8969$$

$$x_2 + x_3 = 0{,}8969$$

$$\frac{x_3 - x_2}{i} = 5{,}5148$$

$$x_1 = -0{,}8969$$

$$x_2 = 0{,}44845 - 2{,}7574\, i$$

$$x_3 = 0{,}44845 + 2{,}7574\, i.$$

P. Barbarin (Bordeaux).

---

DÉMONSTRATION SIMPLIFIÉE

# DE LA FORMULE DE TAYLOR

1. Parmi les différentes démonstrations de cette formule qui s'appuient sur le théorème de Rolle, la suivante est peut-être la plus facile, puisqu'elle n'exige que des différentiations extrêmement simples. Elle n'est pas, à ce que nous croyons, connue jusqu'à présent.