DÉMONSTRATION SIMPLIFIÉE DE LA FORMULE DE TAYLOR

Autor(en): **Hatzidakis, J. N.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **2 (1900)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **13.07.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-3583

d'avoir à sa disposition une table de logarithmes des fonctions hyperboliques suffisamment étendue, et d'un maniement commode ; le calcul ci-dessous est fait à l'aide d'une table à 5 décimales, de disposition très pratique, mais qui n'est point encore publiée.

Résoudre l'équation $x^3 + 7x + 7 = 0$.

$$\lambda = 2\sqrt{\frac{7}{3}}, \ \log\lambda = 0{,}48502$$

$$\mathrm{sh}\,a = -\frac{3}{\lambda}, \ \log(-\mathrm{sh}\,a) = \underline{1},99210, \ a = -0{,}86857$$

$$\frac{a}{3} = -0{,}28952, \ \log \mathrm{sh}\left(-\frac{a}{3}\right) = \overline{1},46772, \ \log \mathrm{ch}\left(-\frac{a}{3}\right) = 0{,}01796$$

$$\log(-x_1) = \overline{1},95274$$

$$\log\frac{x_3 - x_2}{i} = \log\lambda + \log\sqrt{3} + \log \mathrm{ch}\left(\frac{-a}{3}\right) = 0{,}74153$$

$$-x_1 = 0{,}8969$$

$$x_2 + x_3 = 0{,}8969$$

$$\frac{x_3 - x_2}{i} = 5{,}5148$$

$$x_1 = -0{,}8969$$

$$x_2 = 0{,}44845 - 2{,}7574\,i$$

$$x_3 = 0{,}44845 + 2{,}7574\,i.$$

P. Barbarin (Bordeaux).

DÉMONSTRATION SIMPLIFIÉE

DE LA FORMULE DE TAYLOR

1. Parmi les différentes démonstrations de cette formule qui s'appuient sur le théorème de Rolle, la suivante est peut-être la plus facile, puisqu'elle n'exige que des différentiations extrêmement simples. Elle n'est pas, à ce que nous croyons, connue jusqu'à présent.

2. Considérons d'abord la différence

$$\sigma(x+\varepsilon) - \sigma(x) - \varepsilon\sigma'(x) \equiv \Gamma$$

entre l'accroissement de la fonction et sa différentielle. Si, dans l'expression

$$\sigma(x+\varepsilon) - \sigma(x) - \varepsilon\sigma'(x) - \Gamma,$$

nous remplaçons ε par une variable ω et que nous multipliions Γ par $\left(\frac{\omega}{\varepsilon}\right)^2$, nous aurons la fonction suivante de ω

$$\sigma(x+\omega) - \sigma(x) - \omega\sigma'(x) - \Gamma\frac{\omega^2}{\varepsilon^2},$$

qui, par la manière même dont elle a été construite, s'annule pour $\omega = 0$ et $\omega = \varepsilon$; sa dérivée

$$\sigma'(x+\omega) - \sigma'(x) - 2\Gamma\frac{\omega}{\varepsilon^2}$$

s'annule donc pour une valeur ε_1 de ω $(0 < \varepsilon_1 < \varepsilon)$; mais, comme elle s'annule aussi pour $\omega = 0$, sa dérivée

$$\sigma''(x+\omega) - 2\Gamma\frac{1}{\varepsilon^2}$$

s'annulera, elle aussi, pour une valeur ε_2 de ω $(0 < \varepsilon^2 < \varepsilon_1)$, c'est-à-dire qu'on aura

$$\Gamma = \frac{\varepsilon^2}{2}\sigma''(x+\varepsilon_2),$$

d'où

$$\sigma(x+\varepsilon) - \sigma(x) = \frac{\varepsilon}{1}\sigma'(x) + \frac{\varepsilon^2}{2}\sigma''(x+\varepsilon_2).$$

3. Considérons maintenant, en général, la différence

$$\sigma(x+\varepsilon) - \sigma(x) - \frac{\varepsilon}{1!}\sigma'(x) - \frac{\varepsilon^2}{2!}\sigma''(x) - \frac{\varepsilon^3}{3!}\sigma'''(x) - \dots$$
$$\dots - \frac{\varepsilon^r}{r!}\sigma^{(r)}(x) \equiv \Gamma.$$

Nous pouvons, de la même manière qu'auparavant, former la fonction suivante de ω

$$(1)\quad \sigma(x+\omega) - \sigma(x) - \frac{\omega}{1!}\sigma'(x) - \frac{\omega^2}{2!}\sigma''(x) - \dots - \frac{\omega^r}{r!}\sigma^{(r)}(x) - \Gamma\frac{\omega^{r+1}}{\varepsilon^{r+1}},$$

dont les dérivées successives jusqu'à l'ordre $r+1$ sont les suivantes

$$\sigma'(x+\omega)-\sigma'(x)-\frac{\omega}{1!}\sigma''(x)-\frac{\omega^2}{2!}\sigma'''(x)-\ldots-(r+1)\,\omega^r\,\frac{\Gamma}{\varepsilon^{r+1}},$$

$$\sigma''(x+\omega)-\sigma''(x)-\frac{\omega}{1}\sigma'''(x)-\ldots-(r+1)\,r\omega^{r-1}\,\frac{\Gamma}{\varepsilon^{r+1}},$$

$$\sigma'''(x+\omega)-\sigma'''(x)-\frac{\omega}{1}\sigma''''(x)-\ldots-(r+1)\,r\,(r-1)\,\omega^{r-2}\,\frac{\Gamma}{\varepsilon^{r+1}},$$

. . . .

$$\sigma^{(r)}(x+\omega)-\sigma^{(r)}(x)-2.3\ldots r\,(r+1)\,\omega\,\frac{\Gamma}{\varepsilon^{r+1}},$$

$$\sigma^{(r+1)}(x+\omega)-\sigma^{(r+1)}x-1.2\ldots r\,(r+1)\,\frac{\Gamma}{\varepsilon^{r+1}}.$$

Ces dérivées s'annulent toutes (excepté la dernière) pour $\omega=0$ et, comme la fonction (1) s'annule pour les deux valeurs de ω : $\omega=0$, $\omega=\varepsilon$, sa dérivée première s'annulera pour $\omega=\varepsilon_1$ $(0<\varepsilon_1<\varepsilon)$; mais elle s'annule aussi pour $\omega=0$, donc sa dérivée, c'est-à-dire la dérivée seconde de (1), s'annulera pour $\omega=\varepsilon_2$ $(0<\varepsilon_2<\varepsilon_1)$; or, elle s'annule aussi pour $\omega=0$, donc sa dérivée (ou bien la dérivée troisième de (1)) doit s'annuler pour $\omega=\varepsilon_3$ $(0<\varepsilon_3<\varepsilon_2)$, et ainsi de suite; la dernière dérivée (celle de l'ordre $r+1$) s'annulera pour $\omega=\varepsilon_{r+1}$ $(0<\varepsilon_{1+r}<\varepsilon_r<\ldots\ldots<\varepsilon)$. On a donc :

$$\sigma(x+\varepsilon)-\sigma(x)=\frac{\varepsilon}{1!}\sigma'(x)+\frac{\varepsilon^2}{2!}\sigma''(x)+\frac{\varepsilon^3}{3!}\sigma'''(x)+\ldots+\frac{\varepsilon^r}{r!}\sigma^{(r)}(x)+$$
$$+\frac{\varepsilon^{r+1}}{(r+1)!}\sigma^{(r+1)}(x+\rho);\quad (0<\rho<\varepsilon).$$

c. q. f. d.

J. N. Hatzidakis (Athènes).

Traduit en français par N.-J. Hatzidakis (Berlin).